

Лекция 6

ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ

В предыдущих лекциях были рассмотрены чертежи основных геометрических объектов трехмерного пространства (точки, прямой и плоскости) и связанные с ними метрические и позиционные задачи.

Этим, разумеется, не исчерпывается содержание начертательной геометрии, предмет изучения которой – все многообразие геометрических фигур трехмерного пространства, в том числе кривых линий и криволинейных поверхностей. Рассмотрим основные типы кривых линий и поверхностей и способы их изображения на проекционном чертеже.

6.1. Линии

Линия – геометрическое понятие, которому в разных разделах геометрии дают различные определения. В начертательной геометрии *линию рассматривают либо как траекторию движущейся точки, либо как границу поверхности, либо как результат взаимного пересечения поверхностей.*

Простейшая линия – прямая. Прямую линию можно считать либо траекторией материальной точки, движущейся по инерции равномерно и прямолинейно (в соответствии с первым законом Ньютона), либо множеством общих точек двух пересекающихся плоскостей.

Ломаная линия составлена из отрезков прямой линии. Например, граница плоской многоугольной фигуры – ломаная линия.

Линии, отличающиеся от прямой и ломаной, называют кривыми линиями. Способы образования кривых линий могут быть различны. Одни кривые линии образуются по определенному графическому или аналитическому правилу, алгоритму или закону. Такие линии называют *закономерными*. Другие кривые получены опытным путем или начерчены архитектором или дизайнером “от руки”. Их называют *незакономерными* (или *графическими*).

Закономерные кривые разделяют на *алгебраические* и *трансцендентные* соответственно тому, являются ли их уравнения в прямоугольной системе координат алгебраическими или трансцендентными.

Уравнение называют алгебраическим, если в нем содержатся только алгебраические операции над неизвестными (умножение, сложение, возведение в целую степень).

Например, уравнение $x^3 - ay^2 + b = 0$ – алгебраическое. Ему соответствует алгебраическая кривая третьего порядка, лежащая в плоскости $xу$. Порядком алгебраической кривой называют степень ее уравнения.

Синусоида – закономерная, но не алгебраическая кривая, так как уравнение синусоиды $y = \sin x$ в декартовых прямоугольных координатах OXY не алгебраическое (трансцендентное).

По своему расположению в пространстве различают *плоские* и *пространственные* кривые линии.

Начертательная геометрия изучает кривые линии и различные операции с ними по их проекциям на комплексном чертеже. Чтобы изобразить кривую линию на чертеже, надо построить горизонтальную и фронтальную проекции ряда точек, принадлежащих этой кривой. Соединяя проекции точек плавной линией, получаем проекционный чертеж данной кривой.

6.1.1. Плоские кривые линии

Напомним, что в начертательной геометрии кривая линия может рассматриваться как траектория движущейся точки. Если точка движется в плоскости, то она описывает плоскую кривую. Для построения плоской кривой линии надо на чертеже задать плоскость этой кривой, затем указать в этой плоскости ряд последовательных положений движущейся точки. Соединяя проекции точек плавной кривой, получим чертеж плоской кривой линии.

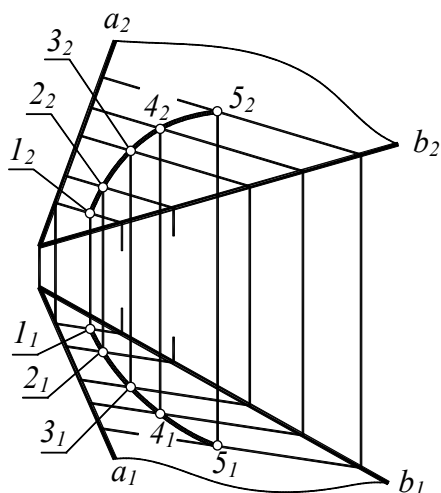


Рис. 6.1

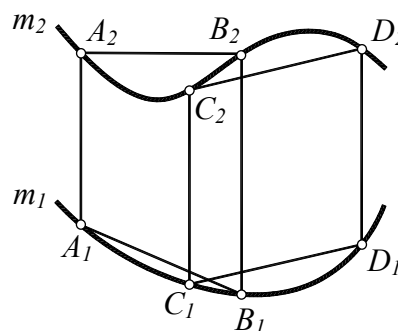


Рис. 6.2

Например, в плоскости $\Sigma(a \cap b)$ отмечены последовательные положения $1 \dots 5$ некоторой точки, произвольно движущейся в этой плоскости (рис. 6.1). Через отмеченные точки проходит плоская незакономерная кривая.

По виду проекций кривой нельзя сразу определить, какая кривая показана на чертеже – плоская или пространственная. Для ответа на этот вопрос необходимо установить, лежат ли *все точки кривой* в одной плоскости. Например, на рис. 6.2 изображена кривая m . Отрезки AB и CD , соединяющие точки кривой, не пересекаются, то есть точки A, B, C, D кривой m не лежат в одной плоскости. Следовательно, m – пространственная кривая. Если же случайно выбранные хорды исследуемой кривой пересекаются, то об этой кривой ничего определенного сказать нельзя (почему?).

Среди плоских кривых линий особо выделяют кривые второго порядка – эллипс, параболу и гиперболу. Кривые второго порядка представляют значительный интерес ввиду широкого применения их в ряде разделов физики, в астрономии, механике, архитектуре и др.

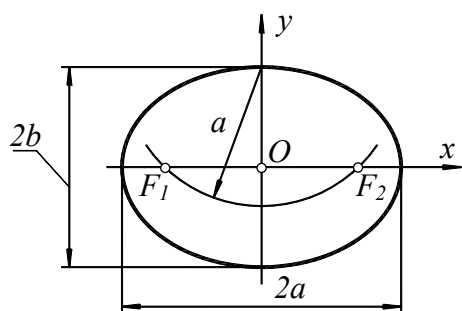


Рис. 6.3

6.1.1.1. Эллипс

Уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $2a$ и $2b$ – большая и малая оси эллипса, а начало координат $O(0,0)$ – центр эллипса (рис. 6.3).

Эллипс есть множество точек M , для которых сумма расстояний от точки M до двух фик-

сированных точек F_1 и F_2 постоянна и равна длине большой оси эллипса:

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Точки F_1 и F_2 называют фокусами эллипса. Если даны оси $2a$ и $2b$ эллипса, то его фокусы находят на пересечении большой оси $2a$ с окружностью радиуса a с центром в конце малой оси $2b$ (см. рис. 6.3).

Окружность – частный случай эллипса. Уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$ получается из уравнения эллипса, если $a = b = R$.

6.1.1.2. Гипербола

Гипербола описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где величины $2a$ и $2b$ – действительная и мнимая оси гиперболы, а начало координат $O(0,0)$ – центр гиперболы (рис. 6.4).

Гипербола есть множество точек M , для которых абсолютная величина разности расстояний от точки M до фиксированных точек F_1 и F_2 постоянна и равна длине действительной оси гиперболы: $|MF_1 - MF_2| = 2a$.

Точки F_1 и F_2 называют фокусами гиперболы. Если даны оси $2a$ и $2b$ гиперболы, то ее фокусы находят на пересечении действительной оси $2a$ с окружностью радиуса $R = \sqrt{a^2 + b^2}$, центр которой совпадает с центром гиперболы.

Прямые, проходящие через центр гиперболы и касающиеся ее в несобственных точках, называют асимптотами гиперболы. Асимптоты гиперболы направлены по диагоналям прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$. По мере удаления в бесконечность ветви гиперболы неограниченно приближаются к своим асимптотам.

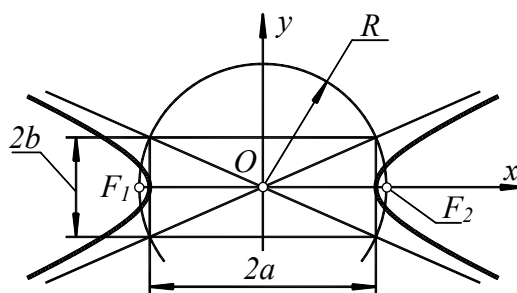


Рис. 6.4

6.1.1.3. Парабола

Парабола описывается уравнением $y^2 = 2px$, где коэффициент p называют параметром параболы (рис. 6.5). Вершина параболы совпадает с началом координат $O(0,0)$.

Парабола есть множество точек, равноудаленных от заданной точки (фокуса F) и от заданной прямой (директрисы d).

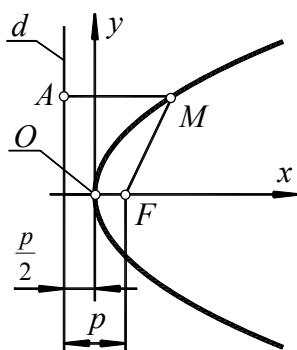


Рис. 6.5

Расстояние между фокусом F и директрисой d равно параметру p параболы. Вершина параболы O делит это расстояние пополам. Для произвольной точки M параболы расстояние MF до фокуса равно расстоянию MA до директрисы (см. рис. 6.5).

Из анализа уравнения параболы нетрудно сделать вывод, что все параболы подобны друг другу. Действительно, все параболы отличаются друг от друга только одним размером: параметром p . Аналогичным образом, все окружности подобны, так как отличаются друг от друга только одним размером: радиусом R .

6.1.2. Пространственные кривые линии

Пространственная кривая линия определяется либо как траектория точки, движущейся в трехмерном пространстве, либо как линия пересечения поверхностей.

Пример 1. Зенитная самонаводящаяся ракета, преследуя произвольно маневрирующую цель, движется по незакономерной пространственной траектории.

Пример 2. Линия пересечения поверхностей кругового конуса и эллиптического цилиндра – закономерная пространственная алгебраическая кривая четвертого порядка.

Из закономерных пространственных кривых наибольшее практическое применение имеют винтовые линии, в частности – *цилиндрическая винтовая линия (гелиса)*. Моделью винтовой линии может служить цилиндрическая пружина.

Цилиндрическая винтовая линия образуется как траектория точки, равномерно вращающейся вокруг оси и одновременно равномерно перемещающейся в направлении этой оси.

Подведем резец к вращающемуся с постоянной угловой скоростью цилиндру. Будем равномерно перемещать резец параллельно оси вращения цилиндра. На цилиндре останется “царапина” в виде винтовой линии.

Винтовая линия – неалгебраическая (трансцендентная) пространственная кривая. Если ось цилиндра перпендикулярна плоскости Π_1 , то горизонтальная проекция винтовой линии – окружность, а фронтальная – синусоида. На развертке цилиндра винтовая линия изобразится в виде прямой линии с углом наклона α (рис. 6.6). Угол α называют углом подъема винтовой линии. Расстояние H между соседними витками, измеренное вдоль оси цилиндра, называют шагом винтовой линии.

Винтовая линия является *геодезической линией* на поверхности кругового цилиндра. Геодезической называется линия, принадлежащая данной поверхности и кратчайшая из всех линий, которые можно провести между двумя точками поверхности. Геодезическая линия изображается на развертке поверхности в виде прямой. Например, кратчайшее расстояние между точками L и K , измеренное по поверхности цилиндра, равно расстоянию L_0K_0 на его развертке.

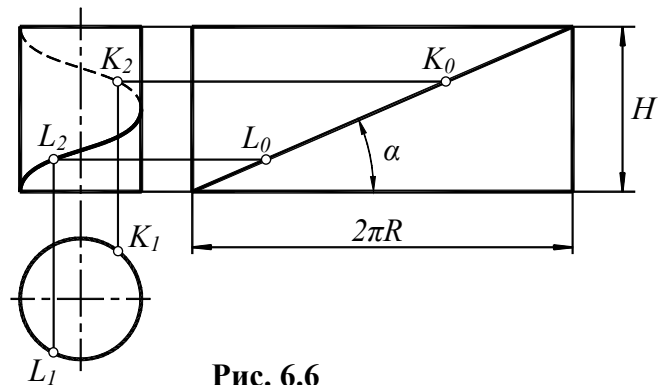


Рис. 6.6

6.2. Поверхности

Поверхность – геометрическое понятие, которому в разных разделах геометрии дают разное определение. Например, в аналитической геометрии поверхностью называют множество точек, удовлетворяющих уравнению $F(x, y, z) = 0$.

В начертательной геометрии поверхность рассматривают *кинематически* – как результат непрерывного перемещения линии в пространстве. Эту движущуюся линию называют *образующей*, так как она в процессе своего перемещения образует (“заметает”) данную поверхность.

Поверхность, образованная перемещением прямой линии, называется *линейчатой*. Линейчатые поверхности делятся на *развертывающиеся* (которые можно совместить с плоскостью без складок и разрывов) и *неразвертывающиеся*. Поверхности, которые не могут быть образованы движением прямой линии, называются *нелинейчатыми*.

Чтобы задать поверхность, надо указать закономерность движения образующей в пространстве. Закон перемещения образующей линии задается при помощи *направляющих линий* и алгоритма перемещения образующей по направляющим.

Совокупность условий, которые определяют поверхность в пространстве, называется определителем поверхности.

Определитель поверхности состоит из двух частей: графической и алгоритмической. Графическая часть определителя поверхности – это, как правило, проекционный чертеж неподвижных направляющих. Если поверхность формируется движением криволинейной образующей, то прилагается чертеж образующей.

Алгоритмическая часть содержит словесную или символическую запись закона перемещения образующей линии по направляющим.

Чтобы задать поверхность на чертеже, надо начертить в двух проекциях все элементы графической части определителя поверхности (направляющие и образующую), а на свободном месте чертежа записать (словесно или символически) алгоритмическую часть определителя.

Если чертеж поверхности выполнен правильно, то на чертеже могут быть указаны проекции точек и линий, принадлежащих этой поверхности. Иными словами, может быть решена задача “на принадлежность” какой-либо точки заданной поверхности.

Критерий полноты чертежа поверхности формулируют в виде следующего правила: **поверхность на чертеже считается заданной, если по одной проекции точки, принадлежащей поверхности, можно построить ее вторую проекцию.**

С помощью этого критерия проверяется полнота задания поверхности на чертеже. Если на чертеже указана проекция какой-либо точки на поверхности, а вторую проекцию этой точки построить не удастся, значит, чертеж поверхности не полон.

6.2.1. Гранные поверхности. Многогранники

Поверхность, образованная движением прямолинейной образующей l , проходящей через неподвижную точку S и пересекающей ломаную направляющую m , называется гранной поверхностью.

Если точка S собственная (не удалена в бесконечность), то образуется пирамидальная поверхность (рис. 6.7, а). Если точка S несобственная (бесконечно удалена в направлении s), то образуется призматическая поверхность (рис. 6.7, б). Гранные поверхности (как пирамидальная, так и призматическая) ничем не ограничены в пространстве, так как образованы движением бесконечной прямой l , скользящей по ломаной образующей $m=ABCD$.

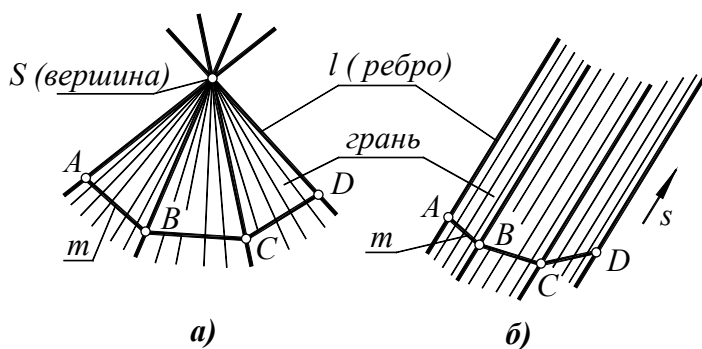


Рис. 6.7

В отличие от гранной поверхности, *многогранник* ограничен своими гранями, образуя замкнутый пространственный объем.

Многогранником называют пространственную геометрическую фигуру, со всех сторон ограниченную плоскими многоугольниками (гранями). Элементы многогранника – *границы* (отсеки плоскостей), *ребра* (прямые линии, по которым пересекаются грани) и *вершины* (точки пересечения ребер). Количество граней (G), ребер (P) и вершин (B) связано формулой Эйлера:

$$G + B - P = 2.$$

Совокупность ребер и вершин называют *сеткой многогранника*. Построение проекций многогранника на чертеже сводится к построению проекций его сетки (ребер и вершин). На рис. 6.8 показан четырехгранник (тетраэдр) $ABCS$, заданный на чертеже своими вершинами (точками A, B, C, S) и ребрами (прямыми, соединяющими вершины).

Замкнутая линия, ограничивающая проекцию фигуры, называется *очерком*. Проекция любой точки, лежащей на поверхности фигуры, находится внутри очерка. На рис. 6.8 замкнутая ломаная линия $A_1B_1S_1C_1A_1$ – горизонтальная очерковая линия (очерк) тетраэдра. Линия $A_2B_2C_2S_2A_2$ – фронтальный очерк тетраэдра.

Чтобы на чертеже многогранника выявить видимость его ребер, используют способ конкурирующих точек. Например, с помощью пары горизонтально-конкурирующих точек 1 и 2 выявлена видимость скрещивающихся ребер AS и BC на горизонтальной проекции. С помощью фронтально-конкурирующих точек 3 и 4 выявляется видимость скрещивающихся ребер AC и BS на фронтальной проекции (см. рис. 6.8).

Построение проекций точек, принадлежащих ребрам или граням призмы (рис. 6.9) или пирамиды выполняется аналогично построению проекций точек, принадлежащих прямой линии или плоскости (см. п. 2.3.1). Проекции точек и линий, принадлежащих видимым проекциям граней на чертеже, видимы (проекции A_2, F_2 точек A и F на рис. 6.9). Если проекция грани невидима, то невидима и соответствующая проекция точки, принадлежащая этой грани. Например, на рис. 6.8 проекции 1_1 и 4_2 точек 1 и 4 невидимы. На рис. 6.9 невидима проекция A'_2 точки A' .

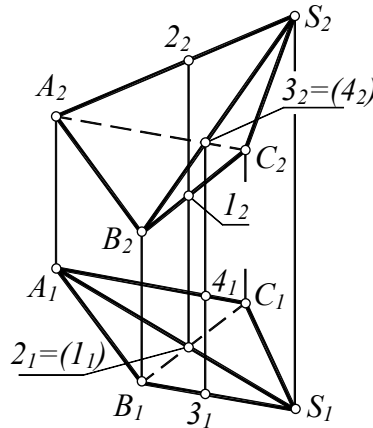


Рис. 6.8

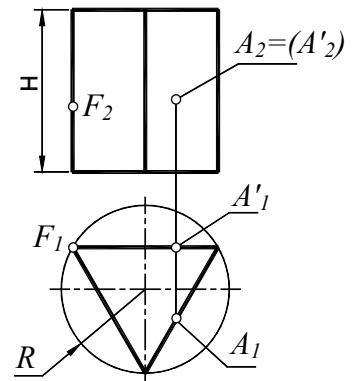


Рис. 6.9

6.2.2. Коническая поверхность общего вида

Поверхность, образованная движением прямолинейной образующей l , проходящей через неподвижную точку S и пересекающей направляющую m , называется конической поверхностью.

Графическая часть определителя содержит чертеж двух элементов: точки S и направляющей m (рис. 6.10). Алгоритмическая часть определителя может быть записана символически: $S \in l \cap m$ (“образующая l проходит через точку S и пересекает направляющую m ”). Точка S называется вершиной конической поверхности.

Проверим, полностью ли задана поверхность на чертеже. Укажем на одной из проекций (например, на фронтальной проекции) проекцию A_2 произвольной точки A , принадлежащей поверхности. Проведем через A_2 и S_2 фронтальную проекцию образующей. В точке M_2 эта проекция пересекает проекцию m_2 направляющей. С помощью линий связи найдем горизонтальную проекцию S_1M_1 образующей. Точка A принадлежит образующей SM . Недостающая горизонтальная проекция A_1 точки A определена с помощью линии связи.

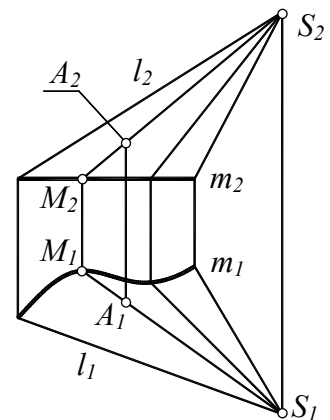


Рис. 6.10

По одной проекции точки, принадлежащей поверхности, удалось построить вторую проекцию этой точки. Следовательно, поверхность на чертеже полностью задана.

6.2.3. Цилиндрическая поверхность общего вида

Пусть прямолинейная образующая l движется параллельно заданному направлению s , пересекая при этом направляющую кривую m . Образующая l в процессе своего движения “заметает” цилиндрическую поверхность общего вида.

Поверхность, образованная прямолинейной образующей l , движущейся параллельно заданному направлению s и пересекающей направляющую m , называется цилиндрической поверхностью.

Цилиндрическая поверхность – частный случай конической поверхности. Действительно, если вершина S конической поверхности “уходит в бесконечность” по заданному направлению s , то все образующие становятся параллельны этому направлению. При этом получается цилиндрическая поверхность.

Чтобы задать цилиндрическую поверхность на чертеже, надо начертить направляющую кривую m и указать направление s (рис. 6.11). Графическая часть определителя дополняется алгоритмом формирования поверхности. Символическая запись алгоритма имеет вид: $m \cap l || s$ (“образующая l пересекает направляющую m и движется параллельно направлению s ”).

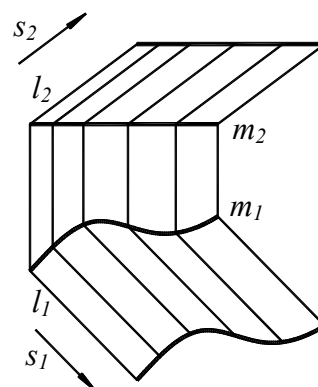


Рис. 6.11

6.2.4. Поверхности с плоскостью параллелизма

Пусть прямолинейная образующая l движется параллельно заданной плоскости Σ , пересекая при этом направляющие a и b . Получаем линейчатую поверхность с плоскостью параллелизма (поверхность Каталана).

Поверхность, образованная прямолинейной образующей l , движущейся параллельно заданной плоскости Σ и пересекающей направляющие a и b , называется линейчатой поверхностью с плоскостью параллелизма.

Графическая часть определителя линейчатой поверхности с плоскостью параллелизма содержит чертежи двух направляющих a, b и плоскости параллелизма Σ . Алгоритмическая часть определителя может быть записана символически: $a \cap l \cap b, l || \Sigma$ (“образующая l параллельна плоскости Σ и пересекает направляющие a, b ”). Прямолинейные образующие параллельны плоскости параллелизма, но не параллельны между собой.

Покажем, что линейчатая поверхность с плоскостью параллелизма полностью задана на чертеже, если начерчены ее направляющие a, b и указана плоскость параллелизма Σ (рис. 6.12).

Пусть дана горизонтальная проекция D_1 какой-либо точки D , принадлежащей поверхности. Чтобы найти фронтальную проекцию точки D , построим сетку образующих $l', l'', l''', \dots$ и через D_1 проведем вспомогательную секущую плоскость Δ . Плоскость Δ пересекает линейчатую поверхность по линии $1 \dots 5$, показанной на

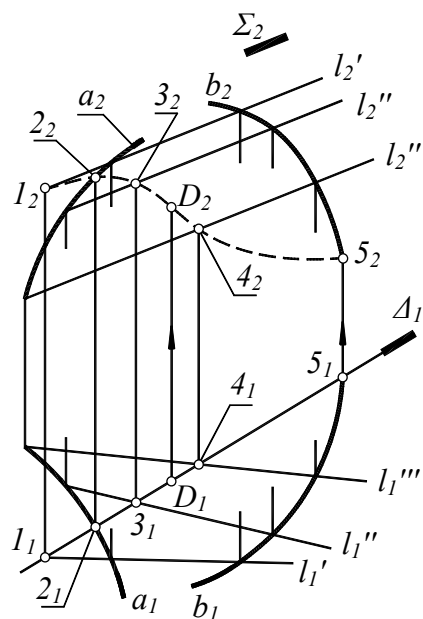


Рис. 6.12

рис. 6.12 штриховой линией. Точка D принадлежит этой линии, поэтому недостающая фронтальная проекция D_2 точки D может быть найдена с помощью вертикальной линии связи.

Для построения недостающей проекции точки D не обязательно вводить в рассмотрение вспомогательную секущую плоскость Δ . Достаточно начертить горизонтальную проекцию произвольной кривой, лежащей на данной линейчатой поверхности и проходящей через точку D . Построив фронтальную проекцию этой кривой, отмечаем на ней искомую фронтальную проекцию точки D .

Если дана фронтальная проекция какой-либо точки, принадлежащей поверхности, то ее горизонтальная проекция определяется по принадлежности к соответствующей образующей (без построения сетки образующих).

Таким образом, по одной проекции точки, принадлежащей поверхности, удастся построить вторую проекцию этой точки. Следовательно, поверхность на чертеже (см. рис. 6.12) полностью задана.

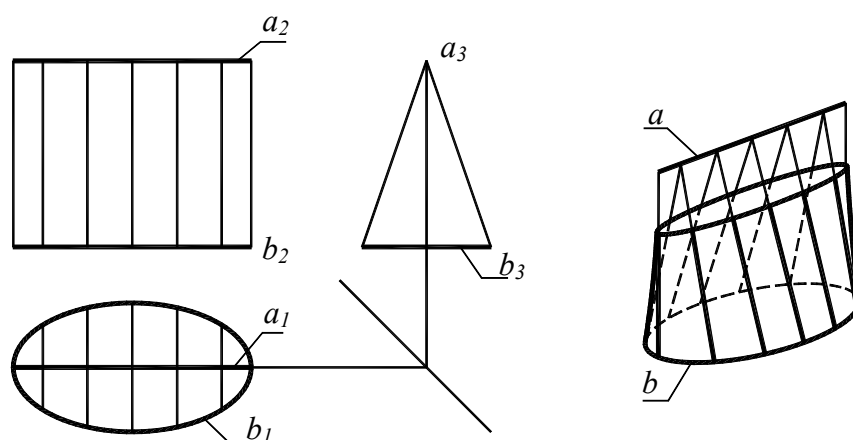


Рис. 6.13

Если обе направляющие линейчатой поверхности с плоскостью параллелизма – кривые линии, то поверхность называется *цилиндром* (см. рис. 6.12). Если одна из направляющих кривая линия, а другая направляющая прямолинейна, то поверхность называют *коноидом*. На рис. 6.13 показан коноид с прямолинейной направляющей a , криволинейной направляющей b (линия b – эллипс) и плоскостью параллелизма Π_3 . Такую поверхность называют “прямой клин”. Горизонтальные плоскости пересекают эту поверхность по эллипсам.

Если обе направляющие – прямые, то линейчатую поверхность называют *косой плоскостью* или *гиперболическим параболоидом*. На рис. 6.14 показана косая плоскость с прямолинейными направляющими a , b и плоскостью параллелизма Σ . Все образующие косой плоскости параллельны плоскости параллелизма, но не параллельны между собой (см. также п. 6.3.4).

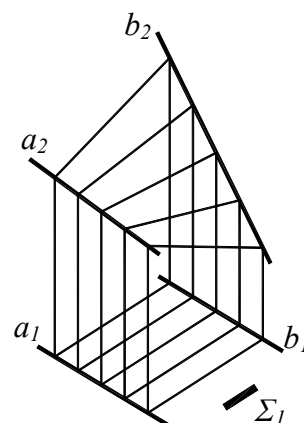


Рис. 6.14

6.2.5. Поверхности вращения

Поверхность, образованная вращением образующей линии l вокруг некоторой оси i , называется поверхностью вращения.

Пусть l – произвольная плоская кривая. Вращая образующую l вокруг оси i , получаем поверхность вращения общего вида (рис. 6.15). Каждая точка $1, 2, 3...$ образующей l перемещается по окружности, которую называют *параллелью*. Через точку 2 про-

ходит параллель минимального радиуса. Эту параллель называют “горловым сечением” поверхности.

В сечении поверхности вращения плоскостью, перпендикулярной оси вращения, получается окружность (параллель).

Плоскость, проходящая через ось вращения i , пересекает поверхность вращения по линии, называемой меридианом.

На чертеже, как правило, изображают очерки проекций поверхности.

Определение. Очерк (очерковая линия) – это граница области, состоящей из проекций точек поверхности. Например, на рис. 6.15 показан фронтальный очерк поверхности вращения (“кувшин”) и его горизонтальный очерк, образованный параллелями минимального и максимального радиусов. Из определения следует, что ни одна точка поверхности не может проектироваться за пределы очерка. Если множество проекций всех точек поверхности Φ совпадает с множеством точек плоскости проекций Π_i , то на Π_i поверхность Φ не имеет очерка.

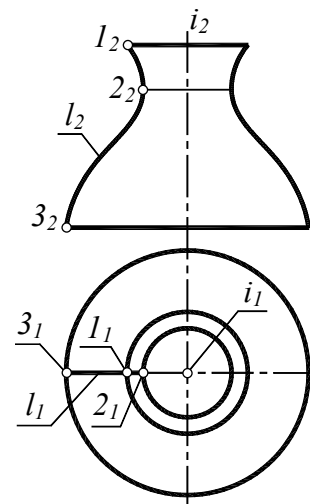


Рис. 6.15

6.2.5.1. Поверхности, образованные вращением прямой линии

Две прямые линии в пространстве могут быть либо параллельны, либо пересекаться, либо скрещиваться под произвольным углом. Соответственно этому различают три вида поверхностей, образованных вращением прямой линии l вокруг оси i .

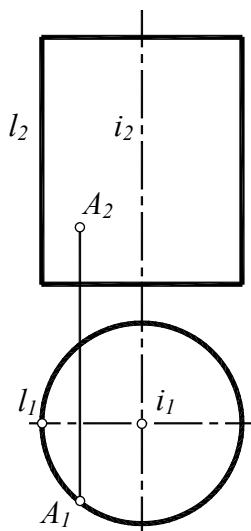


Рис. 6.16

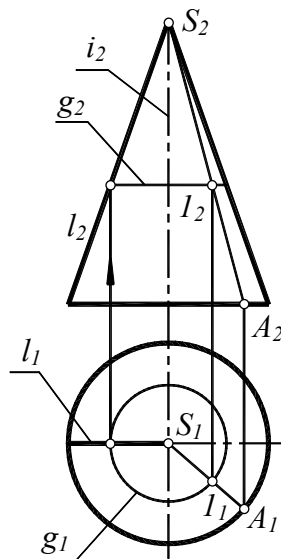


Рис. 6.17

1. Если образующая l параллельна оси вращения i , получается *прямой круговой цилиндр* (рис. 6.16). Горизонтальная проекция A_1 произвольной точки A , принадлежащей поверхности цилиндра, лежит на горизонтальном очерке цилиндра.

2. Если образующая l пересекается с осью вращения – получается *прямой круговой конус* (рис. 6.17).

Чтобы найти недостающую проекцию точки на поверхности конуса, надо провести через эту точку параллель или прямолинейную образующую, принадлежащие поверхности конуса. Например, на рис. 6.17 дана горизонтальная проекция точки I , принадлежащей поверхности конуса. Чтобы определить фронтальную проекцию точки I , проведем через I_1 проекцию g_1 параллели g . С помощью линии связи найдем фронтальную проекцию g_2 этой параллели и отметим на ней фронтальную проекцию точки I .

Эта же задача может быть решена с помощью образующей. Проведем через I_1 проекцию S_1A_1 прямолинейной образующей SA . Найдем фронтальную проекцию S_2A_2 этой образующей (см. рис. 6.17). Фронтальная проекция I_2 точки I находится на S_2A_2 .

3. Если образующая l скрещивается с осью вращения i , то при вращении прямой l вокруг оси i образуется *однополостный гиперboloид вращения* (рис. 6.18). Точки образующей l перемещаются по окружностям (параллелям) разного диаметра.

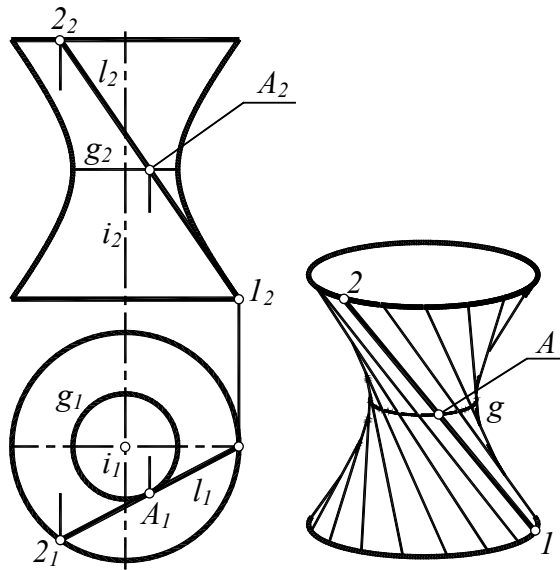


Рис. 6.18

Параллель g минимального диаметра называют *горловым сечением* гиперboloида вращения. Горловое сечение g гиперboloида образовано движением точки A , где A – ближайшая к оси i точка образующей l .

Очерковая линия гиперboloида на плоскости Π_2 – гипербола, мнимая ось которой совпадает с проекцией i_2 оси вращения поверхности. Однополостный гиперboloид вращения может быть получен вращением гиперболы вокруг ее мнимой оси.

6.2.5.2. Поверхности, образованные вращением кривых второго порядка вокруг своей оси

Напомним, что существуют три типа кривых второго порядка: эллипс, парабола и гипербола. Эллипс и гипербола имеют две взаимно перпендикулярные оси симметрии. У параболы одна ось симметрии. Если кривую второго порядка вращать вокруг оси симметрии, то получается эллипсоид вращения, параболоид вращения или гиперboloид вращения (рис. 6.19).

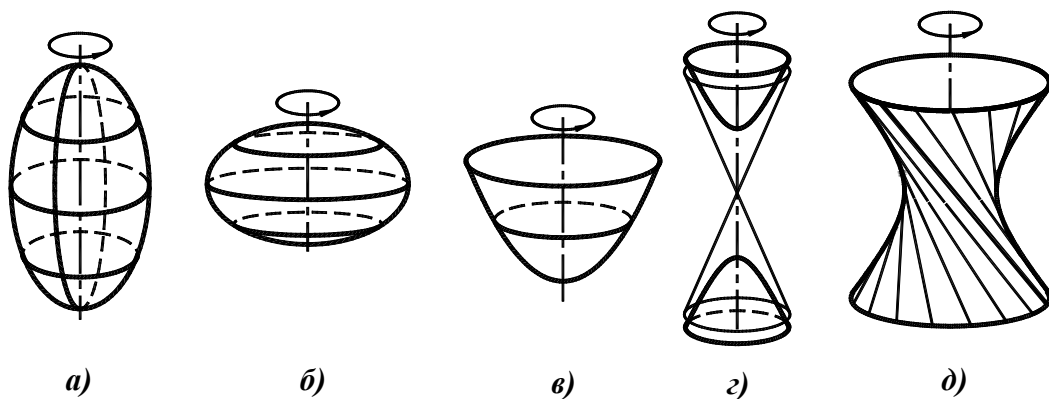


Рис. 6.19

1. Вращая эллипс вокруг большой оси, получаем вытянутый эллипсоид вращения (рис. 6.19, а). При вращении эллипса вокруг малой оси возникает сжатый эллипсоид вращения (рис. 6.19, б). При вращении окружности вокруг диаметра получается сфера. Сфера – частный случай эллипсоида вращения.

2. Вращая параболу вокруг ее оси симметрии, получаем параболоид вращения (рис. 6.19, в).

3. При вращении гиперболы вокруг действительной оси получаем двуполостный гиперболоид вращения. Асимптоты гиперболы описывают асимптотический конус (рис. 6.19, з). При вращении гиперболы вокруг мнимой оси получаем однополостный гиперболоид вращения (рис. 6.19, д).

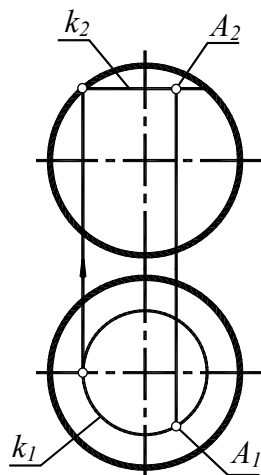


Рис. 6.20

Рассмотренные поверхности (сфера, эллипсоид, гиперболоид, параболоид) являются закономерными алгебраическими поверхностями второго порядка.

Построение точки на поверхности вращения можно выполнить с помощью окружности (параллели), проходящей через эту точку.

Пусть, например, дана горизонтальная проекция A_1 точки A , лежащей на сфере (рис. 6.20). Чтобы построить фронтальную проекцию этой точки, проведем через A_1 окружность k_1 (горизонтальную проекцию параллели k). С помощью линий связи найдем фронтальную проекцию k_2 параллели k и отметим на ней фронтальную проекцию A_2 точки A (см. рис. 6.20).

6.2.5.3. Поверхность тора

Тор образуется вращением окружности вокруг оси i , лежащей в плоскости окружности, но не проходящей через ее центр. Поверхность тора – алгебраическая поверхность четвертого порядка.

Возможны три случая расположения оси вращения относительно образующей окружности.

Случай 1. Ось вращения i не пересекает образующую окружность l (рис. 6.21). Получаем поверхность в форме кольца. Такую поверхность называют *открытым тором* (“кольцом”).

В сечении тора плоскостью в общем случае получается кривая четвертого порядка. Если секущая плоскость Σ перпендикулярна оси вращения i тора, то в сечении получаем кривую четвертого порядка, распавшуюся на две окружности R и r (см. рис. 6.21). Одна окружность находится на “наружной” поверхности кольца, другая окружность – на “внутренней”. Если секущая плоскость проходит через ось i открытого тора, то в сечении получаем кривую четвертого порядка, распавшуюся на две окружности одинакового радиуса.

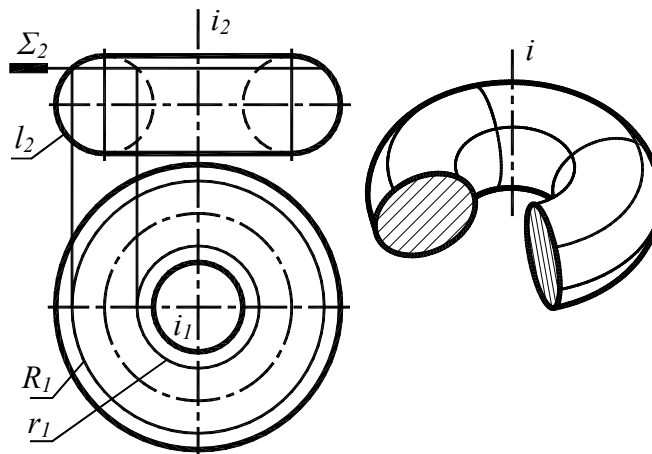


Рис. 6.21

Если секущая плоскость касается поверхности открытого тора в двух точках, то линия сечения распадается на две окружности (круги Виларсо). Таким образом, поверхность открытого тора содержит три семейства круговых сечений.

Случай 2. Ось вращения пересекается с образующей окружностью. При этом получается поверхность, напоминающая либо яблоко (рис. 6.22), либо “веретено” (рис. 6.23). Такой тор называют “закрытым”, так как у него нет внутреннего отверстия.

Случай 3. Ось может касаться окружности (рис. 6.24). Получаем предельный случай открытого тора, когда внутреннее отверстие открытого тора “стянулось в точку”.

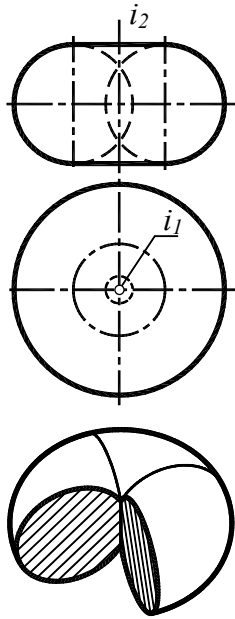


Рис. 6.22

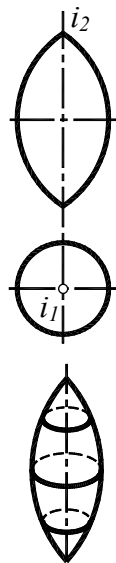


Рис. 6.23

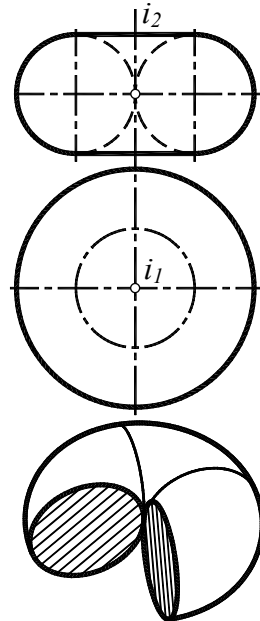


Рис. 6.24

6.2.6. Торсовые поверхности

Торсовой поверхностью (торсом) называют линейчатую поверхность, образованную движением касательной l к пространственной кривой m (рис. 6.25). Кривую m называют ребром возврата торса.

Торсовая поверхность может быть образована другим, более общим способом. Пусть даны две направляющие a и b , которые могут быть поверхностями или кривыми линиями (плоскими или пространственными). Представим себе плоскость Θ , которая “перекатывается” по данным криволинейным направляющим a и b (рис. 6.26).

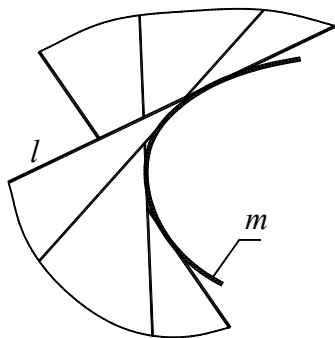


Рис. 6.25

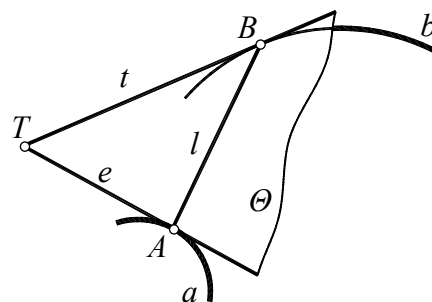


Рис. 6.26

В любом своем положении плоскость Θ касается направляющих в точках A и B (точка A – на направляющей a , точка B – на b). Прямая $l=AB$ соединяет точки касания. Кроме прямой $l=AB$, на рис. 6.26 показаны касательные e и t к направляющим a и b . Эти касательные лежат в плоскости Θ и пересекаются в некоторой точке T .

При “перекачивании” плоскости Θ по направляющим a, b положение прямой AB в пространстве непрерывно изменяется. Получается линейчатая поверхность, заматаемая движущейся прямой $l=AB$. Эта поверхность развевывающаяся, так как она всеми своими прямолинейными образующими $l=AB$ поочередно совмещается с обкатывающей плоскостью Θ . Что это за поверхность?

Как известно (см. лекцию 13), свойством развевываемости обладают, кроме многогранных поверхностей, только конические, цилиндрические и торсовые поверхности. Развевывающаяся поверхность, схематически представленная на рис. 6.26, не является ни конической, ни цилиндрической поверхностью (так как образующие $l=AB$ не параллельны между собой и не пересекаются в одной точке). Следовательно, это торсовая поверхность. Все образующие $l=AB$ торсовой поверхности касаются некоторой пространственной кривой (ребра возврата). Ребро возврата на рис. 6.26 не показано.

Задача 1. Сконструировать развевывающуюся поверхность, “натянутую” на направляющие окружности a и b , лежащие в разных плоскостях (рис. 6.27). Такая задача возникает при монтаже воздухопроводов, изготавливаемых из листового материала.

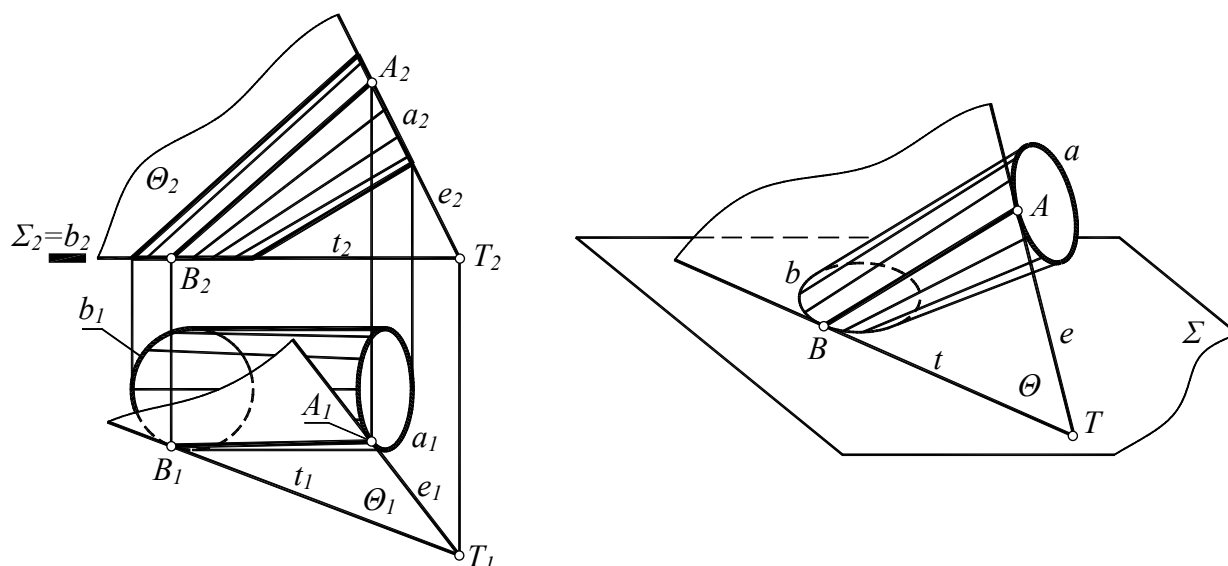


Рис. 6.27

Для решения задачи надо построить множество прямолинейных образующих конструируемой поверхности. Прямолинейные образующие порождаются подвижной плоскостью, перекачивающейся по данным окружностям. На рис. 6.27 дан чертеж и наглядное изображение подвижной плоскости Θ , обкатывающей окружности a, b .

Составим алгоритм построения одной образующей конструируемой поверхности.

1. Через произвольную точку A на направляющей окружности a проводим к этой окружности касательную e (см. рис. 6.27).

2. Отмечаем точку T пересечения прямой e с плоскостью Σ , в которой лежит другая направляющая окружность (окружность b).

3. Из точки T проводим касательную t к окружности b . Отмечаем точку касания B . Прямая $l=AB$ – искомая образующая. Плоскость $\Theta(e \cap t)$ касается конструируемой поверхности по этой образующей (см. рис. 6.27).

Примечание. Через T проходят две касательные к окружности b . Согласно условию задачи, касательная t выбирается таким образом, чтобы вся конструируемая поверхность располагалась с одной стороны от плоскости $\Theta(e \cap t)$.

Взяв другую точку на направляющей окружности a , получаем другую образующую $l=AB$ конструируемой торсовой поверхности, натянутой на направляющие окруж-

ности a , b . Найденная сетка образующих позволяет заменить торсовую поверхность многогранной поверхностью и построить ее развертку.

Задача 2. *Спроектировать откос (насыпь) автомобильной трассы на участке с подъемом и одновременным поворотом дорожного полотна (рис. 6.28).*

Задана граничная кромка дорожного полотна (пространственная кривая a) и горизонтальная плоскость, от которой отсчитываются высотные отметки автотрассы.

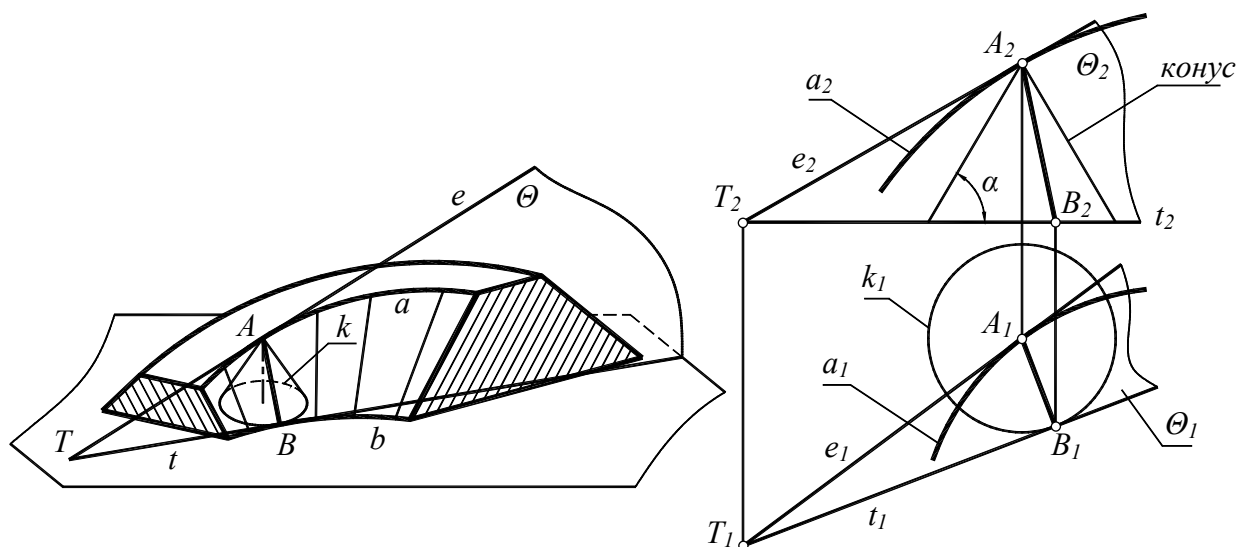


Рис. 6.28

Откос проектируется как линейчатая *поверхность одинакового ската*: все прямолинейные образующие такой поверхности должны быть наклонены под одинаковым (заранее заданным) углом α к горизонтальной плоскости. В этом случае дождевая вода стекает с откоса равномерно, не образуя канавок, разрушающих поверхность откоса.

Рассмотрим алгоритм построения произвольной образующей AB поверхности одинакового ската.

1. Через произвольную точку A , взятую на заданной направляющей a , проводим к кривой a касательную e и отмечаем точку T пересечения прямой e с горизонтальной плоскостью.

2. Строим прямой круговой конус с вершиной A и углом наклона образующих, равным заданному значению α . Находим основание конуса (окружность k на рис. 6.28).

3. Из точки T проводим к основанию k конуса касательную t . Отмечаем точку касания B . Прямолинейная образующая AB проектируемой поверхности построена. Плоскость $\Theta = e \cap t$ касается этой поверхности вдоль образующей AB .

Выбирая другую точку A на направляющей кривой a , получаем другую образующую AB и другую касательную плоскость Θ . Многократно повторяя действия 1...3, находим сетку прямолинейных образующих проектируемой поверхности откоса и линию b пересечения откоса с горизонтальной плоскостью.

Спроектированный по такому алгоритму откос автотрассы является торсовой поверхностью. Действительно, прямолинейные образующие AB этой поверхности порождаются плоскостью Θ , “перекашивающейся” по криволинейным направляющим a и b (точно так же, как и в предыдущей задаче). Во всех своих положениях плоскость Θ касается направляющих a , b , а также касается всего откоса вдоль образующей AB . Следовательно, это развертывающаяся (торсовая) поверхность, все образующие которой касаются одной и той же пространственной кривой линии – ребра возврата. Ребро возврата спроектированной поверхности откоса на рис. 6.28 не показано.

6.2.7. Винтовые поверхности

Пусть образующая линия вращается вокруг оси i и при этом поступательно перемещается вдоль этой оси. Такое сложное движение называют *винтовым*. Обычно рассматривают винтовое движение с постоянной угловой скоростью и равномерным поступательным перемещением образующей, то есть с постоянным винтовым шагом. Шаг винта – расстояние вдоль оси i , которое проходит произвольная точка образующей (не лежащая на оси i) за один полный оборот образующей.

Линейчатая винтовая поверхность, образованная винтовым движением прямой линии, называется *геликоидом*. Геликоид образуется движением прямолинейной образующей, пересекающей цилиндрическую винтовую линию m и ее ось i .

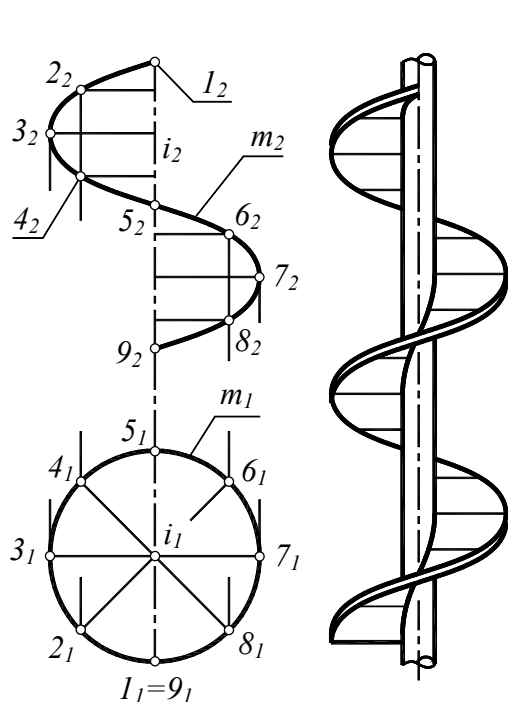


Рис. 6.29

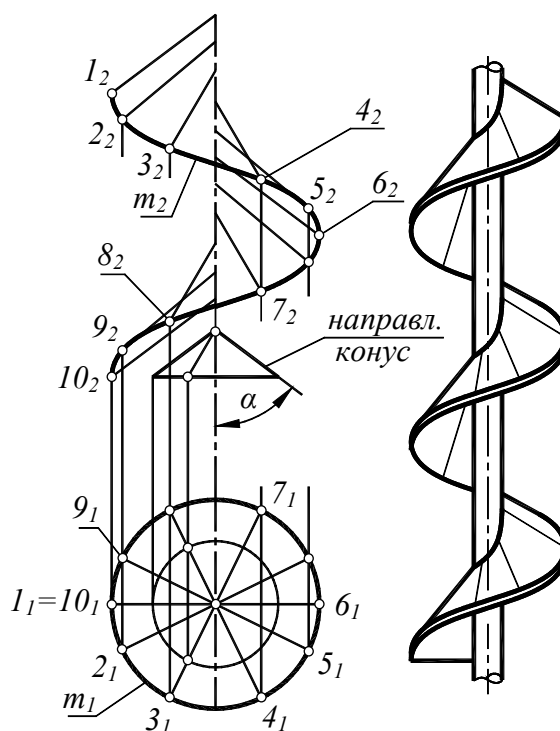


Рис. 6.30

Если образующая перпендикулярна оси винтовой линии, то винтовая поверхность называется *прямым геликоидом* (рис. 6.29). Образующие прямого геликоида параллельны горизонтальной плоскости проекций, следовательно, это поверхность с плоскостью параллелизма (винтовой коноид).

Наклонный геликоид образуется движением прямой линии, скользящей по цилиндрической винтовой линии m и пересекающей ось i винтовой линии под постоянным углом $\alpha \neq 90^\circ$ (рис. 6.30). Прямолинейная образующая наклонного геликоида остается во всех своих положениях параллельна соответствующей образующей прямого кругового конуса, соосного с винтовой линией m . Этот конус называется направляющим (см. также п. 6.3.2, пример 2).

Винтовые поверхности широко применяются в технике (резьбовые пары, винтовые лестницы и пандусы, шнековые механизмы, муфты сцепления и др.).

6.2.8. Каркасные поверхности

Каркасной называют поверхность, задаваемую совокупностью лежащих на ней линий – каркасом поверхности.

Каркасную поверхность задают на чертеже проекциями линий каркаса. Полученный чертеж отличается от чертежа кинематической поверхности тем, что точки поверхности, не лежащие на линиях каркаса, могут быть построены только приближенно. Поэтому поверхность, заданная каркасом, не вполне определена. Существуют поверхности с одним и тем же каркасом, но несколько отличающиеся одна от другой.

Примером поверхности, задаваемой каркасом, может служить земная поверхность. При изображении рельефа земной поверхности в качестве линий каркаса берут горизонталы. Поверхности, заданные каркасом горизонталей, в геодезии и картографии называют топографическими (рис. 6.31). Топографическая карта – это горизонтальная проекция рельефа (“план местности”). Фронтальная проекция, показанная на рис. 6.31, на карте отсутствует. Отсутствующую фронтальную проекцию заменяют числовыми отметками на плане, нанесенными рядом с каждой горизонталью. Например, отметка $h300$ означает, что соответствующая горизонталь расположена на высоте 300 метров.

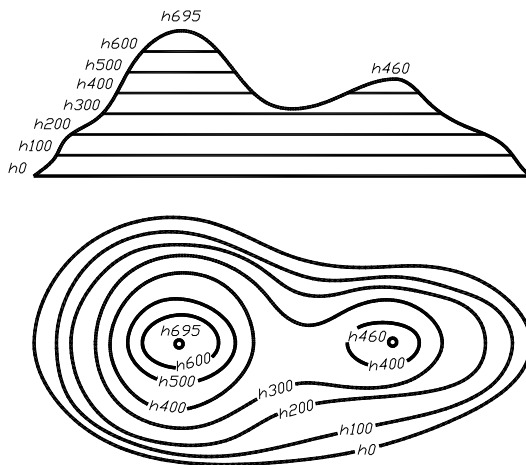


Рис. 6.31

6.3. Дополнительные сведения о линейчатых поверхностях

Поверхность, образованная закономерным движением прямой линии в пространстве, называется линейчатой.

К линейчатым поверхностям относятся ранее рассмотренные многогранные, конические, цилиндрические, торсовые поверхности. Поверхности с плоскостью параллелизма (поверхности Каталана), винтовые поверхности с прямолинейной образующей (геликоиды) также являются линейчатыми поверхностями.

Различные законы движения прямолинейной образующей порождают различные поверхности. Закон движения образующей обычно задается направляющими линиями. Определим количество направляющих, необходимых для задания линейчатой поверхности общего вида. Для этого нам потребуется предварительно ввести в рассмотрение понятие о *размерности* бесконечных множеств геометрических фигур (точек, прямых, плоскостей...), находящихся в трехмерном пространстве.

6.3.1. Размерность бесконечного множества

На прямой линии имеется бесконечное множество точек. На плоскости также имеется бесконечное множество точек. Интуитивно мы представляем, что на плоскости “значительно больше” точек, чем на прямой. Действительно, если прямую линию “вложить” в плоскость, то бесконечное множество точек прямой станет лишь частью бесконечного множества точек плоскости.

Чтобы сравнивать бесконечные множества, вводится понятие “размерность множества”. Два множества имеют одинаковую размерность, если между элементами множеств можно установить взаимно однозначное соответствие. Между точками прямой и точками плоскости невозможно установить такое соответствие, поэтому множество точек прямой и множество точек плоскости имеют разную размерность.

Таким образом, среди бесконечных множеств существует своя “иерархия”, которую количественно характеризуют величиной размерности n . Множеству точек на прямой присваивают значение $n=1$. Это самый низкий “иерархический уровень” бесконечных множеств. Множество точек, принадлежащих данной прямой, называют *одномерным* множеством, условно обозначая его символом ∞^1 (бесконечность в первой степени). Говорят, что прямая линия содержит ∞^1 точек.

С точки зрения аналитической геометрии размерность геометрической фигуры равна числу координат, необходимых для определения принадлежащей этой фигуре точки или линии. Отметив на прямой произвольную точку, будем считать ее началом координат на этой прямой. Положение любой точки на прямой вполне определяется одним параметром – координатой этой точки. Поэтому множество точек, лежащих на прямой, может быть названо *однопараметрическим* множеством. Понятия “одномерное множество” и “однопараметрическое множество” имеют одинаковый смысл.

Положение точки на произвольной кривой линии также определяется одним параметром – криволинейной координатой этой точки, отмеренной вдоль линии, следовательно, *линия – однопараметрическое множество точек*.

Положение точки на плоскости определяется двумя параметрами (например, декартовыми координатами x, y в этой плоскости). Множество точек плоскости – *двупараметрическое (двумерное)* множество. Говорят, что плоскость содержит ∞^2 точек.

На произвольной поверхности Φ , заданной уравнением $z=\varphi(x, y)$ положение некоторой точки I вполне определяется двумя ее декартовыми координатами x_I, y_I (рис. 6.32). *Поверхность – двупараметрическое множество точек*.

В начертательной геометрии преимущественно используется кинематический способ образования поверхностей. Это означает, что поверхность Φ рассматривается не как двупараметрическое множество точек, а как совокупность (бесконечное множество) последовательных положений образующей линии m , непрерывно перемещающейся в пространстве по определенному закону.

Напомним, что закон перемещения образующей линии задается при помощи направляющих линий и алгоритма перемещения образующей m по направляющим. Через каждую точку A_i какой-либо направляющей a (за исключением особых точек, в которых поверхность не имеет определенной касательной плоскости) проходит единственная образующая m_i . Образующая m_i может быть определена (выделена из множества образующих) указанием только одного параметра – например, координаты точки A_i на направляющей a . Следовательно, семейство образующих m_i на поверхности Φ образует однопараметрическое множество. *Поверхность – однопараметрическое множество линий. В частности, линейчатая поверхность – это однопараметрическое множество прямых линий*.

Пример. Чтобы определить положение точки на поверхности земного шара, надо указать два параметра (две географические координаты) – широту и долготу. Чтобы выделить какую-либо параллель из семейства всех параллелей на поверхности Земли, достаточно указать только один параметр – широту.

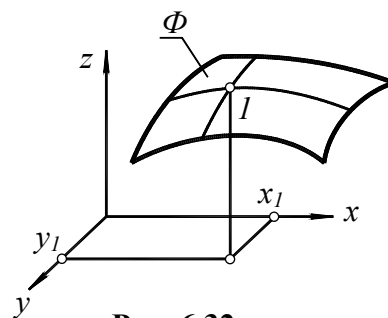


Рис. 6.32

6.3.2. Образование линейчатой поверхности общего вида

Положение произвольной прямой в пространстве определяется четырьмя параметрами – например, координатами x_1, y_1 и x_2, z_2 точек пересечения прямой с плоскостями проекций Π_1 и Π_2 . Следовательно, в пространстве содержится четырехпараметрическое (четырёхмерное) множество прямых.

Иногда вместо понятия “размерность” используют близкое по смыслу понятие “степень свободы”. Числом степеней свободы называют число независимых координат, определяющих положение фигуры. Например, точка на прямой обладает одной степенью свободы, у точки на плоскости – две степени свободы, у точки в пространстве – три степени свободы, у прямой линии в пространстве – четыре степени свободы.

Линейчатая поверхность представляет собой однопараметрическое множество прямых, то есть прямая линия, принадлежащая линейчатой поверхности, обладает всего одной степенью свободы. Произвольная прямая в пространстве имеет четыре степени свободы. Следовательно, чтобы выделить линейчатую поверхность из множества ∞^4 прямых, надо “связать” любые три из четырех степеней свободы, которыми обладает прямая линия в трехмерном пространстве. Это можно выполнить, накладывая определенные условия на положение прямой. Рассмотрим некоторые из этих условий.

Прохождение через фиксированную точку пространства. Множество прямых, проходящих через фиксированную точку пространства S , называют *связкой прямых* с вершиной S . Между прямыми связки и точками произвольной плоскости, не проходящей через вершину связки, устанавливается взаимно однозначное соответствие: каждой точке плоскости соответствует единственная проходящая через эту точку прямая связки. Следовательно, связка прямых, как и множество точек плоскости – двухпараметрическое множество (в связке содержится ∞^2 прямых). Таким образом, условие прохождения прямой линии через фиксированную точку пространства “отнимает” у этой прямой две степени свободы.

Пересечение с пространственной кривой. Множество прямых, пересекающих данную пространственную кривую a , трехпараметрично. Действительно, каждая точка A_i кривой a определяет в пространстве связку ∞^2 прямых; точка A_i на кривой a имеет одну степень свободы, следовательно, множество прямых, пересекающих a , будет трехпараметричным. Таким образом, условие пересечения прямой линии с фиксированной пространственной кривой “отнимает” у этой прямой одну степень свободы.

Касание данной поверхности. На поверхности Φ находится ∞^2 точек. В каждой особой точке A поверхность Φ имеет единственную касательную плоскость, в которой содержится пучок прямых, касательных к Φ в точке A . *Пучком прямых* называют множество прямых, лежащих в одной плоскости и проходящих через фиксированную точку этой плоскости. Пучок прямых – однопараметрическое множество.

В каждой из ∞^2 точек поверхности можно к этой поверхности провести пучок (∞^1) касательных. Следовательно, множество касательных к данной поверхности трехпараметрично, то есть условие касания данной поверхности “отнимает” у прямой только одну степень свободы.

Линейчатая поверхность общего вида должна быть задана таким числом направляющих, которые все вместе “связывают” три степени свободы образующей прямой. Каждая направляющая “отнимает” у прямой одну степень свободы, поэтому для выделения линейчатой поверхности из множества ∞^4 прямых трехмерного пространства надо указать три направляющие (линии или поверхности).

Зададим три произвольные криволинейные направляющие a, b, c линейчатой поверхности (рис. 6.33). Для построения произвольной образующей m отметим на одной

из направляющих (например, на a) произвольную точку A . Найдем точку C пересечения конической поверхности $\Theta(A, b)$ с направляющей c . Прямая AC принадлежит поверхности $\Theta(A, b)$, следовательно, будет пересекать не только направляющие a и c , но и направляющую b – в точке B . Многократно повторяя построение, получаем однопараметрическое множество прямолинейных образующих линейчатой поверхности с тремя направляющими.

Построение точки C пересечения конической поверхности $\Theta(A, b)$ с криволинейной направляющей c выполняется по общей схеме решения первой позиционной задачи, но вместо вспомогательной секущей плоскости используется вспомогательная цилиндрическая поверхность (см. п. 7.5).

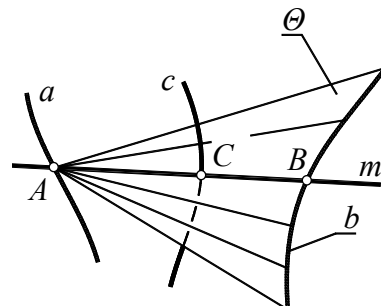


Рис. 6.33

Пример 1. Коническая поверхность образована движением прямолинейной образующей, проходящей через неподвижную точку S и пересекающей криволинейную направляющую m (см. п. 6.2.2). Условие прохождения прямой линии через фиксированную точку пространства “отнимает” у этой прямой две степени свободы. Условие пересечения прямой линии с фиксированной пространственной кривой “отнимает” еще одну степень свободы. Следовательно, у прямолинейной образующей остается только одна степень свободы. Получаем однопараметрическое множество прямых – коническую поверхность.

Пример 2. Наклонный геликоид образован прямой линией l , движущейся параллельно поверхности направляющего конуса Γ и пересекающей две направляющие: цилиндрическую винтовую линию m и ее ось i (см. п. 6.2.7). Условие параллельности прямой линии l и направляющей поверхности Γ означает, что образующая l во всех своих положениях пересекает несобственную кривую g^∞ пересечения поверхности Γ с несобственной плоскостью. Таким образом, наклонный геликоид – линейчатая поверхность с тремя направляющими m, i, g^∞ . В частности, если направляющий конус Γ вырождается в плоскость, то получаем прямой геликоид – поверхность с плоскостью параллелизма.

6.3.3. Эллиптический однополостный гиперboloид

Рассмотрим поверхность, кинематически заданную прямолинейной образующей, скользящей по трем скрещивающимся прямолинейным направляющим a, b, c , не параллельным одной плоскости (рис. 6.34).

Через каждую точку любой направляющей проходит единственная прямолинейная образующая l . Для построения образующей отметим на одной из направляющих (например, на a) произвольную точку A . Найдем точку C пересечения плоскости $\Theta(A, b)$ с направляющей c . Прямая $l=AC$ принадлежит плоскости $\Theta(A, b)$, следовательно, будет пересекать не только направляющие a и c , но и направляющую b – в точке B . При движении точки A по направляющей a образующая l описывает в пространстве линейчатую поверхность, которую называют *эллиптическим однополостным гиперboloидом* (эллиптическим ОГ).

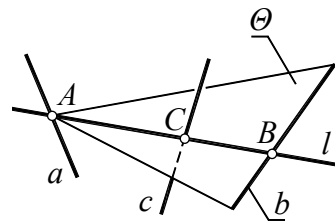


Рис. 6.34

На рис. 6.35 показаны три направляющие a, b, c эллиптического ОГ и три образующие l, m, n , каждая из которых пересекается со всеми тремя направляющими. Образующие l, m, n попарно не пересекаются (скрещиваются). В самом деле, если две из образующих, например, l и m , пересекаются (то есть лежат в одной плоскости), то прямые

a, b, c , пересекающиеся с l и m , также будут лежать в одной плоскости. Это невозможно, так как по условию прямые a, b, c попарно не пересекаются.

Тройки прямых a, b, c и l, m, n вполне “равноправны”. Любую из этих троек можно считать направляющими линейчатой поверхности. В курсе проективной геометрии доказывается, что линейчатая поверхность Φ , определяемая тремя скрещивающимися прямыми a, b, c , тождественна с поверхностью Φ' , определяемой прямыми l, m, n . Отсюда следует важный вывод, что эллиптический ОГ содержит два семейства прямых линий: семейство $a, b, c, \dots$ и семейство $l, m, n, \dots$, причем прямые одного семейства между собой не пересекаются, но каждая прямая одного семейства пересекает все прямые другого семейства.

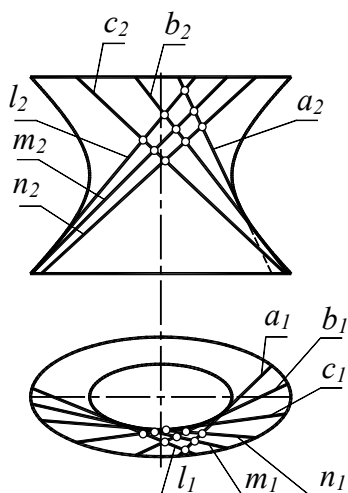


Рис. 6.35

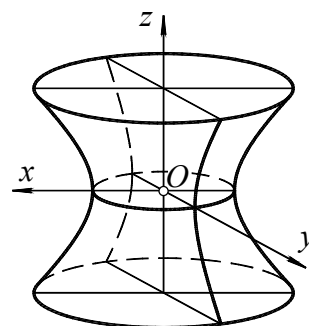
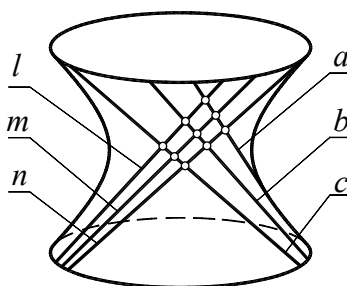


Рис. 6.36

Эллиптический ОГ – центрально-симметричная алгебраическая поверхность второго порядка с тремя взаимно-перпендикулярными плоскостями симметрии XOZ , YOZ , XOY (рис. 6.36). Линии пересечения плоскостей симметрии образуют оси симметрии поверхности; точка O пересечения осей – центр симметрии. Ось Z называют главной осью эллиптического ОГ. В сечении поверхности плоскостями, проходящими через главную ось, возникают гиперболы. В сечении плоскостями, перпендикулярными главной оси, получаем эллипсы. В плоскости XOY располагается эллиптическое горловое сечение поверхности. Плоскость общего положения пересекает поверхность ОГ либо по эллипсу, либо по гиперболе. Касательная плоскость пересекает поверхность ОГ по двум прямолинейным образующим, проходящим через точку касания.

Ранее нами был рассмотрен частный случай эллиптического ОГ – однополостный гиперboloид вращения, образованный вращением прямой линии l вокруг оси i , не пересекающей l (см. п. 6.2.5.1). Горловое сечение такой поверхности – окружность (как и любое другое сечение, перпендикулярное оси i). Прямая линия, которой “разрешено” только вращение вокруг неподвижной оси, обладает лишь одной степенью свободы, поэтому множество образующих l однопараметрично. Положение любой образующей, выделенной на поверхности ОГ вращения, определяется одним параметром (например, угловой координатой точки горловой окружности, через которую проходит выделенная образующая).

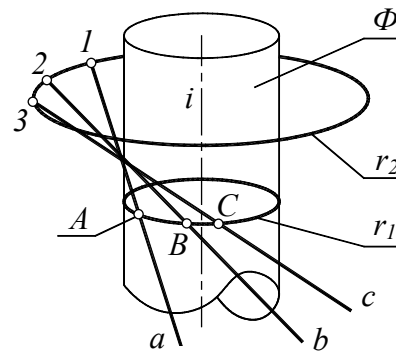


Рис. 6.37

Покажем, что ОГ вращения, как и любая линейчатая поверхность, может быть образован не только вращением прямолинейной образующей, но и общим способом, рассмотренным в п. 6.3.2 – указанием трех направляющих. Зададим в качестве направляющих цилиндр вращения Φ , его нормальное сечение r_1 и окружность r_2 с центром на оси цилиндра i , плоскость которой перпендикулярна i (рис. 6.37). Образующие $a, b, c, \dots$ касаются поверхности Φ и пересекают направляющие r_1 и r_2 в точках $A, B, C, \dots$ и $1, 2, 3, \dots$ соответственно. Три направляющие (поверхность Φ и окружности r_1, r_2) выделяют из ∞^4 прямых пространства однопараметрическое множество прямых $a, b, c, \dots$, которые и образуют ОГ вращения.

6.3.4. Гиперболический параболоид (косая плоскость)

При движении прямолинейной образующей по трем скрещивающимся прямым, не параллельным одной плоскости, формируется поверхность ОГ. В частном случае, когда все три направляющие параллельны одной плоскости, получается поверхность, которую называют *гиперболическим параболоидом* (ГП) или *косой плоскостью*.

На поверхности ГП имеется два однопараметрических семейства прямых линий. Прямые одного семейства между собой не пересекаются; при этом любая прямая одного семейства пересекает все прямые другого семейства. Это свойство (наличие двух семейств образующих) является общим для ГП и ОГ.

Теорема. *Поверхность гиперболического параболоида обладает двумя плоскостями параллелизма: все образующие одного семейства параллельны одной плоскости, а образующие другого семейства – другой.*

Доказательство

Пусть даны три направляющие l, n, m , лежащие в параллельных плоскостях $\Delta, \Delta', \Delta''$ (рис. 6.38). Эти прямые пересекаются с несобственной плоскостью пространства в точках $L^\infty, N^\infty, M^\infty$, лежащих на несобственной прямой c^∞ параллельных плоскостей $\Delta, \Delta', \Delta''$. Построим две произвольные образующие a и b , пересекающиеся с заданными направляющими l, n, m . Эти образующие пересекаются с несобственной плоскостью в точках A^∞, B^∞ . Несобственная прямая k^∞ пересечется в точке T^∞ с несобственной прямой c^∞ , так как k^∞ и c^∞ лежат в одной и той же (несобственной) плоскости.

Рассмотрим два семейства прямых на линейчатой поверхности, заданной направляющими l, n, m . К первому семейству отнесем прямые l, n, m , а ко второму – прямые a и b . Тогда прямую c^∞ следует отнести ко второму семейству, так как она пересекает три прямые l, n, m первого семейства. В свою очередь, прямая k^∞ должна быть отнесена к первому семейству, так как она пересекает три прямые a, b, c^∞ второго семейства.

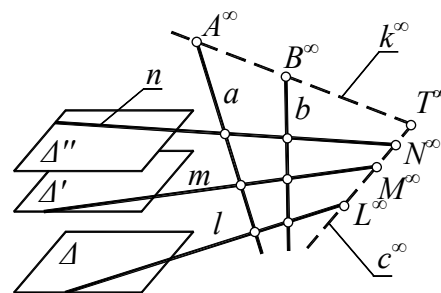


Рис. 6.38

Напомним, что любая прямая одного семейства пересекает все прямые другого семейства (это свойство является общим для ГП и ОГ). Следовательно, *все* прямые первого семейства $l, n, m, k^\infty, \dots$ пересекают несобственную прямую c^∞ , а *все* прямые второго семейства $a, b, c^\infty, \dots$ пересекают несобственную прямую k^∞ . Это и означает, что каждое семейство образующих на поверхности гиперболического параболоида имеет свою плоскость параллелизма. Образующие $l, n, m, k^\infty, \dots$ параллельны плоскости Δ , содержащей несобственную прямую c^∞ , а образующие $a, b, c^\infty, \dots$ параллельны некоторой другой плоскости Θ , содержащей несобственную прямую k^∞ . Теорема доказана.

Если в качестве одной из направляющих взять несобственную прямую, то поверхность ГП может быть задана двумя прямолинейными направляющими и плоскостью

параллелизма (см. п. 6.2.4). В этом случае любая образующая пересекает две заданные направляющие и несобственную прямую плоскости параллелизма, то есть в формировании поверхности фактически участвуют три направляющие, одна из которых – несобственная прямая. Например, в качестве направляющих могут быть приняты либо три прямые a, b, c^∞ , либо две прямые a, b и плоскость параллелизма Θ как “собственный” представитель несобственной прямой c^∞ (см. рис. 6.38).

Гиперболический параболоид – осесимметричная поверхность с двумя плоскостями симметрии XOZ и YOZ (рис. 6.39). Линия пересечения OZ плоскостей симметрии образует ось симметрии поверхности. Точка O пересечения поверхности с осью симметрии OZ называется *седловой точкой*. В сечении гиперболического параболоида плоскостями, перпендикулярными оси симметрии, получаются гиперболы. Плоскость XOY касается поверхности в седловой точке O и пересекает поверхность по гиперболе, распавшейся на две пересекающиеся прямые h и h' .

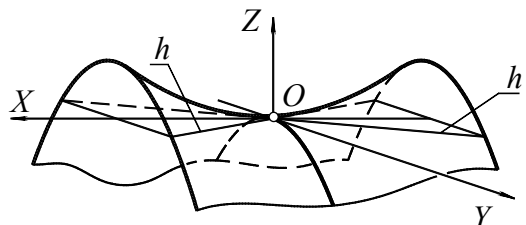


Рис. 6.39

В сечении плоскостями, параллельными какой-либо плоскости симметрии, получаются конгруэнтные параболы, то есть параболы с одинаковым параметром p (см. п. 6.1.1.3). Следовательно, поверхность ГП может быть задана как *поверхность параллельного переноса* – параллельным перемещением параболы m , лежащей в одной из плоскостей симметрии. Вершина параболы m движется (“скользит”) по параболе l , лежащей в другой плоскости симметрии [6].

В качестве упражнения (в рамках факультативных занятий) может быть решена следующая задача.

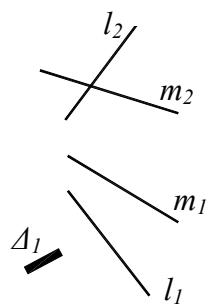


Рис. 6.40

В качестве упражнения (в рамках факультативных занятий) может быть решена следующая задача.

Задача. Гиперболический параболоид задан двумя направляющими прямыми общего положения m, l и плоскостью параллелизма Δ (рис. 6.40). Построить ось симметрии, седловую точку и плоскости симметрии гиперболического параболоида [15].

У К А З А Н И Е. Ось симметрии гиперболического параболоида параллельна линии пересечения его плоскостей параллелизма.

Вопросы для повторения

1. Какую линию называют алгебраической кривой?
2. Перечислить все типы кривых второго порядка и их частные случаи.
3. Дать пример закономерной пространственной кривой линии.
4. Каким способом задается поверхность на чертеже? Что такое определитель поверхности? Какую линию на чертеже называют очерком (очерковой линией) поверхности?
5. Дать определение линейчатой поверхности.
6. Перечислить все поверхности вращения второго порядка.
7. Каков критерий полноты чертежа поверхности?
8. Можно ли считать чертеж каркасной поверхности полным? Если нельзя, то почему?