

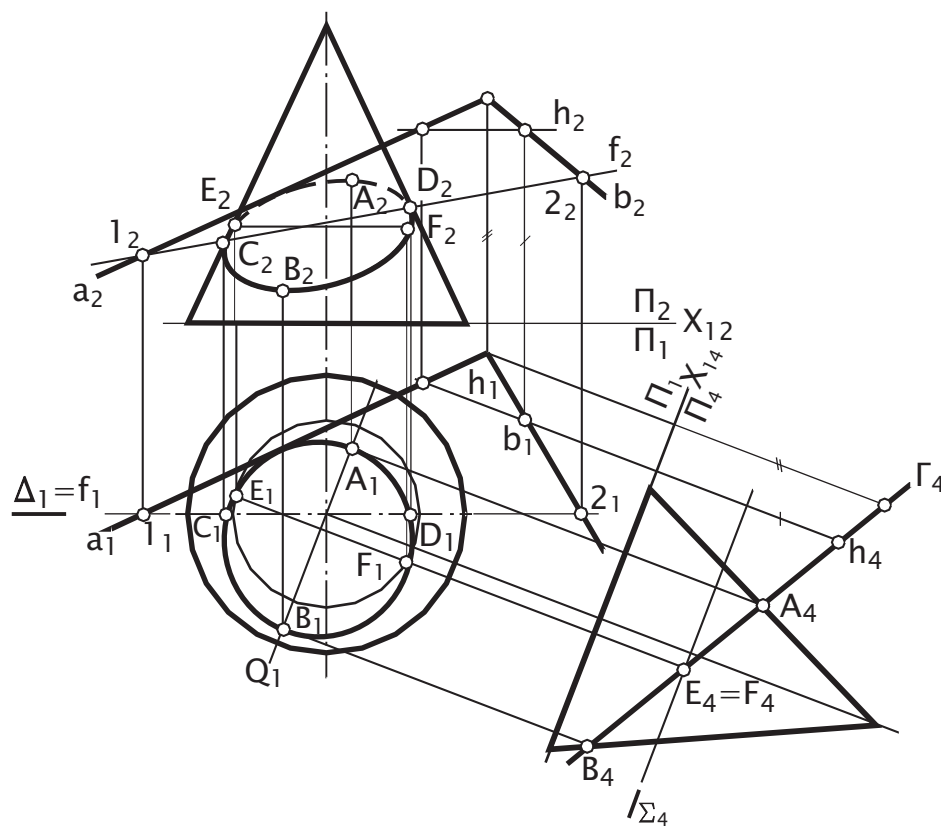
515(07)

НЗ65

Н. П. Сенигов, Т. В. Гусятникова, Н.В. Ларионова,  
В. С. Дукмасова, А. М. Швайгер

## НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие



Челябинск  
2006

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное агентство по образованию  
Южно-Уральский государственный университет  
Кафедра графики

515(07)  
Н365

Н. П. Сенигов, Т. В. Гусятникова, Н. В. Ларионова,  
В. С. Дукмасова, А. М. Швайгер

## **НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

**Учебное пособие**

Рекомендовано региональным научно-ометодическим советом по начертательной геометрии и инженерной графике Урала и Западной Сибири в качестве учебного пособия для студентов технических вузов

Челябинск  
Издательство ЮУрГУ  
2006

УДК 515(075.8)

Н.П. Сенигов, Т.В. Гусятникова, Н.В. Ларионова и др. Начертательная геометрия: Учебное пособие/– Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2006. – 127 с.

Учебное пособие разработано в соответствии с программой, утвержденной Министерством образования и науки Российской Федерации, и выгодно отличается от известных учебников по начертательной геометрии компоновкой материала.

Многие из предложенных в пособии задач рассматриваются как в традиционной постановке, так и с позиций теории множеств. Приводятся алгоритмы решения позиционных задач начертательной геометрии. Для комплексных задач предложена методика проведения анализа, разработки алгоритмов, исследования условий существования и количества возможных решений.

Пособие предназначено для студентов при самостоятельном изучении отдельных глав курса, выполнении индивидуальных заданий, решении контрольно-графических задач и практических домашних заданий.

Ил. 154, список лит. – 15 назв.

Одобрено учебно-методической комиссией архитектурно-строительного факультета.

Рецензенты:

Наук П. Е., зав. кафедрой графики и начертательной геометрии,  
канд. техн. наук, доцент (ТГУНГ),

Морозов С.А., зав. кафедрой начертательной геометрии и машиностроительного черчения, канд. техн. наук, доцент (КГТУ)

## СИМВОЛИКА И ОБОЗНАЧЕНИЯ

### Знаки геометрические

#### *а. Геометрические фигуры*

Ф (фи – прописная буква греческого алфавита) – геометрическая фигура.

А, В, С,... или 1, 2, 3,... (прописные буквы латинского алфавита или арабские цифры) – точки пространства.

а, б, с,... (строчные буквы латинского алфавита) – прямые или кривые линии пространства.

(АВ) – прямая, проходящая через точки А и В.

[АВ) – луч с началом в точке А.

[АВ] – отрезок прямой, ограниченный точками А и В.

|АВ| – длина отрезка [АВ], расстояние от точки А до точки В.

[А,а] – расстояние от точки А до прямой а.

[А,С] – расстояние от точки А до плоскости С.

Г(гамма), Δ(дельта), Λ(ламбда), Ω(омега), Σ(сигма), Ψ(пси) и другие – (прописные буквы греческого алфавита) – поверхности.

<АВС или α, β, γ, ... (строчные буквы греческого алфавита) – углы.

АВС – величина угла в градусах.

П<sub>1</sub> – горизонтальная плоскость проекций,

П<sub>2</sub> – фронтальная плоскость проекций,

П<sub>3</sub> – профильная плоскость проекций,

П<sub>4</sub>, П<sub>5</sub>,... – остальные плоскости проекций.

А<sub>1</sub>, А<sub>2</sub>, А<sub>3</sub> – проекции точки А (горизонтальная, фронтальная, профильная).

l<sub>1</sub>, l<sub>2</sub>, l<sub>3</sub> – проекции линии l (горизонтальная, фронтальная, профильная).

Г<sub>1</sub>(А<sub>1</sub>,В<sub>1</sub>,С<sub>1</sub>), Г<sub>2</sub>(А<sub>2</sub>,В<sub>2</sub>,С<sub>2</sub>), Г<sub>3</sub>(А<sub>3</sub>,В<sub>3</sub>,С<sub>3</sub>) – проекции плоскости Г(АВС), проходящей через точки А, В и С (горизонтальная, фронтальная, профильная).

А<sup>∞</sup> – бесконечно удаленная точка,

а<sup>∞</sup> – бесконечно удаленная прямая,

Г<sup>∞</sup> – бесконечно удаленная плоскость.

#### *б. Отношения между геометрическими фигурами*

|| – параллельность двух геометрических фигур,

⊥ – перпендикулярность,

÷ – скрещивающиеся прямые,

∩ – пересечение геометрических фигур (множеств),

= – равны, совпадают или результат пересечения геометрических фигур (множеств),

≅ – конгруэнтны.

#### *в. Геометрические преобразования*

→ – отображается.

#### **Множества, операции над ними и отношения между множествами**

А, В, С,... – множества.

Ф – пустое множество.

а, б, с,... – элементы множества.

$\{...\}$  – состоит из, например:  $M=\{a, b, c\}$  – множество  $M$ , состоящее из элементов  $a, b, c$  (и только из них).

$M=\{a:P(a)\}$  – множество, состоящее из таких  $a$ , которые обладают свойством  $P$ , например:  $M=\{N:(|ON|=R)\}$  –  $M$  есть множество таких точек  $N$ , расстояние которых до точки  $O$  равно  $R$  (окружность на плоскости или сфера в пространстве).

$\in$  – принадлежность, например:

а)  $A \in l$  – точка  $A$  принадлежит прямой  $l$ ,

б)  $l \ni M$  – прямая  $l$  проходит через точку  $M$  или прямая  $l$  содержит точку  $M$ ,

в)  $\notin$  – не принадлежит.

$\subset$  – включение (являются частью, подмножеством, содержится в..., включает, содержит в себе).

Например:

а)  $a \subset \Gamma$  – прямая  $a$  принадлежит плоскости  $\Gamma$  (понимается в смысле: множество точек прямой  $a$  есть подмножество множества всех точек плоскости  $\Gamma$ ),

б)  $\Gamma \supset a$  – плоскость  $\Gamma$  проходит через прямую  $a$  или плоскость  $\Gamma$  содержит прямую  $a$ .

$\cup$  – объединение множеств, например:

$ABCD = [AB] \cup [BC] \cup [CD]$  – ломаная линия есть объединение отрезков.

$\cap$  – пересечение множеств, например:  $l = \Delta \cap \Gamma$  – прямая  $l$  есть пересечение  $\Delta$  и  $\Gamma$ .

$l \cap m = \Phi$  – пересечением прямых является пустое множество, т. е. прямые параллельны или скрещиваются.

### **Знаки, обозначающие логические операции**

$\wedge$  – соответствует союзу «и».

$\vee$  – соответствует союзу «или».

$\Rightarrow$  – логическое следование, означает «если..., то »

$\Leftrightarrow$  – в том и только в том случае, если... .

## **ВВЕДЕНИЕ**

Геометрия – часть математики, изучающая пространственные формы и отношения тел. В отличие от других естественных наук она изучает объекты реального мира в наиболее абстрактном виде, принимая во внимание только форму и размеры предметов и не учитывая их физических и иных свойств (материал, прочность, массу, цвет, шероховатость поверхностей и т. п.). Предметы, различаемые по этим свойствам, принято называть геометрическими фигурами. К ним относятся точка, прямая, плоскость, окружность, треугольник, круг, шар, куб, параллелепипед, конус, цилиндр и другие. Геометрическую фигуру считают состоящей из точек и определяют как любое множество точек. Множество  $U$  всех рассматриваемых в геометрии точек называют математическим пространством. Любая геометрическая фигура  $\Psi$  является подмножеством пространства:  $\Psi \subset U$ . Если говорят: дана геометрическая фигура, то это означает, что выделено все множество точек, принадлежащих данной фигуре.

Основными неопределяемыми понятиями геометрии являются точка, прямая,

плоскость и расстояние. Понятие «множество» также является основным, неопределяемым, но не только геометрии, а всей математики. Они не могут быть определены с помощью других, более простых понятий. Все эти понятия возникли из непосредственного наблюдения окружающих нас предметов. Точка является результатом пересечения двух прямых, прямой и плоскости, в общем случае – трех плоскостей (например, вершина тетраэдра).

Точка не имеет размеров. Изображение точки дает след острия карандаша на бумаге. Прямая – простейшая линия, имеет одно измерение. Представление о прямой дает натянутая нить, кратчайшее расстояние между двумя точками, линия пересечения двух плоскостей, а изображением ее является след, который оставляет на бумаге острие карандаша, движущегося вдоль края линейки. Плоскость – простейшая поверхность, имеет два измерения. Представление о плоскости дает спокойная поверхность воды в озере, полированная поверхность стола.

В настоящее время геометрия имеет многочисленные разделы. Существуют элементарная, аналитическая, дифференциальная, начертательная, проективная, Лобачевского и другие геометрии.

Начертательная геометрия является тем разделом геометрии, который изучает теоретические основы методов построения изображений (проекций) геометрических фигур на какой-либо поверхности и способы решения различных позиционных и метрических задач, относящихся к этим фигурам, при помощи их изображений. В качестве поверхности, на которой строятся изображения (проекции) предметов, как правило, выбирается плоскость. В специальных разделах начертательной геометрии рассматривается построение изображений на других поверхностях, например, сферической, цилиндрической и т.п. Начертательная геометрия основывается на аксиомах и теоремах элементарной геометрии и инвариантах центрального и параллельного проецирования. Совокупность двух и более взаимосвязанных изображений предмета называется чертежом. Чертеж имеет исключительно большое значение в практической деятельности человека. Он является средством выражения замыслов ученого, конструктора и основным производственным документом, по которому осуществляется строительство зданий и инженерных сооружений, изготовление машин, механизмов и их составных частей. Разумеется, не всякий чертеж может служить этим целям, а такой, который обладает обратимостью, удобоизмеримостью, наглядностью, геометрической равноценностью оригиналу, простотой построения, точностью графических решений. Чертеж является международным графическим языком, понятным любому технически грамотному человеку. Начертательная геометрия – грамматика этого языка.

Для построения изображений (проекций) геометрических фигур начертательная геометрия применяет метод проецирования. Получающиеся при этом чертежи называются проекционными.

Существует два вида проецирования – центральное и параллельное и соответственно два вида проекций – центральные и параллельные. Построение проекций предмета сводится к построению проекций некоторого множества его точек. Поэтому изучение метода проецирования начинают с построения проекций точки.

Знания и навыки, приобретенные при изучении начертательной геометрии, послужат в дальнейшем основой для решения технических задач в инженерной

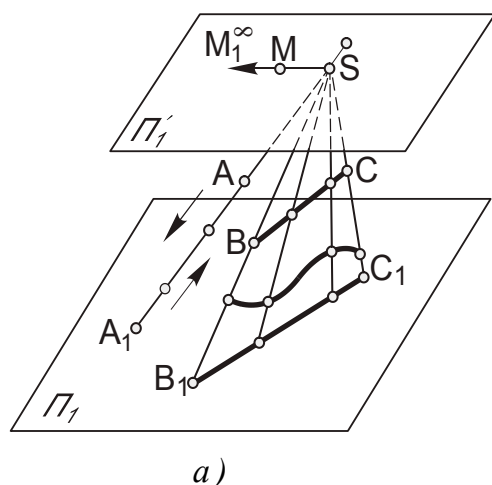
практике. Изучение начертательной геометрии развивает пространственное и логическое мышление, необходимое в любой области инженерной деятельности, и особенно для конструктора и проектировщика.

В настоящем конспекте изложен краткий курс начертательной геометрии с позиций теоретико-множественного представления о геометрических фигурах с использованием символической записи предложений и алгоритмов.

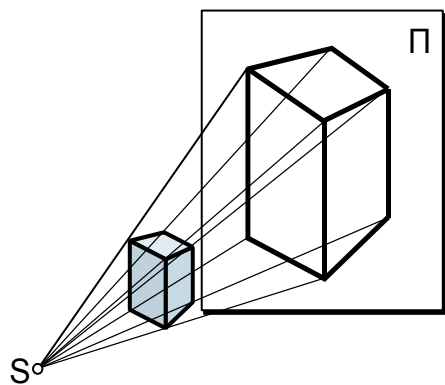
## Глава 1. МЕТОД ПРОЕКЦИРОВАНИЯ

### 1.1. ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПРОЕКЦИРОВАНИЕ. ПОНЯТИЕ О ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Для того чтобы построить проекцию некоторой точки  $A$ , выбирается произвольная плоскость  $\Pi_1$ , называемая плоскостью проекций, и точка  $S$ , не принадлежащая плоскости  $\Pi_1$ , называемая центром проекций (рис. 1). Операция проектирования состоит в том, что через точки  $S$  и  $A$  проводится прямая до пересечения с плоскостью  $\Pi_1$ . Прямая  $SA$  называется проецирующей прямой, а точка  $A_1$ , пересечения проецирующей прямой с плоскостью проекций  $\Pi_1$  – центральной проекцией точки  $A$ . На плоскости  $\Pi_1$ , можно построить центральные проекции всех точек пространства, за исключением тех, которые принадлежат



a)



б)

Рис.1

плоскости  $\Pi_1$ , проходящей через центр проекций  $S$  и параллельной  $\Pi_1$ . В этом случае проецирующие прямые оказываются параллельными плоскости  $\Pi_1$  (прямая  $SM$  на рис.1а) и точек пересечения их с плоскостью в обычном смысле нет. Этот недостаток центрального проектирования устраняется дополнением евклидова пространства так называемыми бесконечно удаленными или несобственными элементами. Пространство Евклида, дополненное несобственными элементами, называется проективным. Сущность введения несобственных элементов заключается в следующем:

1) каждая прямая, кроме множества обыкновенных точек, имеет одну несобственную; несобственная точка прямой есть эквивалент понятия «направление прямой»;

2) параллельные прямые имеют общую несобственную точку (пересекаются в ней);

3) плоскость имеет множество несобственных точек, которые образуют несобственную прямую плоскости;

4) параллельные плоскости имеют общую несобственную прямую (пересекаются по несобственной прямой);

5) множество всех несобственных точек и прямых пространства образует несобственную плоскость.

Дополнение евклидова пространства несобственными элементами позволяет ликвидировать исключения в основных положениях элементарной геометрии и утверждать:

1) каждые две прямые, принадлежащие одной плоскости, всегда пересекаются (в собственной или несобственной точках);

2) две любые плоскости пространства всегда пересекаются (линия пересечения – собственная или несобственная прямая);

3) прямая и плоскость всегда пересекаются (в собственной или несобственной точках).

Следовательно, проекцией точки  $M$ , принадлежащей плоскости  $\Pi_1' \parallel \Pi_1$ , будет несобственная точка  $M_1^\infty$ .

Описанным методом центрального проецирования может быть построена проекция любой точки геометрической фигуры, а следовательно, и проекция самой фигуры. Например, центральной проекцией отрезка  $[BC]$  на плоскости  $\Pi_1$  является множество центральных проекций всех точек отрезка  $[BC]$ – $[B_1C_1]$  (рис. 1а).

При центральном проецировании происходит искажение формы, размеров и некоторых других свойств предмета (рис. 1б). Вместе с тем, нетрудно заметить, что часть свойств сохраняется, например, проекция точки является точкой; проекция прямой – тоже прямая линия; если точка принадлежит прямой, то проекция точки принадлежит проекции той же прямой; точка пересечения прямых проецируется в точку пересечения их проекций. Проекция предмета, построенная методом центрального проецирования, называется перспективой (см. рис. 1б).

Построение проекций заданного объекта называется прямой задачей начертательной геометрии. Нетрудно заметить, что метод центрального проецирования позволяет решать ее однозначно: каждая точка имеет на плоскости  $\Pi_1$  единственную проекцию, так как проецирующая прямая пересекается с плоскостью  $\Pi_1$  в одной точке. Так, точка  $A$  (см. рис. 1а) имеет на плоскости  $\Pi_1$  единственную проекцию  $A_1$ , отрезок  $[BC]$  – единственную проекцию  $[B_1C_1]$ , любая геометрическая фигура – единственную проекцию.

В практической деятельности необходимо уметь не только создавать чертежи, но и читать их, т. е. судить по чертежу однозначно о самом предмете. Определение формы и размеров объекта по его чертежу называется обратной задачей начертательной геометрии. Одна проекция точки не определяет ее положения в пространстве, так как может быть проекцией любой точки, принадлежащей проецирующей прямой. Так, точка  $A_1$  (см. рис. 1а) может быть проекцией любой точки, принадлежащей прямой  $SA$ ;  $[B_1C_1]$  – проекцией любой линии, принадлежащей проецирующей плоскости, определяемой точкой  $S$  и прямой  $(BC)$ . Следовательно, одна проекция объекта не позволяет судить о его форме и размерах, т. е. однопроекционный чертеж является необратимым.

## 1.2. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ

Если за центр проекций принять несобственную точку  $S^\infty$  пространства, то проецирующие прямые  $(AA_1)$ ,  $(BB_1)$ ,... будут параллельными между собой. Для их

построения вместо отсутствующей на чертеже точки  $S^\infty$  задают направление проецирования  $S$  (рис. 2а). Такой вид проецирования называется параллельным, а точки  $A_1, B_1, D_1 \dots$  пересечения проецирующих прямых с плоскостью проекций  $\Pi_1$  – параллельными проекциями точек  $A, B, D, \dots$  пространства. Очевидно, что при параллельном проецировании, так же как и при центральном, каждая точка пространства имеет на плоскости  $\Pi_1$  одну проекцию, но эта проекция не определяет положения точки в пространстве. Следовательно, однопроекционный чертеж, полученный методом параллельного проецирования, тоже необратим (см. рис. 2а).

Различают прямоугольное (ортогональное) и косоугольное параллельное проецирование, в зависимости от угла, образованного направлением проецирования с плоскостью проекций. Параллельное проецирование, являясь частным случаем центрального (центр проекций – несобственная точка  $S^\infty$ , задаваемая направлением  $S$ ), помимо свойств, указанных в предыдущем параграфе, сохраняет еще параллельность прямых и отношение длин их отрезков. Свойства геометрических

фигур, которые сохраняются при данном виде проецирования, называются его инвариантами.

### 1.3 ИНВАРИАНТЫ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ

1. Проекция точки на плоскость есть точка (см. рис. 2а):

$$A \rightarrow A_1.$$

2. Проекция прямой в общем случае прямая:  $l \rightarrow l_1$  (рис. 3); она вырождается в точку, если прямая параллельна направлению проецирования (см. рис. 3):

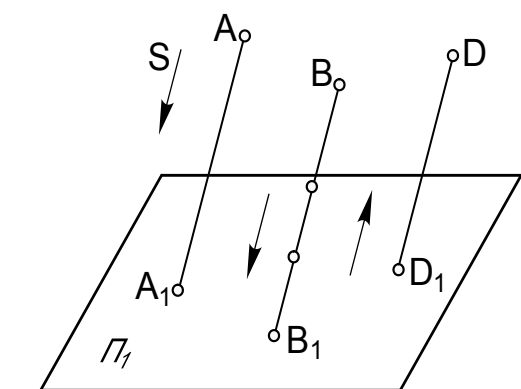
$$l'(MN) \parallel S \Rightarrow l'(MN) \rightarrow l'_1(M_1=N_1).$$

3. Если точка принадлежит линии, то проекция точки принадлежит проекции линии (см. рис. 3):

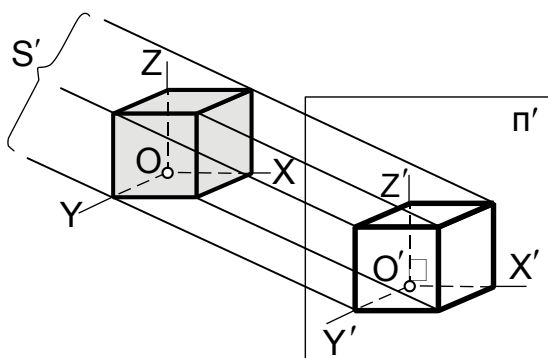
$$A \in l \Rightarrow A_1 \in l_1.$$

**Следствие из пп. 2 и 3.** Для построения проекции прямой достаточно построить проекции двух принадлежащих ей точек (см. рис. 3):

$$L(A \in l \wedge B \in l) \rightarrow l_1(A_1 \wedge B_1 \in l_1).$$



а)



б)

Рис. 2

4. Точка пересечения линий проецируется в точку пересечения их проекций (см. рис. 3):

$$K = a \cap b \Rightarrow K_1 = a_1 \cap b_1.$$

5. Проекции параллельных прямых параллельны (рис. 4):

$$l \parallel l' \Rightarrow l_1 \parallel l'_1.$$

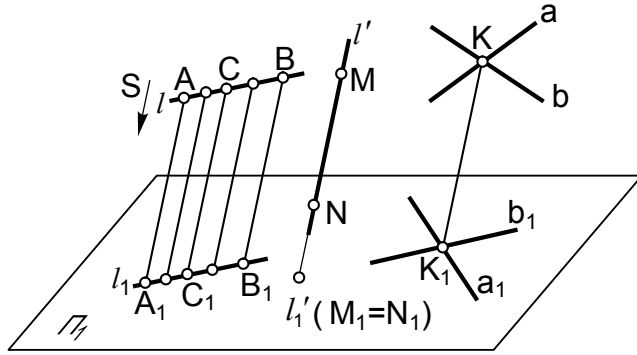


Рис. 3

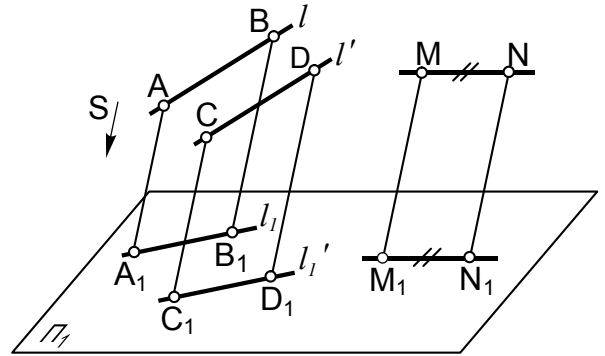


Рис. 4

### Следствия:

1) отношение длин отрезков параллельных прямых равно отношению длин их проекций (рис. 4):

$$[AB] \parallel [CD] \Rightarrow \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A_1B_1|}{|C_1D_1|};$$

2) если точка, принадлежащая отрезку прямой, делит его в некотором отношении, то проекция точки делит проекцию отрезка в том же отношении (рис.3):

$$(C \in [AB]) \wedge \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{|A_1C_1|}{|C_1B_1|} = \frac{m}{n}.$$

6) Если геометрическая фигура  $\Phi$  принадлежит плоскости  $\Sigma$ , параллельной плоскости проекций (например,  $\Pi_1$ ), то проекция этой фигуры на плоскость  $\Pi_1$  конгруэнтна самой фигуре, а величины их равны:

$$(\Phi \subset \Sigma) \wedge (\Sigma \parallel \Pi_1) \Rightarrow \Phi_1 \cong \Phi; |\Phi_1| = |\Phi|.$$

Например, если отрезок  $MN$  параллелен плоскости проекций, то его проекция на данную плоскость конгруэнтна самому отрезку (рис. 4):

$$[MN] \parallel \Pi_1 \Rightarrow [M_1N_1] \cong [MN]; |M_1N_1| = |MN|.$$

7. Проекция геометрической фигуры не изменяется при параллельном переносе плоскости проекций (рис. 5).  $\Pi' // \Pi \Rightarrow \Phi' = \Phi''$

Подумайте, проанализируйте чертежи и докажите справедливость перечисленных инвариантов параллельного проецирования. Рассмотренные свойства (инварианты) параллельного проецирования сохраняются при любом направлении проецирования.

**Примечание.** Метрические характеристики геометрических фигур при параллельном проецировании в общем случае не сохраняются (происходит искажение линейных и угловых величин).

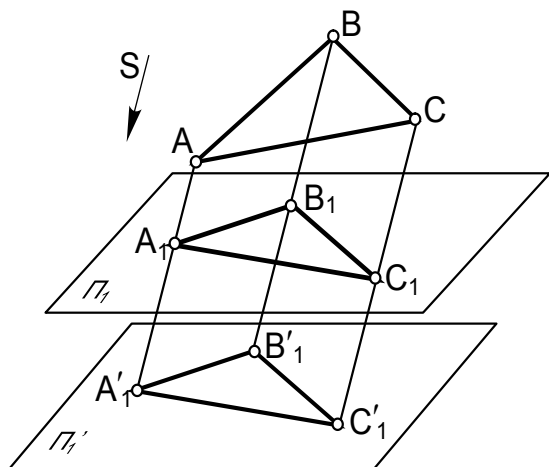


Рис. 5

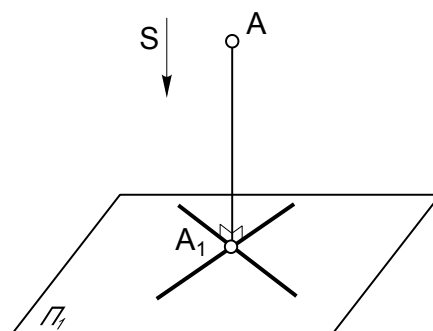


Рис. 6

#### 1.4. ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРОЕКЦИРОВАНИЕ

Если направление проецирования перпендикулярно плоскости проекций, параллельное проецирование называется ортогональным (прямоугольным):

$$s \perp \Pi_1 \Rightarrow (AA_1) \perp \Pi_1.$$

В этом случае проекция  $A_1$ , точки  $A$  называется ортогональной, или прямоугольной (рис. 6). В противном случае проецирование называется косоугольным. Ортогональное проецирование, являясь частным случаем параллельного, значительно упрощает построение проекций геометрических фигур и является основным при выполнении комплексных чертежей технических форм (рис. 7к,л,м).

Рассмотренные в предыдущих параграфах однопроекционные чертежи геометрических фигур являются необратимыми. По ним нельзя мысленно воссоздать пространственную форму и размеры изображенного объекта. Существуют различные способы устранения этого недостатка однопроекционных чертежей в зависимости от принятого вида проецирования. Например, при центральном проецировании точку можно проецировать из двух различных центров (рис. 8а), при параллельном – при помощи двух различных направлений (рис. 8б), при ортогональном – на две пересекающиеся плоскости (рис. 8в). Нетрудно заметить, что в каждом из этих случаев получаются две проекции, однозначно определяющие ее положение в пространстве. Следовательно, обратимый чертеж геометрической фигуры должен содержать не менее двух проекций каждой ее точки.

При построении ортогональных проекций точки на две плоскости проекций  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  (см. рис. 8в) угол между ними принимается равным  $90^\circ$ .

В технике применяются следующие виды обратимых чертежей 1) комплексные, 2) аксонометрические, 3) перспективные, 4) чертежи с числовыми отметками. Все эти способы построения изображений органично дополняют друг друга и используются в соответствии с особенностями конкретных задач и областью их практического применения. В пособии рассматривается первый вид чертежей.

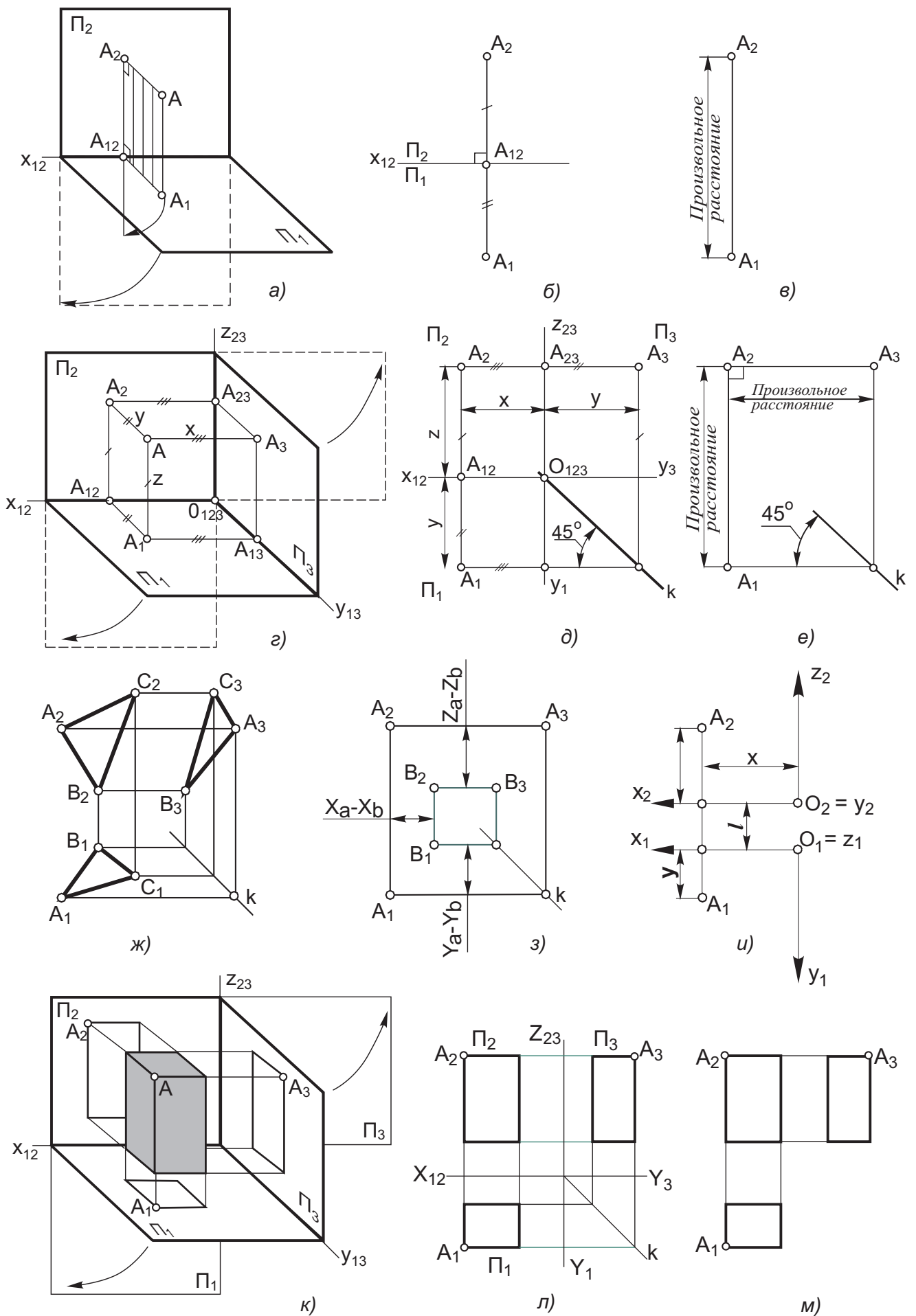


Рис.7

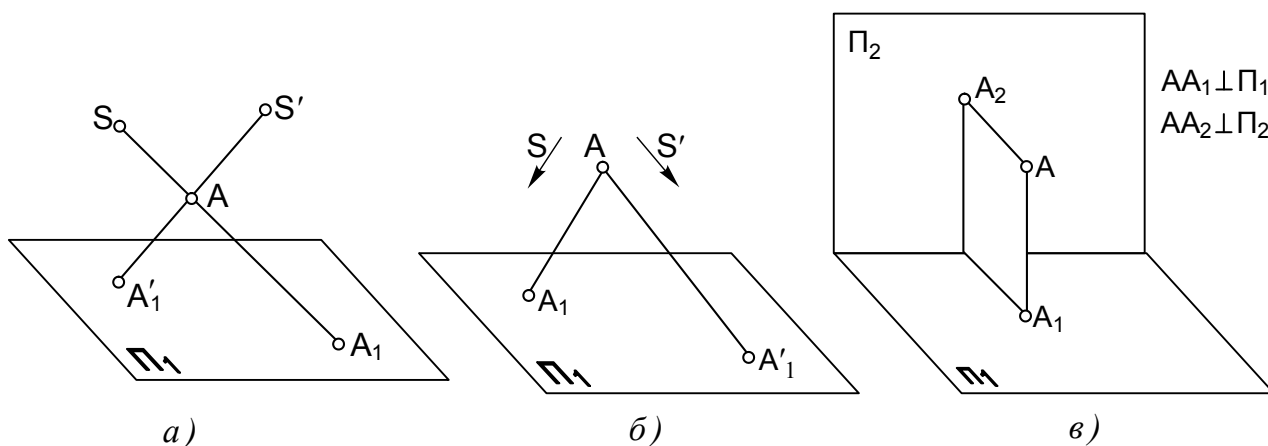


Рис. 8

## Глава 2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧЕРТЕЖИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

### 2.1. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ ТОЧКИ

Рассмотрим систему двух взаимно перпендикулярных плоскостей  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  (рис. 7а). Плоскость  $\Pi_1$  расположим горизонтально и назовем горизонтальной плоскостью проекций, а плоскость  $\Pi_2$ , перпендикулярную  $\Pi_1$ , расположим прямо перед собой и назовем фронтальной плоскостью проекций.

Линия  $x_{12}$  их пересечения называется осью проекций.

Возьмем какую-нибудь точку  $A$  (см. рис. 7а) и построим ее ортогональные проекции  $A_1$  и  $A_2$  соответственно на плоскостях  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ .

Точка  $A_1$  называется горизонтальной проекцией точки  $A$ , а точка  $A_2$  – ее фронтальной проекцией.

Точка  $A$  и ее ортогональные проекции  $A_1$  и  $A_2$  принадлежат одной плоскости  $[(AA_1) \cap (AA_2)]$ , перпендикулярной  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  и оси  $x_{12}$ .

Расстояние  $|AA_1|$  точки  $A$  до плоскости  $\Pi_1$  называется высотой точки  $A$ , а ее расстояние  $|AA_2|$  до плоскости  $\Pi_2$  – глубиной точки  $A$ .

Пространственная модель плоскостей проекций (см. рис. 7а) неудобна для практического использования, так как на плоскости  $\Pi_1$  происходит искажение формы и размеров горизонтальной проекции геометрической фигуры. Для того, чтобы перейти от пространственной модели плоскостей проекций к более простой плоскостной модели, т. е. к плоскому чертежу, совместим плоскость  $\Pi_1$  с плоскостью  $\Pi_2$ , вращая ее вокруг оси  $x_{12}$  в направлении, указанном на рис. 7а стрелками. В результате получим комплексный чертеж точки  $A$ , состоящий из комплекса двух ее проекций  $A_1$  и  $A_2$ , принадлежащих одной прямой, перпендикулярной оси  $x_{12}$  (рис. 7б). Прямая  $(A_1A_2) \perp x_{12}$ , соединяющая две проекции точки на комплексном чертеже, называется линией связи. Полученный таким образом комплексный чертеж точки будет обратимым, так как две ее проекции  $A_1$  и  $A_2$  однозначно определяют положение точки  $A$  в пространстве.

В технической практике для определения формы и размеров предмета применяется принцип внутреннего координирования, при котором задаются размеры предмета, характеризующие форму и взаимное расположение его точек, линий и поверхностей относительно его конструкторских и технологических баз, а не относительно плоскостей проекций. Поэтому в технике принят безосный способ

выполнения чертежей. Плоскости проекций при этом в пространстве не фиксируются, ось проекций становится неопределенной и на чертеже не наносится (рис. 7в). Основанием для этого является то, что проекция геометрической фигуры не изменяется при параллельном переносе плоскости проекций (п. 7, раздел 1.3).

Линия связи  $[A_1A_2]$  на безосном комплексном чертеже проводится вертикально. Если по каким-либо причинам необходимо зафиксировать плоскости проекций  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , то на безосном комплексном чертеже наносится ось проекций  $x_{12}$  перпендикулярно линиям связи в любом удобном месте между горизонтальной и фронтальной проекциями геометрической фигуры.

Во многих случаях для выявления формы и размеров предмета приходится строить его проекции не на две, а на большее количество плоскостей. Большая часть предметов требует построения трех проекций. Для построения третьей проекции предмета применяется профильная плоскость проекций  $\Pi_3$ , перпендикулярная  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  (рис. 7г).

Ортогональная проекция  $A_3$  точки  $A$  на профильную плоскость проекций называется профильной проекцией точки. Расстояние  $|AA_3|$  точки  $A$  до плоскости  $\Pi_3$  называется шириной точки  $A$ .

Очевидно, что две любые проекции точки  $A$  определяют ее положение в пространстве (см. рис. 7г).

Построение комплексного чертежа точки  $A$  (рис. 7д) понятно из чертежа.

По двум заданным проекциям точки можно построить ее третью проекцию, пользуясь условиями связи между проекциями точки на комплексном чертеже (см. рис. 7д):

1) горизонтальная и фронтальная проекции точки принадлежат одной вертикальной линии связи;

2) фронтальная и профильная проекции точки принадлежат одной горизонтальной линии связи;

3) горизонтальная и профильная проекции точки принадлежат ломаной линии связи, вершина которой принадлежит постоянной прямой  $k$  чертежа (прямая  $k$  является биссектрисой прямого угла, образованного ломаной линией связи).

На безосном комплексном чертеже условия связи между проекциями точки сохраняются (рис. 7е).

Если задана система взаимосвязанных точек  $A, B, C$ , то по двум проекциям каждой из них можно построить третью, если на нем имеются три проекции одной из них, например точки  $A$  (рис. 7ж). Точка  $A$  называется при этом базовой.

|                                                                                                                                                                                                  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{ AA_3 }{ e } = x - \text{абсцисса} \quad (\text{широта})$ $\frac{ AA_2 }{e} = y - \text{ордината} \quad (\text{глубина})$ $\frac{ AA_1 }{e} = z - \text{апplikата} \quad (\text{высота})$ |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Если принять плоскости проекций  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$  за координатные плоскости декартовой системы координат, то длины отрезков, выражающих расстояния точки  $A$  до плоскости проекций, отнесенные к единице длины  $|e|$ , будут координатами точки  $A$  (см. рис. 7з, д и формулы слева).

В технических чертежах за единицу длины принимают  $|e|=1\text{мм}$ . По координатам точки  $A(xyz)$  можно

построить ее проекции, а по заданным проекциям определить ее координаты (рис. 7д).

При безосном способе изображения координаты точки становятся неопределенными. В этом случае для построения комплексного чертежа точки можно воспользоваться разностями координат, которые не зависят от положения плоскостей проекций (рис. 7з), или построить на нем проекции координатных осей [11] и отнести точку к системе координат  $Oxyz$  (рис. 7и).

### **Выводы**

1. Совокупность двух и более взаимосвязанных ортогональных проекций геометрической фигуры, расположенных на одной плоскости чертежа, называется комплексным чертежом.

2. Обратимый комплексный чертеж должен содержать не менее двух проекций геометрической фигуры.

3. Для того, чтобы чертеж геометрической фигуры был обратим, он должен содержать столько проекций, чтобы каждая ее точка имела не менее двух проекций.

## **2.2 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧЕРТЕЖИ ЛИНИЙ**

Линии среди геометрических фигур занимают особое положение. Помимо служебного применения при выполнении изображений и различных графических построений, они позволяют решать многие научные и инженерные задачи. Например, с помощью линий можно создать наглядные модели многих процессов, установить и исследовать функциональную зависимость между различными параметрами, конструировать поверхности технических форм и т. п. Линию можно представить либо как границу поверхности, либо как след непрерывно движущейся в пространстве точки. Так как положение точки на линии определяется одной непрерывно меняющейся величиной (одним параметром), линия является однопараметрическим (одномерным) непрерывным множеством точек. Для начертательной геометрии второй, так называемый кинематический, способ представления линии является более удобным. Существуют прямые, ломаные и кривые линии.

### **2.2.1. Комплексные чертежи прямых линий**

Прямая есть такое множество точек, свойства которого определяются известной аксиомой прямой линии: «через любые две различные точки проходит одна и только одна прямая» и теоремой, которая следует из аксиомы прямой: «две различные прямые могут иметь не более одной общей точки».

#### ***Прямая общего положения***

Прямая может занимать в пространстве различные положения относительно плоскостей проекций. Прямая, не параллельная и не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций, называется прямой общего положения.

Проекцией прямой линии в общем случае является прямая (п. 2, раздел 1.3). Очевидно, что в системе плоскостей проекций  $\Pi_2/\Pi_1$  прямая  $l$  будет иметь две проекции:  $l_1$  на  $\Pi_1$  и  $l_2$  на  $\Pi_2$  (рис. 9а, б).

Две проекции прямой общего положения определяют ее положение в пространстве, так как каждая точка прямой имеет две проекции (см. рис. 9а, б).

Для построения проекций прямой достаточно построить проекции двух ее

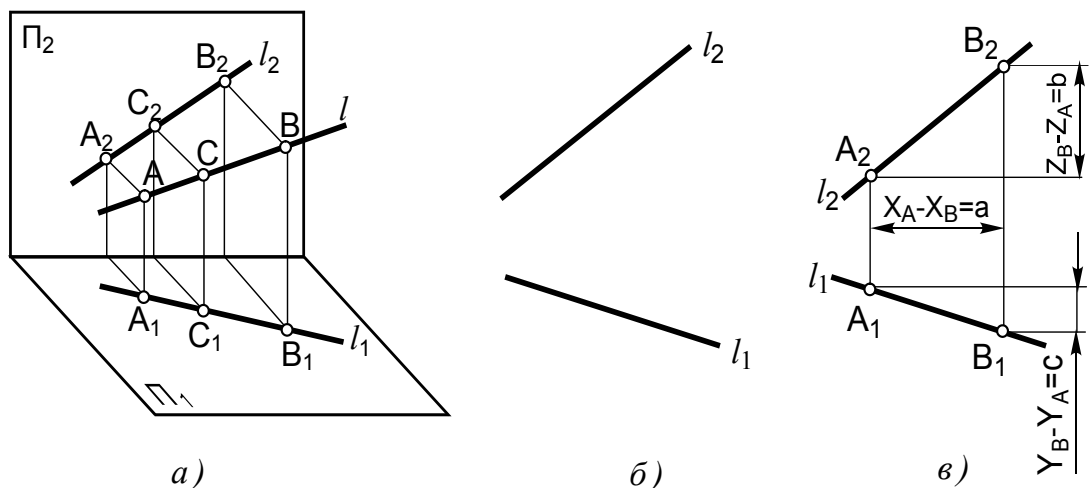


Рис. 9

точек (рис. 9в) на основании следствия из пп. 2 и 3, разд. 1.3.

Разность координат двух несовпадающих точек A и B, принадлежащих прямой l общего положения, не равна нулю (рис. 9в):

$$\begin{aligned} X_A - X_B &= a \neq 0, \\ Y_B - Y_A &= c \neq 0, \\ Z_B - Z_A &= b \neq 0. \end{aligned}$$

Множество точек, состоящее из двух различных точек прямой и всех точек, находящихся между ними, называется отрезком прямой.

**Определение длины отрезка прямой способом прямоугольного треугольника**

Построим ортогональную проекцию  $[A_1B_1]$  отрезка AB на плоскость  $\Pi_1$ .

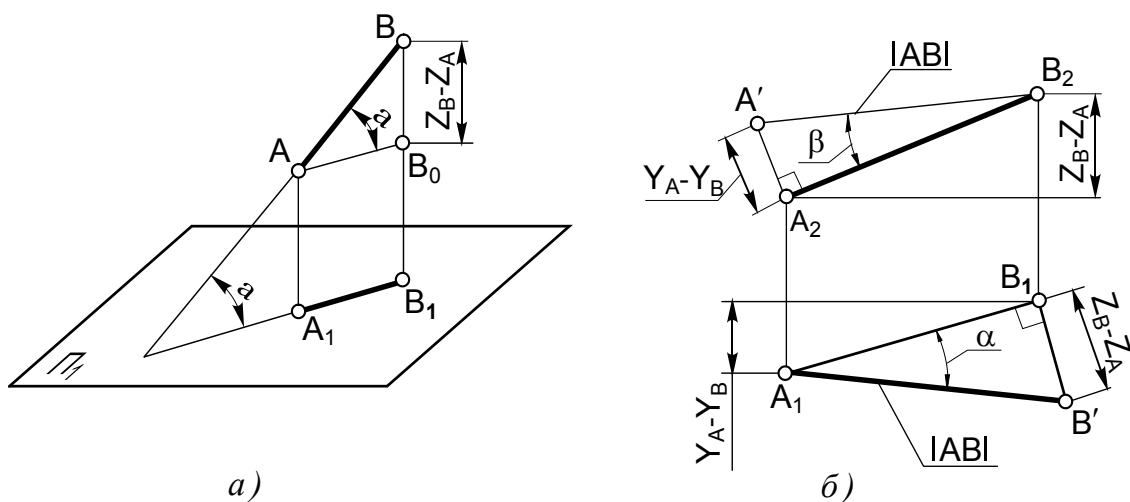


Рис. 10

Проведем  $[AB_0] \parallel [A_1B_1]$ . Треугольник  $ABB_0$  – прямоугольный. Длина одного его катета равна длине горизонтальной проекции отрезка  $[AB]$ , а второго – разности высот концов отрезка  $[AB]$ :

$$|AB_0| = |A_1B_1|; |BB_0| = |BB_1| - |AA_1| = Z_B - Z_A.$$

Отрезок  $[AB]$  является гипотенузой этого треугольника, а угол  $\alpha$  – углом наклона

отрезка  $[AB]$  к горизонтальной плоскости проекций. Треугольник, конгруэнтный данному, можно построить на комплексном чертеже (рис. 10б).

Приняв за один катет  $[A_1B_1]$ , строим прямоугольный треугольник, вторым катетом которого является отрезок  $[B_1B'] = Z_B - Z_A$ . Длина гипотенузы  $[A_1B']$  этого треугольника равна  $|AB|$ , а угол  $\alpha = \angle B_1A_1B'$  – величине угла наклона его к плоскости  $\Pi_1$ . Длина отрезка может быть определена как длина гипотенузы прямоугольного треугольника, одним катетом которого является фронтальная проекция  $[A_2B_2]$ , а вторым – разность глубин точек  $A$  и  $B$  (это построение также показано на рис. 10б). Докажите это самостоятельно.

Подумайте, что определяет обозначенный на рисунке угол  $\beta$ .

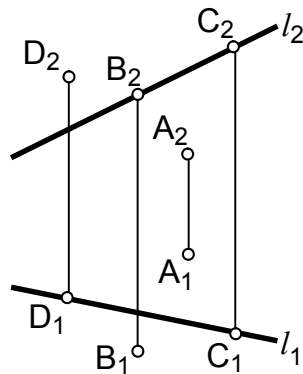


Рис. 11

### Принадлежность точки прямой линии

Точка может принадлежать прямой и находиться вне прямой. Если точка  $C$  (рис. 11) принадлежит прямой  $l$ , то проекции  $C_1$  и  $C_2$  точки  $C$  принадлежат одноименным проекциям прямой  $l$ :

$$C \in l \Rightarrow C_1 \in l_1 \wedge C_2 \in l_2$$

Если точка не принадлежит прямой  $l$ , то, по крайней мере, одна из ее проекций не принадлежит одноименной проекции прямой. На рис. 11 точки  $A$ ,  $B$  и  $D$  не принадлежат прямой  $l$ , причем точка  $D$  расположена над прямой, а точка  $B$  – перед прямой.

### Прямые частного положения

#### 1. Прямые уровня

Прямая, параллельная одной из плоскостей проекций, называется прямой уровня.

**Горизонталь** – прямая, параллельная плоскости  $\Pi_1$  (рис. 12).

Горизонталь обозначается буквой  $h$ . Ее горизонтальная проекция  $h_1$ , занимает положение, соответствующее положению самой горизонтали в пространстве, а фронтальная проекция перпендикулярна линиям связи, так как  $Z_B - Z_A = 0$ .

Отрезок  $[AB]$  горизонтали  $h$  и угол  $\beta$  наклона ее к плоскости  $\Pi_2$  проецируются на плоскость  $\Pi_1$  без искажения.

Отрезок  $[AB]$  горизонтали  $h$  и угол  $\beta$  наклона ее к плоскости  $\Pi_2$  проецируются на плоскость  $\Pi_1$  без искажения.

**Фронталь** – прямая, параллельная  $\Pi_2$  (рис. 13).

Фронталь обозначается буквой  $f$ , ее фронтальная проекция  $f_2$  занимает положение, соответствующее положению самой фронтالي в пространстве, а ее горизонтальная проекция перпендикулярна линиям связи, так как  $Y_B - Y_A = 0$ . Отрезок  $[AB]$  фронтالي  $f$  и угол  $\alpha$  наклона ее к плоскости  $\Pi_1$  проецируются на плоскость  $\Pi_2$  без искажения.

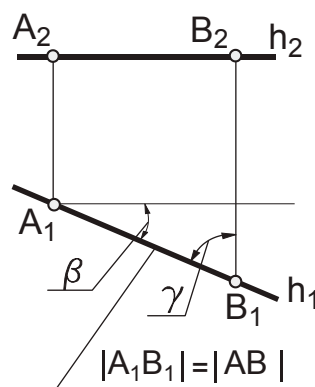
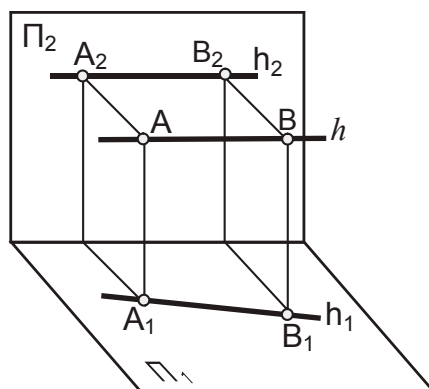


Рис. 12

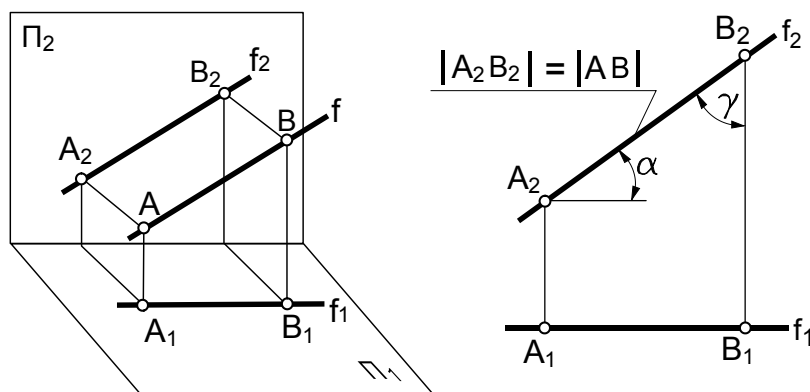


Рис. 13

и той же вертикальной линии связи, так как  $X_A - X_B = 0$ . Отрезок  $[AB]$  профильной прямой  $p$  и углы  $\alpha$  и  $\beta$  наклона ее соответственно к плоскостям  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  проецируются на плоскость  $\Pi_3$  без искажения.

Положение горизонтали  $h$  и фронтали  $f$  в пространстве определяется заданием на чертеже двух их проекций  $h_1$  и  $h_2$ ,  $f_1$  и  $f_2$ .

Две проекции  $p_1$  и  $p_2$  профильной прямой  $p$  не определяют ее положение в пространстве, так как этим проекциям соответствует бесчисленное множество прямых, принадлежащих профильной плоскости, проходящей через заданную

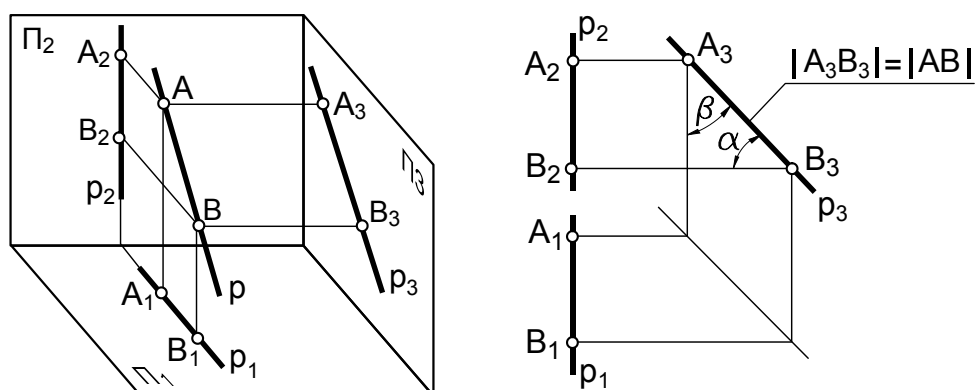


Рис. 14

прямую. По аналогии с этим горизонталь не определяется двумя своими проекциями  $h_2$ ,  $h_3$ , а фронталь –  $f_1$  и  $f_3$ . Поэтому для определения прямой  $p$  необходимо задать две проекции  $p_2$ ,  $p_3$  или  $p_1$ ,  $p_3$  или же задать на прямой  $p$  две точки  $A$  и  $B$  (см. рис.14) –  $p_2(A_2B_2)$  и  $p_1(A_1B_1)$ . Следовательно, двухпроекционный комплексный чертеж линии уровня обратим только в том случае, если он содержит проекцию прямой на параллельную ей плоскость проекции.

## 2. Проецирующие прямые

Прямая, перпендикулярная какой-либо плоскости проекций, называется проецирующей прямой.

**Горизонтально** проецирующая прямая – прямая, перпендикулярная  $\Pi_1$  (рис.15). Горизонтальная проекция этой прямой вырождается в точку, а фронтальная проекция  $m_2(A_2B_2)$  параллельна линиям связи. Горизонтально проецирующая прямая параллельна одновременно  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$ , следовательно,

**Профильная прямая** – это прямая, параллельная плоскости  $\Pi_3$  (рис. 14).

Профильная прямая обозначается буквой  $p$ . Ее профильная проекция занимает положение, соответствующее положению в пространстве самой профильной прямой, а горизонтальная и фронтальная проекции совпадают с одной

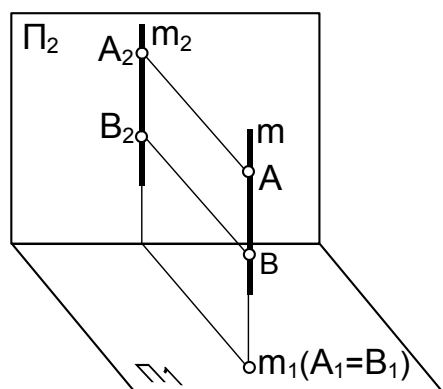


Рис. 15

**Профильно** проецирующая прямая – прямая, перпендикулярная  $\Pi_3$  (рис. 17).

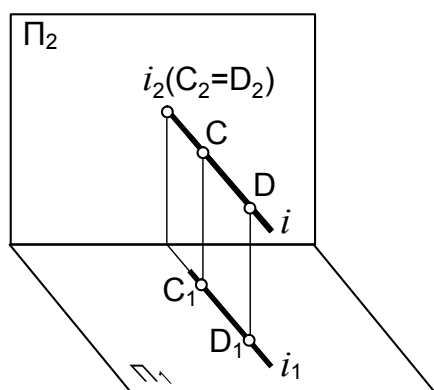


Рис. 16

перпендикулярна данной прямой. В соответствии с этим точки A и B, принадлежащие прямой  $m \perp \Pi_1$  называются горизонтально конкурирующими

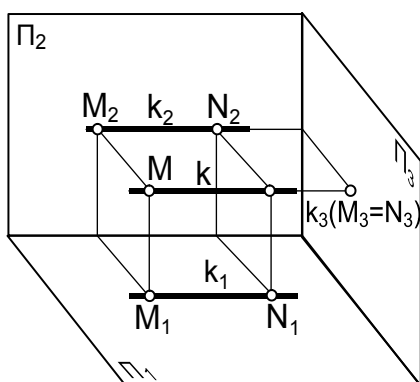


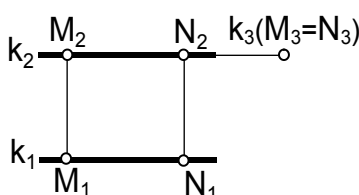
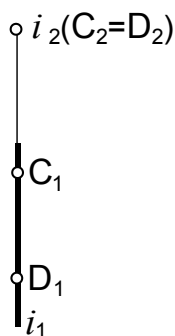
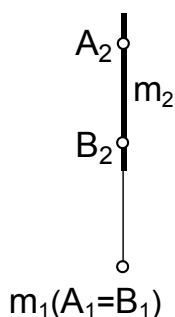
Рис. 17

(рис.15), точки C и D, принадлежащие прямой  $i \perp \Pi_2$ , фронтально конкурирующими (рис. 16), точки M и N, принадлежащие прямой  $k \perp \Pi_3$ , профильно конкурирующими (рис. 17). Конкуренция точек рассматривается в смысле расстояния их до соответствующей плоскости проекций. Например, сравнивая фронтальные проекции  $A_2$  и  $B_2$  точек A и B (см. рис.15), видим, что точка A расположена выше точки B. Сравнивая горизонтальные проекции  $C_1$  и  $D_1$  точек C и D (рис.16), видим, что точка D расположена перед точкой C (по отношению к наблюдателю, стоящему перед плоскостью  $\Pi_2$ ). По аналогии точка M дальше от  $\Pi_3$ , чем точка N (рис. 17).

Конкурирующие точки применяются для решения вопроса о том, какая из двух скрещивающихся прямых располагается над другой и какая перед другой, и в конечном счете для определения видимости проекций геометрических фигур на комплексных чертежах.

$$|A_2B_2| = |A_3B_3| = |AB|.$$

**Фронтально** проецирующая прямая – прямая, перпендикулярная  $\Pi_2$  (рис. 16). Фронтальная проекция этой прямой вырождается в точку, а горизонтальная проекция  $i_1(C_1D_1)$  параллельна линиям связи. Фронтально проецирующая прямая параллельна одновременно плоскостям  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$ , следовательно,  $|C_1D_1| = |C_3D_3| = |CD|$ .



## 2.2.2. Комплексные чертежи плоских и пространственных ломаных

Ломаной  $ABCDE$  называется объединение отрезков  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$ ,  $[DE]$  таких, что конец каждого отрезка (кроме последнего) является началом следующего и смежные отрезки не лежат на одной прямой (рис. 18).

Каждый из отрезков, составляющих ломаную, называется ее звеном, точки  $B$ ,  $C$ ,  $D$  – вершинами ломаной, точки  $A$ ,  $E$  – концами ломаной. Если  $A=E$  – ломаная замкнутая. Если все звенья ломаной принадлежат одной плоскости (рис. 18а,б), она называется плоской, в противном случае – пространственной (рис. 18в).

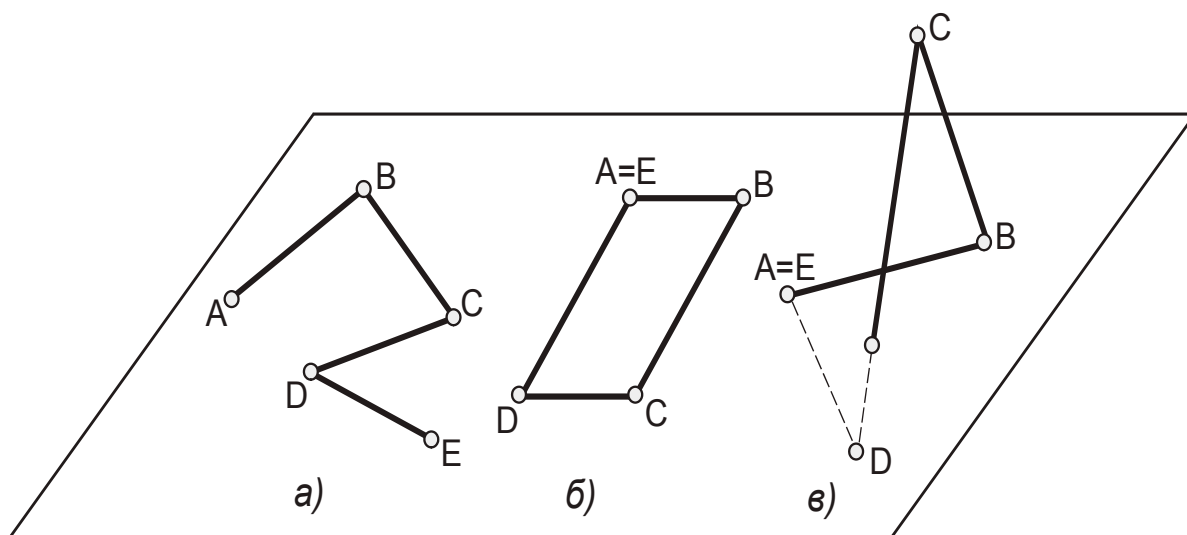


Рис. 18

Для построения проекций ломаной (как плоской, так и пространственной) достаточно построить проекции всех ее вершин (рис. 19а,б – плоские ломаные, рис. 19в – пространственная ломаная).

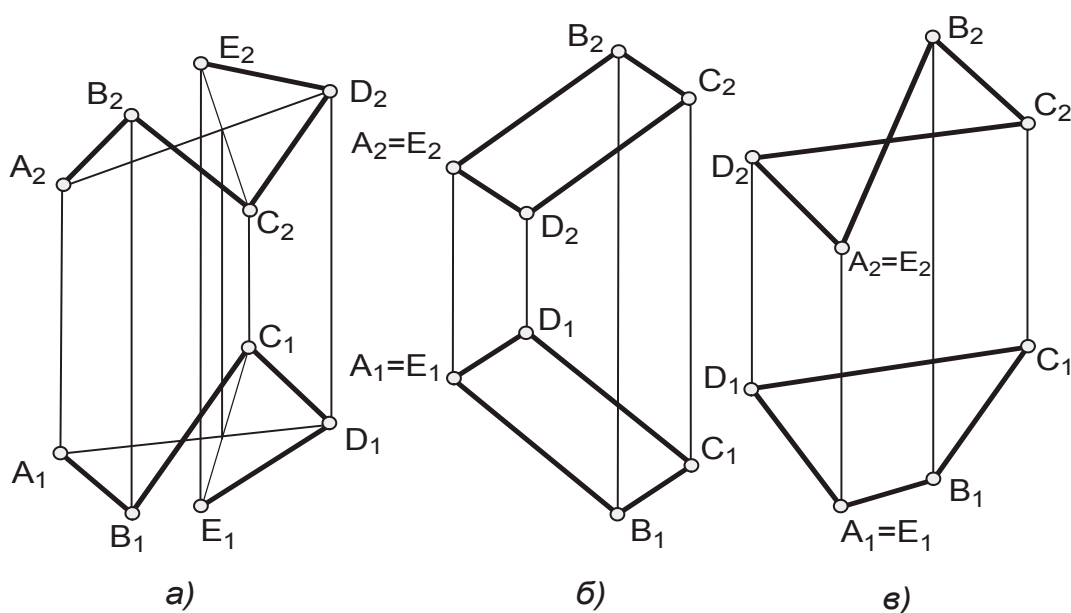


Рис. 19

### 2.2.3 Комплексные чертежи кривых линий

#### Общие определения и понятия

Все не прямые и не ломаные линии называются кривыми. Кривые линии разделяются на два вида:

**1) плоские кривые**, т. е. такие, все точки которых располагаются в одной плоскости;

**2) пространственные кривые** (линии двойной кривизны), т. е. такие, точки которых не принадлежат одной плоскости.

Если закон перемещения точки может быть выражен аналитически в виде уравнения, то образующая при этом линия называется закономерной, в противном случае – не закономерной, или графической. Закономерные кривые линии делятся на алгебраические, определяемые алгебраическими уравнениями (эллипс, парабола, гипербола и др.), и трансцендентные, определяемые трансцендентными уравнениями (синусоида, циклоида, спираль Архимеда и др.).

Важной характеристикой алгебраической кривой является ее порядок (трансцендентные кривые порядка не имеют). С алгебраической точки зрения порядок кривой линии равен степени ее уравнения, с геометрической – наибольшему числу точек пересечения кривой с прямой линией для плоских кривых и с произвольной плоскостью для пространственных. В число точек пересечения включаются как действительные точки, так и совпавшие и мнимые. Например,

эллипс – кривая второго порядка, имеет уравнение  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  второй степени, пересекается с прямой максимум в двух точках.

Прямую линию, имеющую уравнение первой степени  $ax+by+c=0$  (с произвольной прямой пересекается в одной точке), можно рассматривать как линию первого порядка. Кривыми второго порядка являются также окружность, парабола, гипербола. Примерами кривых третьего порядка могут служить строфоида, Декартов лист, циссоида; четвертого – лемниската Бернулли, кардиоида, улитка Паскаля [12].

Начертательная геометрия изучает кривые линии и различные операции с ними по их проекциям на комплексном чертеже. Построение проекций кривой линии сводится к построению проекций ряда ее точек. В общем случае проекции кривой линии являются также кривыми линиями. Кривая линия определяется двумя своими проекциями на комплексном чертеже. Построение проекций кривой линии сводится к построению проекций ряда ее точек. В общем случае проекции кривой линии являются также кривыми линиями. Кривая линия определяется двумя своими проекциями

#### Секущая, касательная, нормаль

Прямая, пересекающая кривую линию в одной, двух и более точках, называется секущей (прямая  $m$  на рис. 20). Касательной прямой  $t$  в данной точке  $A$  линии  $l$  называется предел, к которому стремится секущая ( $AB$ ), когда точка  $B$ , оставаясь на линии  $l$ , стремится к точке  $A$  (рис. 20,21). Касательная к прямой линии согласно этому определению есть сама прямая. Нормалью к кривой  $l$  называется прямая  $n$ , перпендикулярная к  $t$  и проходящая через точку касания  $A$ .

## Проекционные свойства плоских кривых линий

1. Секущая  $m$  к кривой  $l$  проектируется в секущую  $m_1$  к проекции  $l_1$  (рис. 21).
2. Касательная  $t$  к кривой  $l$  проектируется в касательную  $t_1$  к проекции  $l_1$ .

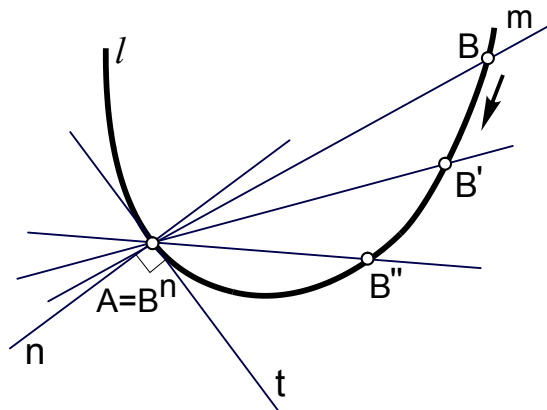


Рис. 20

3. Бесконечно удаленные точки кривой проектируются в бесконечно удаленные проекции ее точек.

4. Число точек пересечения кривых равно числу точек пересечения их проекций (разд. 1.3).

На основании перечисленных свойств можно сделать выводы:

- 1) порядок плоской алгебраической кривой при проектировании не изменяется;
- 2) эллипс может спроецироваться в эллипс или окружность, окружность – в окружность или эллипс, парабола – в параболу, гипербола – в гиперболу.

Вышеперечисленные проекционные свойства плоских кривых линий вытекают из инвариантов параллельного проектирования (гл. 1)

### Кривые второго порядка

Кривая второго порядка имеет уравнение второй степени в декартовой системе координат. С прямой линией пересекается в двух точках (действительных, совпавших или мнимых).

**Эллипс** – геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух заданных точек (фокусов) – величина постоянная, равная  $|2a|$  (длине большой оси эллипса). Эллипс не имеет несобственных точек.

**Парабола** – геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки  $F$  (фокуса) и данной прямой  $d$  (директриссы). Парабола имеет одну несобственную точку.

**Гипербола** – геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух заданных точек (фокусов) – величина постоянная, равная  $|2a|$  (расстоянию между вершинами гиперболы). Гипербола имеет две несобственные точки, по одной на каждой асимптоте.

Кривые второго порядка – эллипс, окружность, парабола и гипербола – могут быть получены при пересечении конической поверхности плоскостью и поэтому называются коническими сечениями.

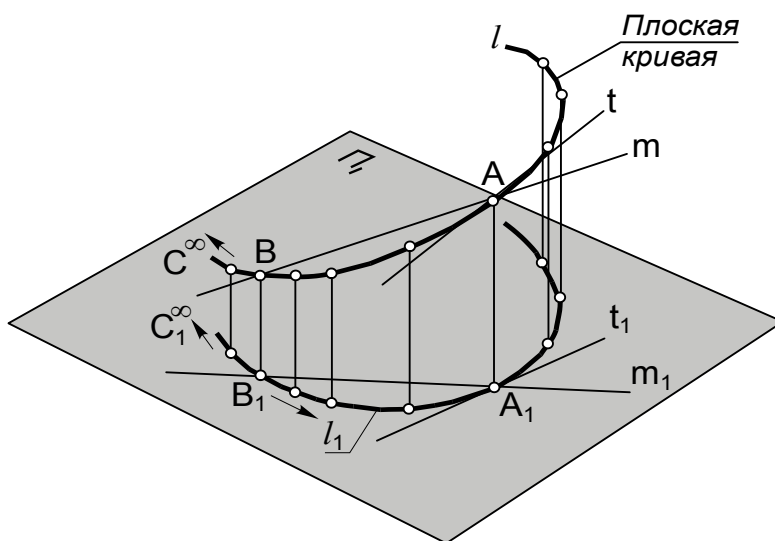


Рис. 21

## Пространственные кривые линии

Из закономерных пространственных кривых наибольшее практическое применение находят винтовые линии, в частности, цилиндрическая винтовая линия (рис. 22). Такие линии являются основным конструктивным элементом резьбовых крепежных деталей (винты, болты, гайки, шпильки и др.), ходовых резьб (домкраты, винтовые ковочные прессы и др.)

Цилиндрическая винтовая линия представляет собой пространственную кривую, описываемую точкой, совершающей равномерно-поступательное движение по образующей цилиндра вращения, которая в свою очередь вращается вокруг оси цилиндра с постоянной угловой скоростью (см. рис. 22). Величина  $P$ , на которую поднимается точка за один оборот образующей, называется шагом винтовой линии.

Горизонтальная проекция винтовой линии является окружностью, а фронтальная –

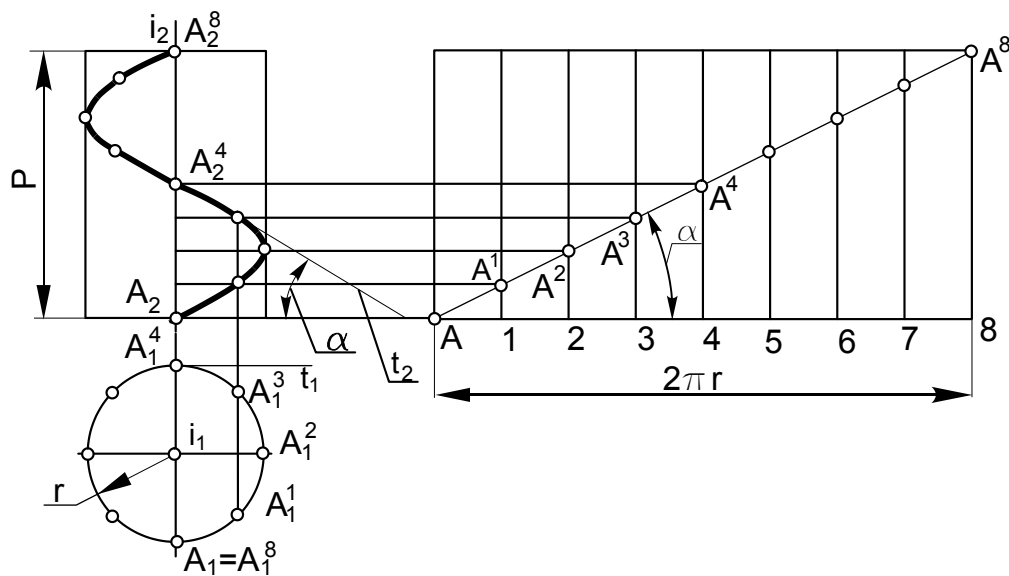


Рис. 22

синусоидой. На развертке цилиндрической поверхности винтовая линия изобразится в виде прямой.

Угол  $\alpha$  называется углом подъема винтовой линии. Этот угол равен углу наклона касательной  $t$  в любой точке винтовой линии к плоскости, перпендикулярной ее оси. Цилиндрическая винтовая линия, подобно прямой и окружности, обладает свойством сдвигаемости.

Свойство сдвигаемости состоит в том, что каждый отрезок линии может сдвигаться вдоль нее, не подвергаясь деформации. Это свойство винтовой линии лежит в основе работы винтовых пар (винт-гайка). Винтовая линия является геодезической на цилиндрической поверхности.

Геодезической называется линия, принадлежащая поверхности и кратчайшая из всех линий, которые можно провести между двумя точками поверхности. Кроме цилиндрической винтовой линии, геодезическими линиями также являются прямая на плоскости, окружность большого круга на сфере и др. Геодезическая линия изображается на развертке поверхности в виде прямой линии.

## 2.3 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧЕРТЕЖИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Все поверхности можно разделить на плоские (плоскости), многогранные и кривые. Простейшей поверхностью является плоскость.

### 2.3.1. Комплексные чертежи плоскостей

#### *Плоскость общего положения*

Плоскость есть такое множество точек, основные свойства которого выражаются следующими аксиомами:

1. Через три точки, не принадлежащие одной прямой, проходит одна и только одна плоскость. **Следствия:**

1) через прямую и не принадлежащую ей точку можно провести одну и только одну плоскость;

2) через две пересекающиеся прямые можно провести одну и только одну плоскость;

3) через две различные параллельные прямые можно провести только одну плоскость.

2. Прямая, проходящая через любые две различные точки плоскости, принадлежит этой плоскости (если две точки прямой принадлежат плоскости, то и все точки этой прямой принадлежат плоскости).

3. Если две различные плоскости имеют общую точку, то их пересечение есть прямая (две плоскости пересекаются по прямой линии).

Плоскость может занимать различные положения относительно плоскостей проекций. Плоскость, не параллельная и не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций, называется плоскостью общего положения. Задать плоскость на чертеже проекциями множества ее точек практически невозможно, т. к. проекции точек плоскости покроют плоскости проекций и мы не получим на них никаких изображений. Поэтому плоскость на чертеже задают проекциями таких принадлежащих ей геометрических фигур, которые однозначно определяют ее положение в пространстве и позволяют построить любую ее точку.

На основании аксиомы 1 и следствий из нее плоскость общего положения

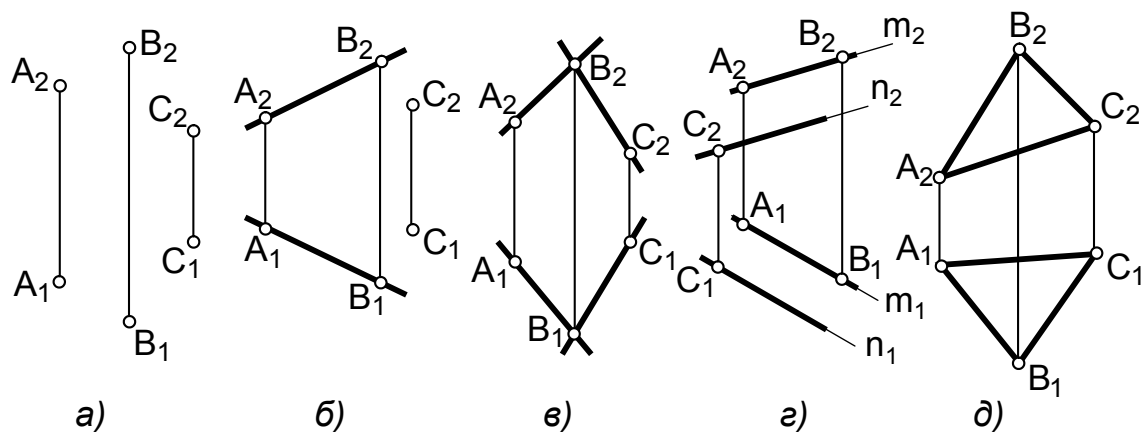


Рис. 23

на чертеже можно задать (рис. 23 а,б,в,г,д):

- а) проекциями трех точек, не принадлежащих одной прямой линии;
- б) проекциями прямой и не принадлежащей ей точки;
- в) проекциями двух пересекающихся прямых;
- г) проекциями двух различных параллельных прямых;
- д) проекциями плоской фигуры.

### **Принадлежность прямой и точки плоскости.**

#### **Главные линии плоскости.**

#### **Проекции плоских фигур**

Построение проекций точки и прямой, принадлежащих данной плоскости общего положения, выполняется на основании следующих аксиом:

1) через любые две различные точки проходит одна и только одна прямая;

2) если две точки прямой принадлежат плоскости, то и все точки этой прямой принадлежат данной плоскости (или прямая, проходящая через любые две различные точки плоскости, принадлежит этой плоскости).

Очевидно, что точка, принадлежащая прямой, расположенной в плоскости, принадлежит этой плоскости. Следовательно, точка М (рис.24) принадлежит плоскости

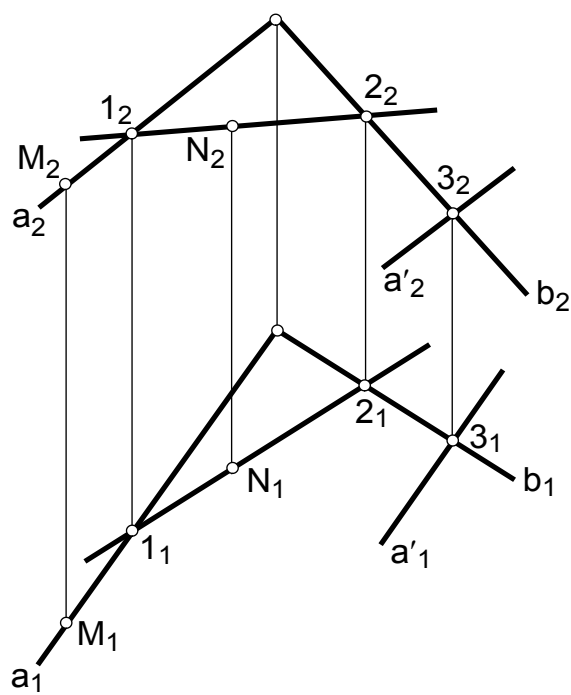


Рис. 24

$\Gamma(a \cap b)$ , так как она принадлежит одной из прямых, задающих плоскость, в данном случае прямой  $a$ . При этом  $M_2 \in a_2 \wedge M_1 \in a_1$ .

Для построения прямой  $l$ , принадлежащей плоскости  $\Gamma(a \cap b)$ , достаточно провести ее через две какие-нибудь точки, принадлежащие этой плоскости, например точки 1 и 2 на рис. 24. Одна из этих точек может быть несобственной (прямая  $a' \parallel a$  на рис.24).

Точку, принадлежащую плоскости  $\Gamma(a \cap b)$ , можно взять на одной из построенных прямых. Например (см. рис. 24),

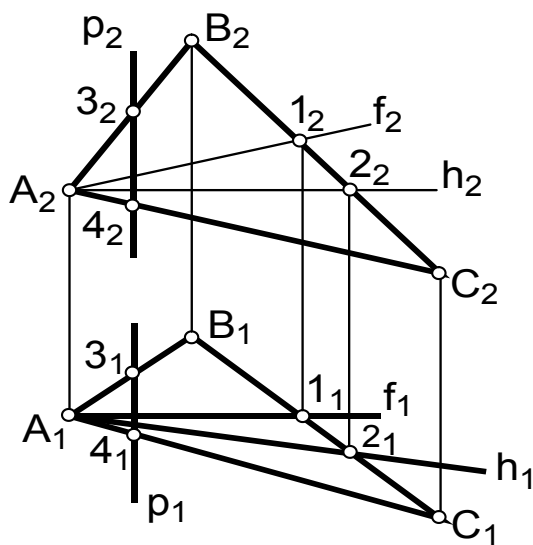


Рис. 25

$$N \in \Gamma(a \cap b) \Leftrightarrow N \in l \wedge l \subset \Gamma(a \cap b).$$

Горизонтالي, фронтالي и профильные прямые, принадлежащие плоскости, называются главными линиями плоскости.

Построение горизонтали  $h$ , принадлежащей плоскости, начинают с проведения ее фронтальной проекции  $h_2$  перпендикулярно вертикальным линиям связи в области фронтальной проекции плоскости, а горизонтальную проекцию  $h_1$  строят из условия принадлежности горизонтали плоскости (рис. 25).

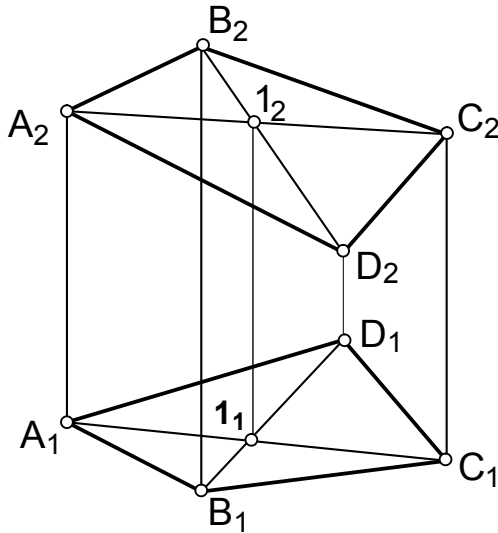


Рис. 26

Построение фронтали  $f$ , принадлежащей плоскости, начинают с проведения ее горизонтальной проекции  $f_1$  перпендикулярно линиям связи, в области горизонтальной проекции плоскости, а фронтальную проекцию  $f_2$  строят из условия принадлежности (см. рис. 25).

Проекции  $p_1$  и  $p_2$  профильной прямой  $p$  совпадают с одной вертикальной линией связи. При этом на чертеже обозначаются

проекция двух точек, принадлежащих одновременно прямой  $p$  и плоскости (точки 3 и 4 на рис. 25).

Очевидно, что через каждую точку плоскости можно провести одну горизонталь  $h$ , одну фронталь  $f$  и одну профильную прямую  $p$ . Вообще же в плоскости можно провести множество горизонталей, фронталей и профильных прямых. Все горизонтали плоскости параллельны между собой, точно также параллельны все фронталей и все профильные прямые.

Аксиомы принадлежности прямой и точки плоскости позволяют построить чертеж любой плоской фигуры. Пусть требуется построить чертеж плоского неправильного четырехугольника  $ABCD$ . Зададим произвольно три его вершины  $A$ ,  $B$  и  $C$  (рис. 26). Одну из проекций четвертой вершины  $D$ , например  $D_2$ , также можно задать произвольно. Вторая проекция  $D_1$  должна быть построена на основании принадлежности точки  $D$  плоскости, определяемой точками  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Проведем диагональ  $(AC)$   $[(A_2C_2) \wedge A_1C_1]$  и фронтальную проекцию  $(B_2D_2)$  диагонали  $(BD)$ . Ее горизонтальную проекцию построим с помощью точки 1 пересечения диагоналей  $(AC)$  и  $(BD)$ . На горизонтальной проекции  $(B_11_1)$  по линии связи найдем горизонтальную проекцию  $D_1$  искомой вершины  $D$ .

### **Плоскости частного положения**

#### *а. Проецирующие плоскости*

Плоскость, перпендикулярная одной из плоскостей проекций, называется проецирующей.

**Горизонтально** проецирующая плоскость – плоскость, перпендикулярная  $\Pi_1$  (рис. 27). Горизонтальная проекция плоскости  $\Sigma$  вырождается в прямую линию  $\Sigma_1$ , положение которой соответствует положению плоскости в пространстве ( $\Sigma_1 = \Sigma \cap \Pi_1$ ).

Фронтальная проекция плоскости представляет собой множество точек, совпадающее с множеством точек плоскости  $\Pi_2(\Sigma_2 = \Pi_2)$ .

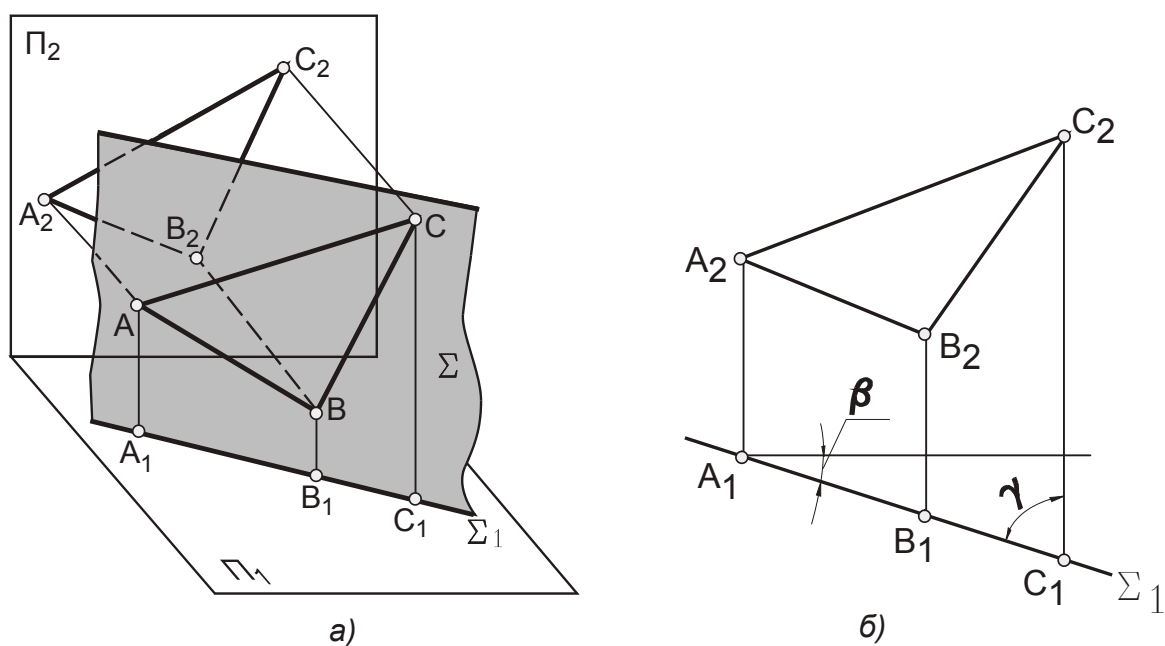


Рис. 27

Горизонтальная проекция любой геометрической фигуры, принадлежащей плоскости  $\Sigma$ , например треугольника  $ABC$ , совпадает с горизонтальной

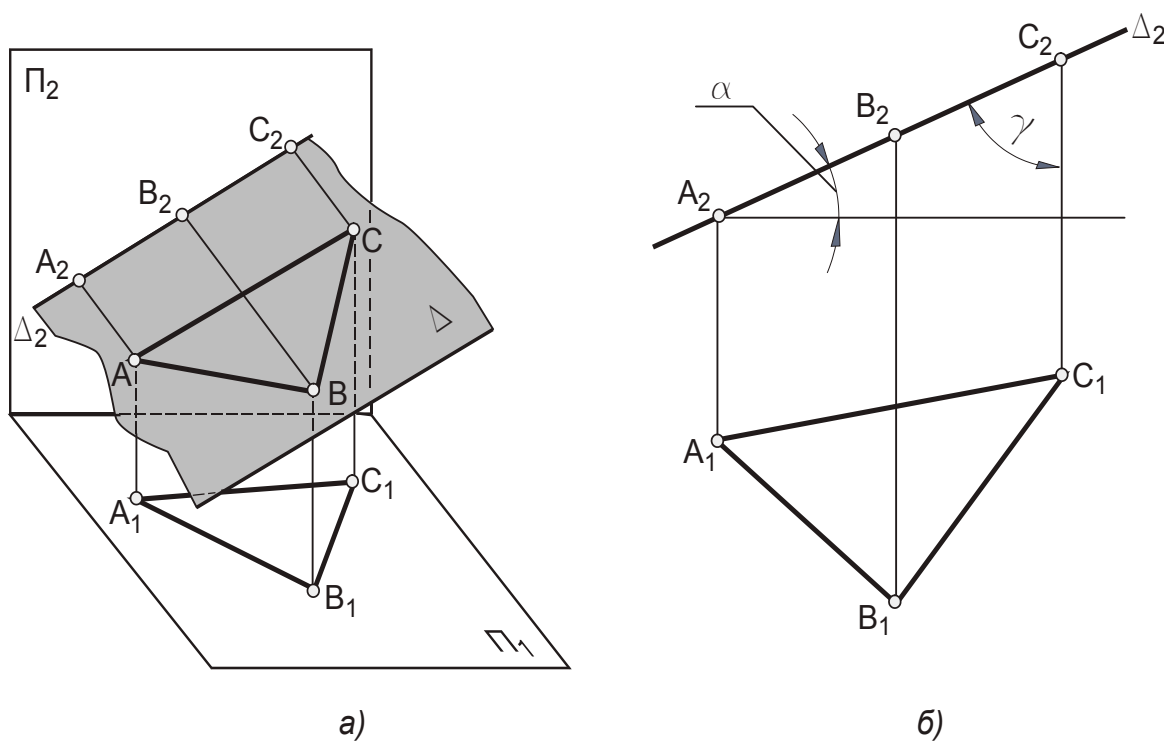


Рис. 28

проекцией  $\Sigma_1$  плоскости  $\Sigma$ . Показанные на рис. 27б углы  $\beta$  и  $\gamma$  — величины углов наклона плоскости  $\Sigma$  соответственно к фронтальной и профильной плоскостям проекций.

**Фронтально** проецирующая плоскость – плоскость, перпендикулярная  $\Pi_2$  (рис. 28). Фронтальная проекция такой плоскости вырождается в прямую линию  $\Delta_2$ , положение которой соответствует положению плоскости в пространстве ( $\Delta_2 = \Delta \cap \Pi_2$ ). Горизонтальная проекция представляет собой множество точек, совпадающих с множеством точек плоскости  $\Pi_1$  ( $\Delta_1 = \Pi_1$ ).

Фронтальная проекция любой геометрической фигуры, принадлежащей плоскости  $\Delta$ , например треугольника  $ABC$ , совпадает с фронтальной проекцией  $\Delta_2$  плоскости  $\Delta$ . Показанные на рис. 28б углы  $\alpha$  и  $\gamma$  – величины углов наклона плоскости к горизонтальной и профильной плоскостям проекций.

**Профильно** проецирующая плоскость – плоскость, перпендикулярная  $\Pi_3$ , (рис. 29). Профильная проекция плоскости  $\Theta$  вырождается в прямую  $\Theta_3$ , положение которой соответствует положению плоскости в пространстве

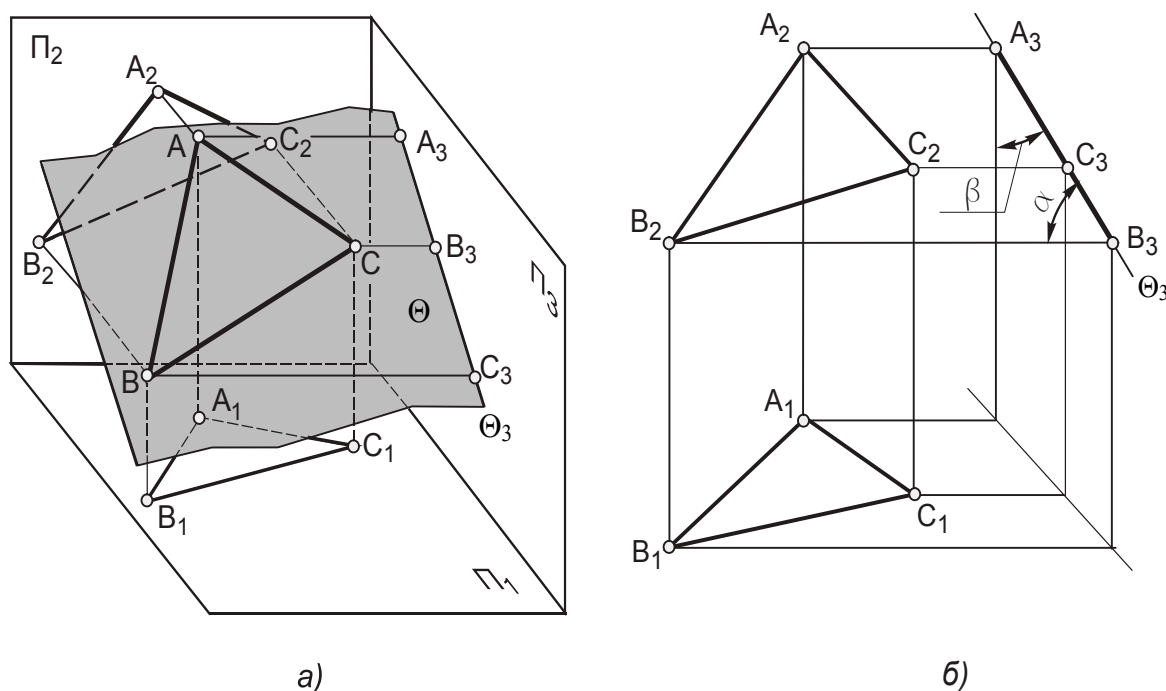


Рис. 29

( $\Theta_3 = \Theta \cap \Pi_3$ ). Горизонтальная и фронтальная проекции представляют собой множество точек, совпадающих соответственно с множеством точек плоскостей  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ . Профильная проекция любой геометрической фигуры, принадлежащей плоскости  $\Theta$ , например треугольника  $ABC$ , совпадает с профильной проекцией  $\Theta_3$  плоскости  $\Theta$ .

Показанные на рис. 29б углы  $\alpha$  и  $\beta$  – величины углов наклона плоскости  $\Theta$  к горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций.

## 6. Плоскости уровня

Плоскость, параллельная одной из плоскостей проекций, называется плоскостью уровня.

**Горизонтальная** плоскость уровня – плоскость, параллельная  $\Pi_1$  (рис. 30). Горизонтальная плоскость уровня  $\Gamma$  перпендикулярна плоскостям  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$  т. е. является фронтально и профильно проецирующей одновременно и обладает,

следовательно, свойствами каждой из них. Любая геометрическая фигура  $\Phi$ , принадлежащая плоскости  $\Gamma$  (рис. 30), проецируется на горизонтальную

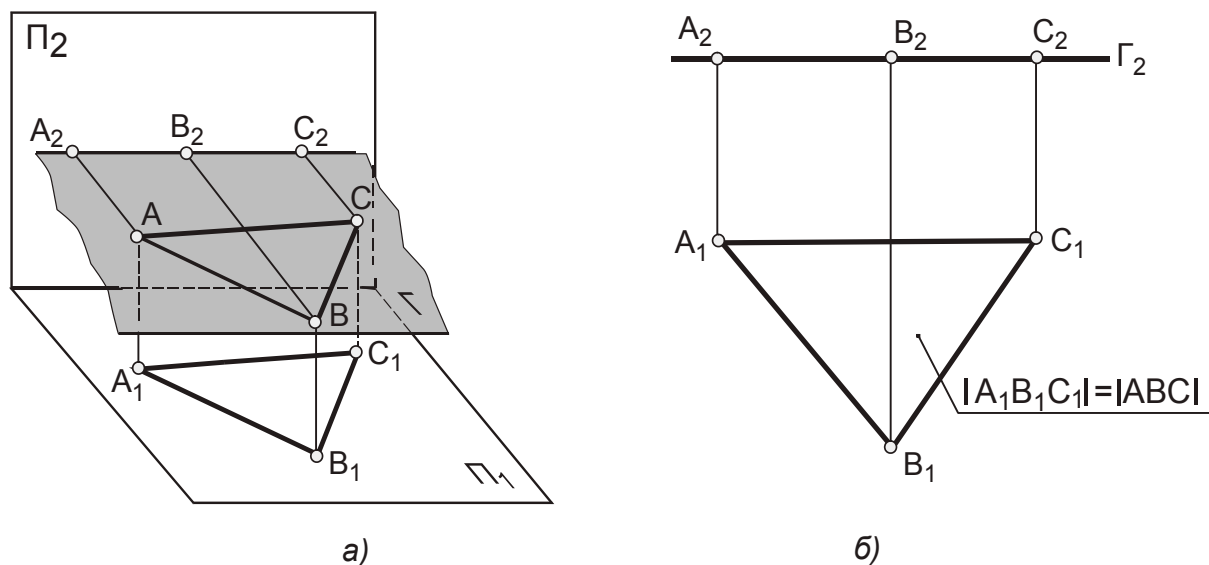


Рис. 30

плоскость проекций в конгруэнтную ей фигуру  $\Phi_1$ , например:

$$\Delta ABC \rightarrow \Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta ABC$$

$$|A_1B_1C_1| \cong |ABC|$$

**Фронтальная** плоскость уровня – плоскость, параллельная  $\Pi_2$  (рис. 31). Фронтальная плоскость уровня  $\Delta$  перпендикулярна плоскостям  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  т. е. является горизонтально и профильно проецирующей одновременно и обладает,

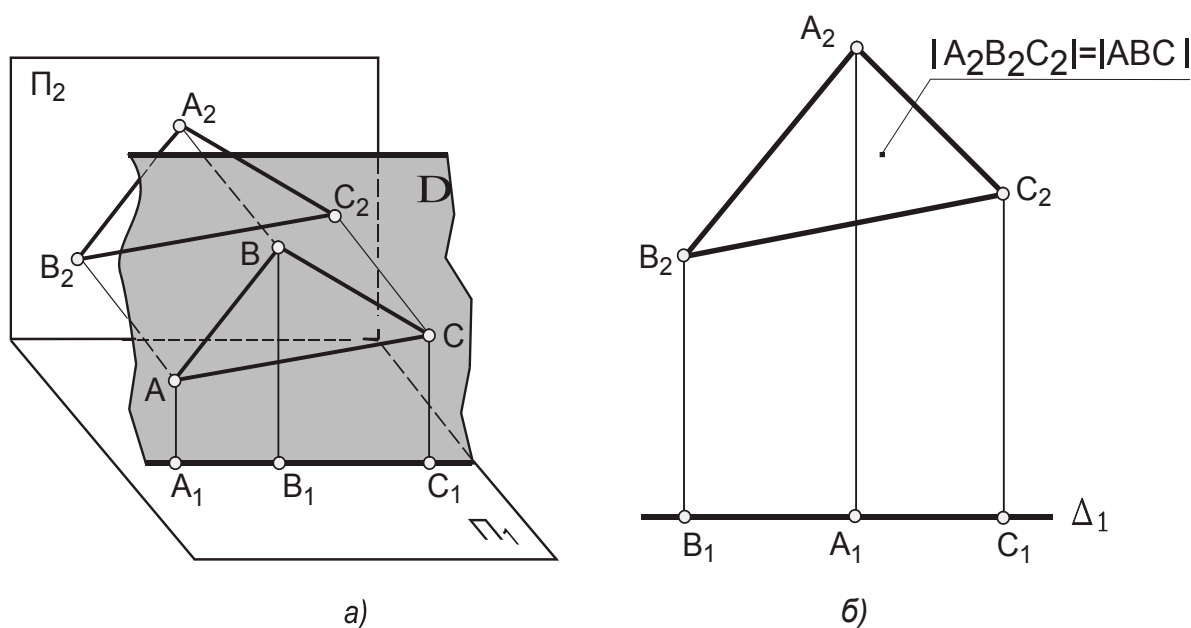


Рис. 31

следовательно, свойствами каждой из них. Любая геометрическая фигура  $\Phi$ , принадлежащая плоскости  $\Delta$ , проецируется на фронтальную плоскость проекций

в конгруэнтную ей фигуру  $\Phi_2$ , например:

$$\Delta ABC \rightarrow \Delta A_2 B_2 C_2 \cong \Delta ABC$$

$$|A_2 B_2 C_2| \cong |ABC|$$

**Профильная** плоскость уровня – плоскость, параллельная  $\Pi_3$  (рис.32).

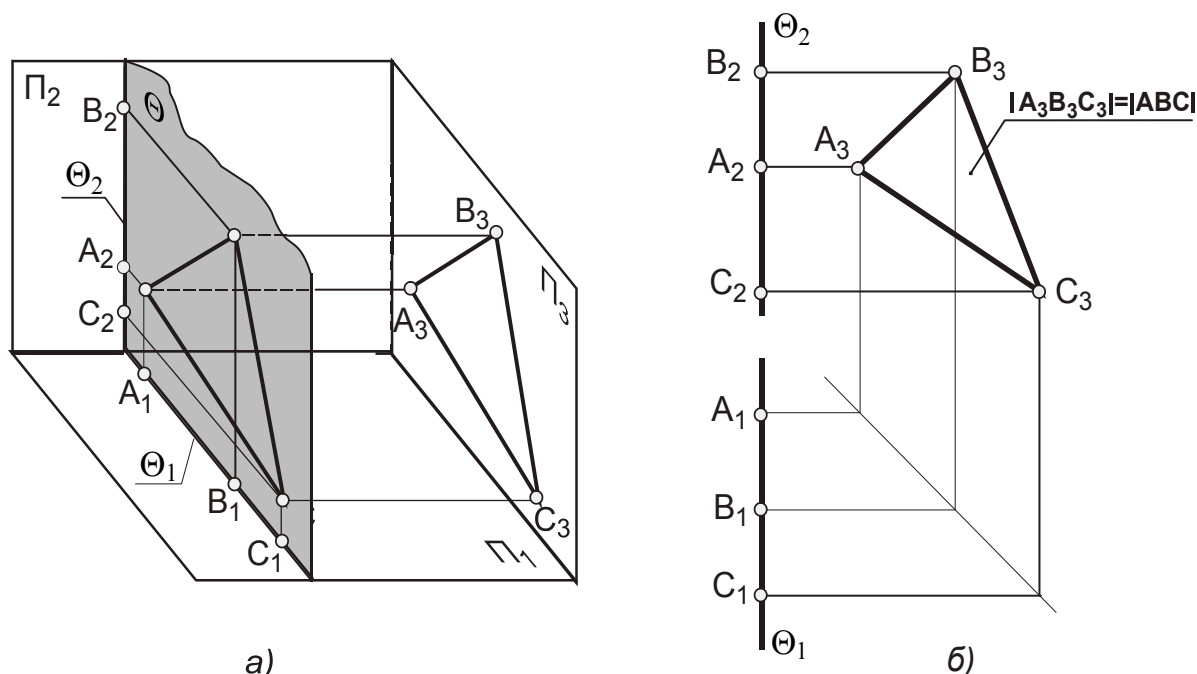


Рис. 32

Профильная плоскость уровня  $\Theta$  перпендикулярна плоскостям  $\Pi_2$ , и  $\Pi_1$ , т. е. является горизонтально и фронтально проецирующей одновременно и обладает, следовательно, свойствами каждой из них. Любая фигура  $\Phi$ , принадлежащая плоскости  $\Theta$ , проецируется на профильную плоскость проекций в конгруэнтную ей фигуру  $\Phi_3$ , например:

$$\Delta ABC \rightarrow \Delta A_3 B_3 C_3 \cong \Delta ABC$$

$$|A_3 B_3 C_3| \cong |ABC|$$

### 2.3.2. Многогранные поверхности. Многогранники

Поверхность, образованная частями попарно пересекающихся плоскостей, называется многогранной. На рис. 33 изображены некоторые виды многогранных поверхностей. Их элементами являются грани, ребра и вершины. Отсеки плоскостей, образующие многогранную поверхность, называются гранями, линии пересечения смежных граней – ребрами, точки пересечения не менее чем трех граней – вершинами.

Если каждое ребро многогранной поверхности принадлежит одновременно двум ее граням, ее называют замкнутой (рис. 33б,г), в противном случае – незамкнутой (рис. 33а,в). Многогранная поверхность называется пирамидальной, если все ее ребра пересекаются в одной точке – вершине (см. рис. 33б). Пирамидальная поверхность имеет две неограниченные половины. Многогранная

поверхность называется призматической, если все ее ребра параллельны между собой (рис.33г).

Геометрическое тело, со всех сторон ограниченное плоскими многоугольниками, называется многогранником. Простейшими многогранниками являются пирамиды и призмы (рис. 34). Среди других видов

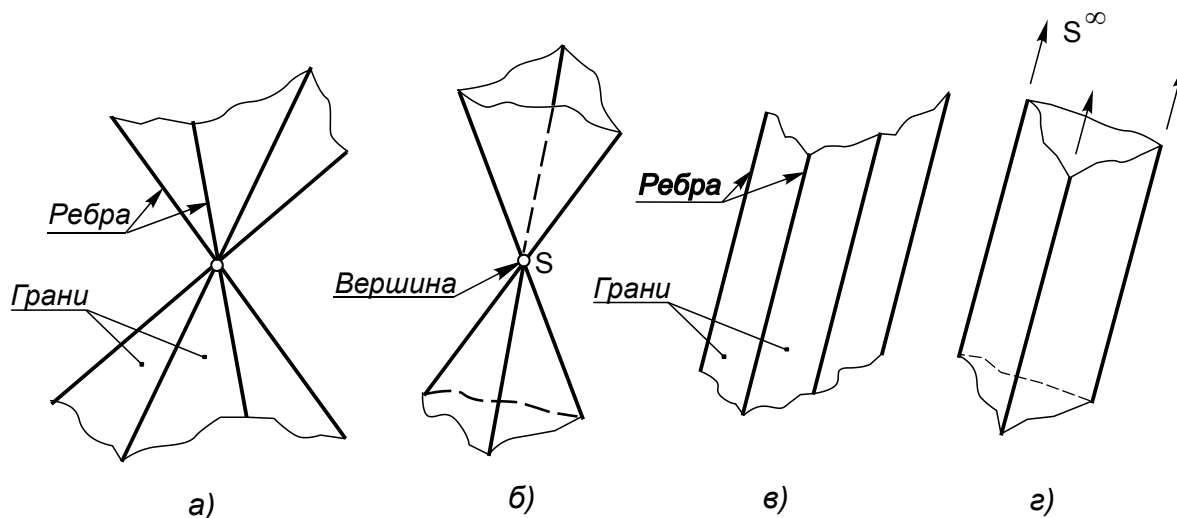


Рис. 33

многогранников следует выделить - призматойды и правильные многогранники (тела Платона). Призматойдом называется многогранник, у которого верхнее и нижнее основания - многоугольники, расположенные в параллельных

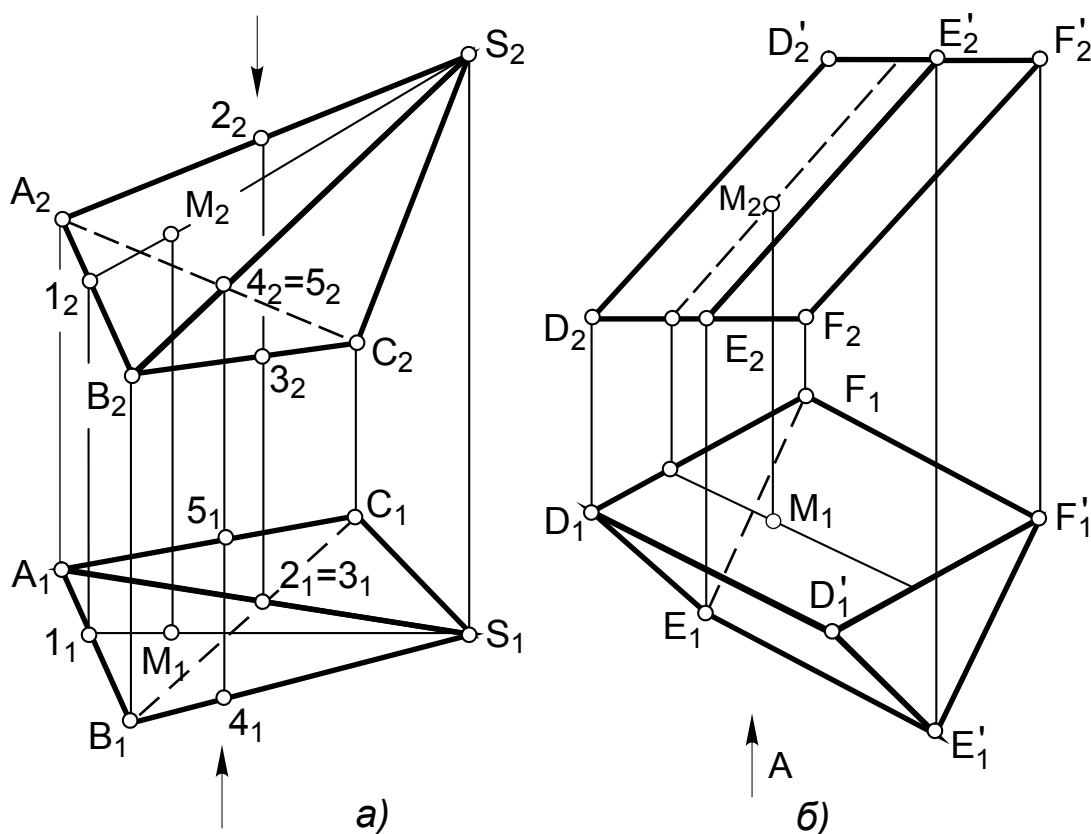


Рис. 34

плоскостях, а боковые грани представляют собой треугольники или трапеции (Рис. 34в).

Существует пять правильных многогранников:

1. **Тетраэдр** (четырехгранник) – ограничен четырьмя равносторонними и равными треугольниками.

2. **Гексаэдр** (шестигранник, или куб) – ограничен шестью равными квадратами.

3. **Октаэдр** (восьмигранник) – ограничен восемью равносторонними и равными треугольниками.

4. **Додекаэдр** (двенадцатигранник) – ограничен двенадцатью равносторонними и равными пятиугольниками.

5. **Икосаэдр** (двадцатигранник) – ограничен двадцатью равносторонними и равными треугольниками.

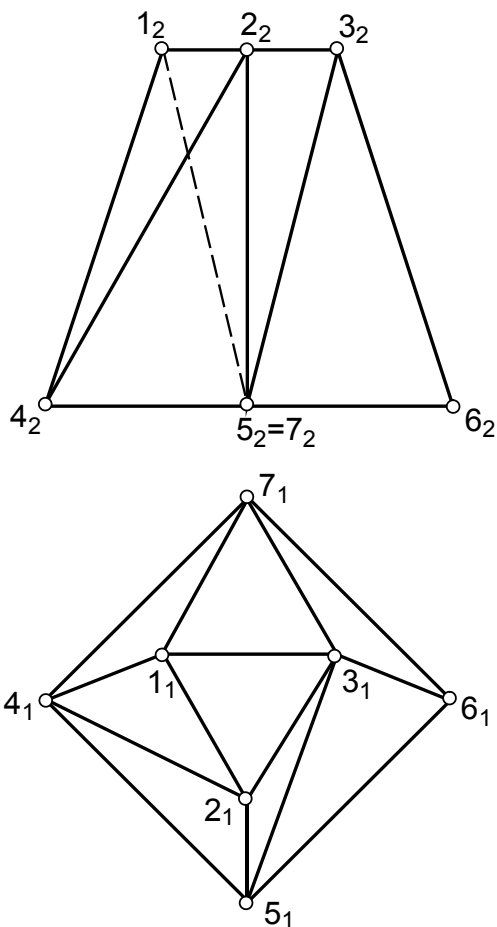


Рис. 34в

Вокруг всех правильных многогранников можно описать сферу.

Совокупность всех ребер и вершин многогранника называется его сеткой. Построение проекций многогранника сводится к построению проекций его сетки.

Количество проекций многогранника должно быть таким, чтобы обеспечивалась обратимость чертежа. Чертеж называется обратимым, если по одной проекции точки, принадлежащей поверхности, можно построить ее вторую проекцию.

На рис. 34а выполнен обратимый чертеж пирамиды

**$SABC(S_1A_1B_1C_1, S_2A_2B_2C_2)$ .**

В общем случае двухпроекционный чертеж многогранника, состоящий из горизонтальной и фронтальной проекций, является обратимым, если на нем нет совпадающих проекций ребер и ни одно ребро не является профильной прямой (см. рис.34а,б.) Если эти условия не соблюдаются, то для придания чертежу свойства обратимости необходимо построить третью

проекцию многогранника или обозначить все его вершины. Замкнутая ломаная  $S_1C_1A_1B_1S_1$  называется очерком горизонтальной проекции пирамиды, а замкнутая ломаная  $S_2A_2B_2C_2S_2$  – очерком ее фронтальной проекции. Очерк проекции всегда видим. Видимость проекций линий, расположенных внутри очерка, определяется при помощи конкурирующих точек (см. рис. 34а).

Существенную помощь при этом могут оказать следующие правила:

1) Если внутри очерка пересекаются две линии, то одна из них видимая, а другая – невидимая;

2) Если внутри очерка пересекаются в одной точке три линии, то все три

будут видимые или все три – невидимые;

3) Если последовательность букв или цифр при обходе какой-либо грани в одном направлении одинакова на обеих проекциях, то и видимость этой грани на обеих проекциях одинакова, в противном случае – разная.

Например (см. рис. 34а), последовательность букв при обходе грани ABS против часовой стрелки на обеих проекциях одна и та же ( $A_1B_1S_1$  и  $A_2B_2S_2$ ), поэтому и видимость проекций ее на  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  одинакова. В данном случае обе проекции видимы. Согласно тому же правилу проекции  $B_1S_1C_1$  и  $B_2C_2S_2$  грани BSC имеют разную видимость.

При определении видимости проекций многогранника (призмы, пирамиды), основания которого параллельны плоскости проекций, рекомендуется пользоваться следующими правилами (см. рис. 34б):

1. Линии, образующие внешний контур (очерк) каждой проекции, всегда видимы (фиг.  $D_1E_1E'_1F'_1F_1D_1$  и фиг.  $D_2F_2F'_2D'_2D_2$ ).

2. Горизонтальные проекции сторон нижнего основания видимы те, которые входят в состав очерка ( $D_1E_1$  и  $D_1F_1$ ); горизонтальные проекции сторон верхнего основания видимы все ( $D'_1E'_1$ ;  $E'_1F'_1$ ;  $F'_1D'_1$ ).

3. На плоскости  $\Pi_1$  видимы проекции тех граней, которые проходят через видимые на ней проекции сторон нижнего основания ( $D_1E_1E'_1D'_1$ ;  $D_1D'_1F'_1F_1$ ).

4. На плоскости  $\Pi_2$  видимы проекции тех граней, которые проходят через впереди лежащие стороны нижнего основания ( $D_2E_2E'_2D'_2$ ;  $E_2E'_2F'_2F_2$ ).

Впереди лежащими сторонами основания DEF являются стороны DE и EF, если смотреть по стрелке A.

Если все грани многогранника расположены по одну сторону плоскости любой его грани, многогранник называется выпуклым.

Для всякого выпуклого многогранника справедлива теорема Эйлера:

$\Gamma + B - P = 2$ , где  $\Gamma$  – число граней,  $B$  – число вершин,  $P$  – число ребер.

Проекции точек, принадлежащих поверхности, располагаются на линиях очерка и внутри его. Никакая точка поверхности не может иметь свою проекцию за пределами очерка.

### 2.3.3 Кривые поверхности

#### 2.3.3.1. Общие понятия и определения.

Кривые поверхности широко применяются в различных областях науки и техники при создании очертаний различных технических форм или как объекты инженерных исследований.

Существуют три способа задания кривых поверхностей:

1) **Аналитический** – при помощи уравнений;

2) **При помощи каркаса**;

3) **Кинематический**, т. е. перемещением линий в пространстве.

Составлением уравнений поверхностей занимается аналитическая геометрия; она рассматривает кривую поверхность как множество точек, координаты которых удовлетворяют некоторому уравнению.

При каркасном способе задания кривая поверхность задается совокупностью некоторого количества линий, принадлежащих поверхности. В

качестве линий, образующих каркас, как правило, берут семейство линий, получающихся при пересечении поверхности рядом параллельных плоскостей. Этот способ применяется при проектировании кузовов автомобилей, в самолето- и судостроении, в топографии и т. п.

Начертательная геометрия изучает кинематические способы образования и задания кривых поверхностей. При этом каждая кривая поверхность рассматривается как совокупность последовательных положений образующей линии  $l$ , перемещающейся в пространстве по определенному закону. Образующая линия при своем движении может оставаться неизменной, а может и менять свою форму. Такой способ образования поверхности называется кинематическим, а сама поверхность – кинематической.

Закон перемещения образующей линии, как правило, задается при помощи направляющих линий и алгоритма перемещения образующей по направляющим.

На чертеже кинематическая кривая поверхность задается при помощи ее определителя.

**Определителем** поверхности называют совокупность условий, необходимых и достаточных для задания поверхности в пространстве.

Для того чтобы построить чертеж поверхности, необходимо предварительно выявить ее определитель. Определитель поверхности выявляется путем анализа способов образования поверхности или ее основных свойств. В общем случае поверхность может быть образована несколькими способами и поэтому может иметь несколько определителей. Обычно из всех способов образования поверхности выбирают простейший. Определитель поверхности состоит из двух частей:

1) Геометрической части – совокупности геометрических фигур, с помощью которых можно образовать поверхность.

2) Алгоритмической части – алгоритма формирования поверхности при помощи фигур, входящих в геометрическую часть определителя.

Поверхность на чертеже задают проекциями геометрической части ее определителя. Определитель кривой поверхности  $\Phi$  может быть записан в символической форме:  $\Phi(\Gamma)[A]$ , где  $(\Gamma)$  – геометрическая часть,  $[A]$  – алгоритмическая часть. Для каждой поверхности обе части определителя имеют вполне конкретное содержание.

Поверхность считается заданной на комплексном чертеже, если относительно любой точки пространства, заданной на чертеже, можно однозначно решить вопрос о принадлежности ее данной поверхности. Построение проекций любых точек и линий, принадлежащих поверхности, а также второй их проекции, если одна задана, выполняется на основании ее определителя. Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит линии, принадлежащей поверхности.

Рассмотрим примеры выявления определителя для некоторых простейших поверхностей:

1. Через три точки  $A, B, C$ , не принадлежащие одной прямой, можно провести одну и только одну плоскость ( $\Sigma$  на рис. 35а). Точки  $A, B$  и  $C$  составляют геометрическую часть определителя плоскости.

Вторая часть определителя, т. е. алгоритм построения в плоскости  $\Sigma$  ( $A, B, C$ )

любых линий и точек, выражается рассмотренными ранее условиями принадлежности прямой и точки плоскости. На чертеже (рис. 35б) плоскость  $\Sigma$

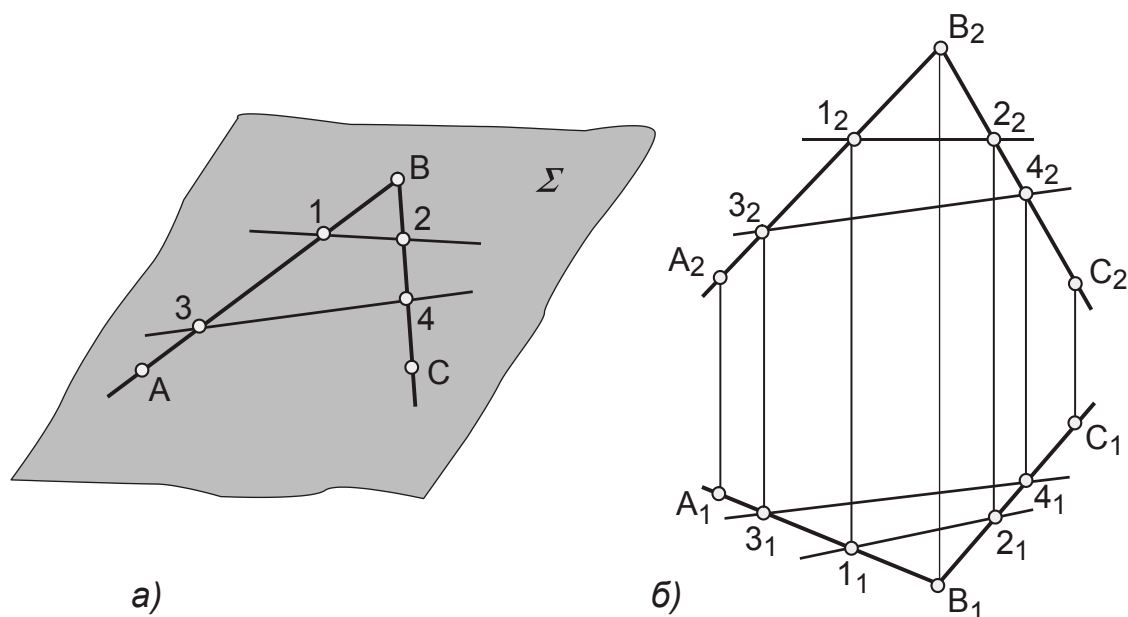


Рис. 35

задана проекциями геометрической части своего определителя:  $A(A_1A_2)$ ,  $B(B_1B_2)$ ,  $C(C_1C_2)$ .

2. Цилиндрическая поверхность вращения может быть образована вращением прямой  $l \parallel i$  вокруг оси  $i$  (рис. 36а).

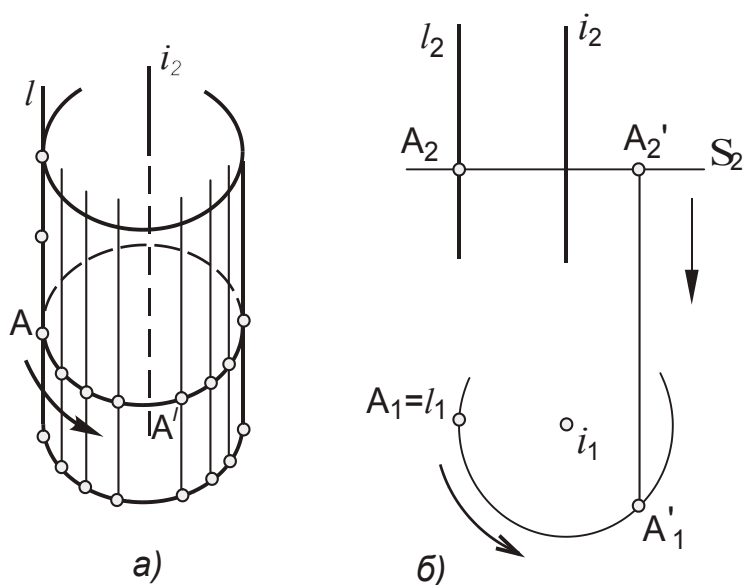


Рис. 36

Геометрическая часть определителя поверхности состоит из образующей  $l$  и оси  $i$ . Алгоритмическая часть определителя состоит из операции вращения образующей линии  $l$  вокруг оси  $i$ .

Определитель цилиндрической поверхности вращения имеет вид  $\Phi(l \parallel i, i)[A]$ . На чертеже (рис. 36б) цилиндр вращения задан проекциями геометрической части своего определителя.

3. Коническая поверхность вращения может быть образована вращением прямой  $l$ , пересекающей ось вращения

$i$  под некоторым углом (рис. 37а). Алгоритмическая часть определителя состоит из словесного указания о том, что поверхность образуется вращением образующей  $l$  вокруг оси  $i$ . Определитель конической поверхности вращения имеет вид  $\Phi(l \cap i)[A]$ . На чертеже (рис. 37б) конус вращения задан проекциями геометрической части его определителя:  $l(l_1, l_2) \wedge i(i_1 i_2)$

В указанных примерах определитель поверхности выявляется путем анализа способов ее образования.

Рассмотрим пример выявления определителя поверхности путем анализа ее основных свойств.

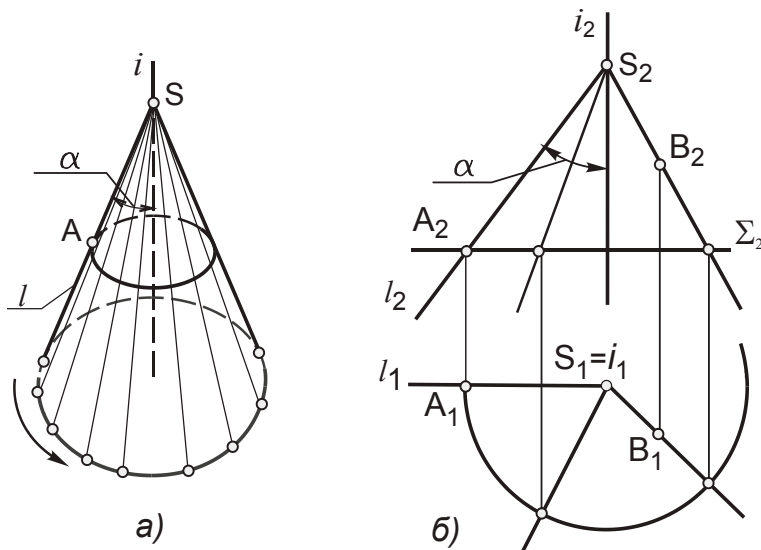


Рис. 37

Возьмем, например, сферу. Сферой называется поверхность, образованная множеством точек пространства, находящихся на расстоянии  $|r|$  от данной точки  $O$  (рис. 38а). Геометрическая часть определителя сферы состоит из точки  $O$  (центра сферы) и точки  $M$ , принадлежащей ее поверхности (см. рис. 38а).

Алгоритм построения любой точки сферы заключается в проведении через точку  $O$  произвольной прямой и откладывания на ней от точки  $O$  отрезка  $|OM^n| = |OM| = |r|$ . Определитель сферы имеет вид  $\Phi(O, M) [A]$ .

На рис. 38б сфера задана проекциями точек  $O(O_1O_2)$  и  $M(M_1M_2)$ , которые составляют геометрическую часть ее определителя, и показано построение произвольной точки  $M^n(M_1^n, M_2^n)$  сферы.

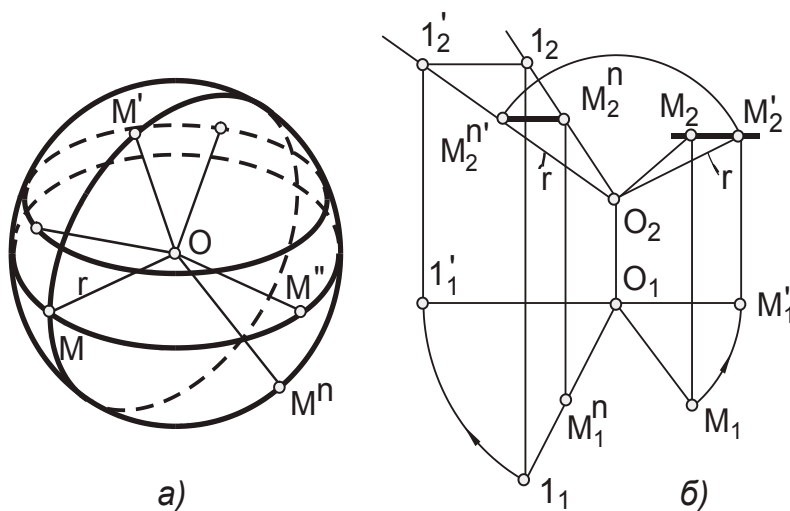


Рис. 38

При чтении чертежа немаловажную роль играет его наглядность. Задание поверхности проекциями геометрической части ее определителя не обеспечивает наглядности изображений. Поэтому для придания чертежу поверхности большей наглядности и выразительности прибегают к построению очерков ее проекций или проекций достаточно плотного каркаса ее образующих (в случаях, когда проекции поверхности не имеют определенного очерка) на основании алгоритмической части ее определителя.

При проецировании поверхности на какую-либо плоскость проекций часть проецирующих лучей касается ее, образуя проецирующую поверхность. Точки касания при этом образуют линию видимого контура поверхности относительно этой плоскости проекций (рис. 39). Очерк проекции поверхности является

проекцией соответствующей линии видимого контура.

Линия видимого контура поверхности разделяет ее на две части - видимую,

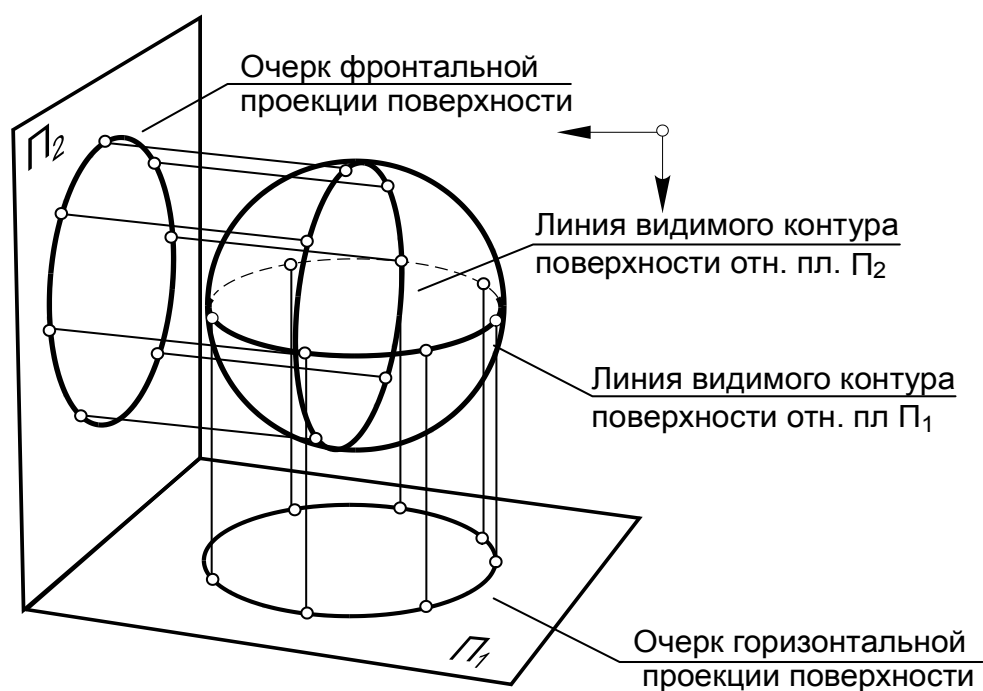


Рис. 39

обращенную к наблюдателю, и невидимую. Никакая точка поверхности не может спроецироваться за пределы очерка.

На чертежах (рис. 40а,в) конус вращения и сфера заданы проекциями геометрической части своего определителя, а на чертежах (рис. 40б,г) для тех же поверхностей построены очерки их проекций. Последние, безусловно,

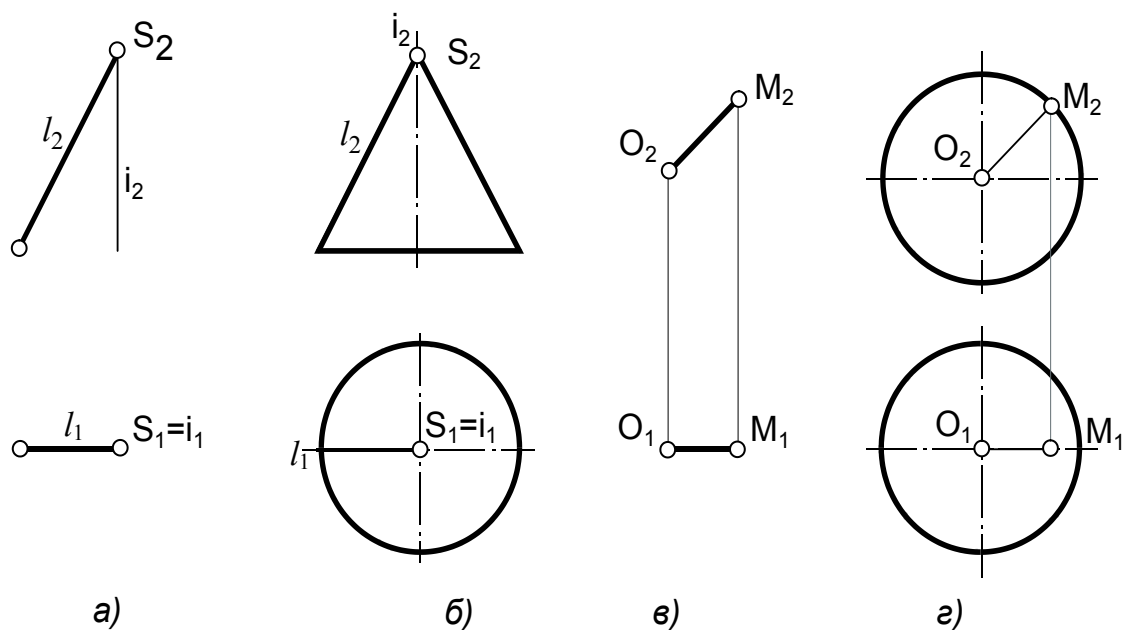


Рис. 40

обладают большей наглядностью и выразительностью.

Кривые поверхности разделяются на линейчатые и нелинейчатые, закономерные и не закономерные. Поверхность называется линейчатой, если она может быть образована перемещением прямой линии, в противном случае – нелинейчатой.

Если поверхность может быть задана каким-либо уравнением, она называется закономерной, в противном случае – не закономерной, или графической (задается только чертежом).

Закономерные поверхности, в зависимости от вида уравнения, разделяются на алгебраические и трансцендентные. Алгебраическое уравнение  $n$ -й степени (в декартовых координатах) задает алгебраическую поверхность  $n$ -го порядка (трансцендентные поверхности порядка не имеют). Алгебраическая поверхность  $n$ -го порядка пересекается плоскостью по кривой  $n$ -го порядка, а с прямой линией – в  $n$  точках. Плоскость, имеющую уравнение первой степени (с произвольной плоскостью пересекается по прямой линии, а с прямой – в одной точке), можно рассматривать как поверхность первого порядка. Примерами кривых поверхностей второго порядка могут служить поверхности, образованные вращением кривых второго порядка вокруг одной из своих осей. Поверхности второго порядка пересекаются с произвольной плоскостью по кривым второго порядка, а с прямой – в двух точках. Примером поверхности четвертого порядка может служить тор (см. поверхности вращения). Определитель может быть положен в основу классификации поверхностей. К одному и тому же классу относятся поверхности, имеющие одинаковую структуру определителя.

Наибольшее применение в технике получили кинематические кривые поверхности с образующими постоянной формы:

**1. Линейчатые поверхности:**

- а) развертывающиеся;**
- б) неразвертывающиеся;**
- в) винтовые.**

**2. Поверхности вращения.**

**2.3.3.2. Линейчатые поверхности**

Как уже отмечалось, поверхность называется линейчатой, если она может быть образована перемещением прямой линии. Поверхность, которая не может быть образована движением прямой линии, называется нелинейчатой. Например, конус вращения - линейчатая поверхность, а сфера - нелинейчатая. Через любую точку линейчатой поверхности можно провести, по крайней мере, одну прямую, целиком принадлежащую поверхности. Множество таких прямых представляет собой непрерывный каркас линейчатой поверхности. Линейчатые поверхности разделяются на два вида:

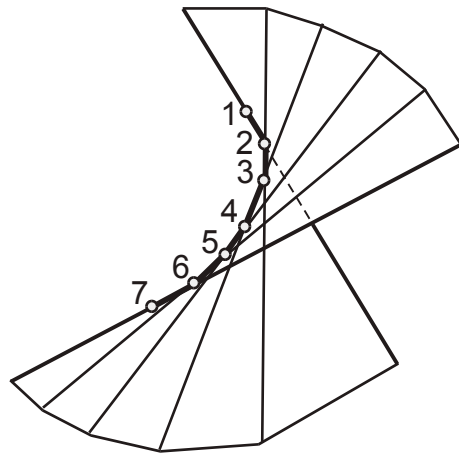
- 1) развертывающиеся поверхности;
- 2) неразвертывающиеся, или косые поверхности.

**Примечание.** Все нелинейчатые поверхности являются неразвертывающимися.

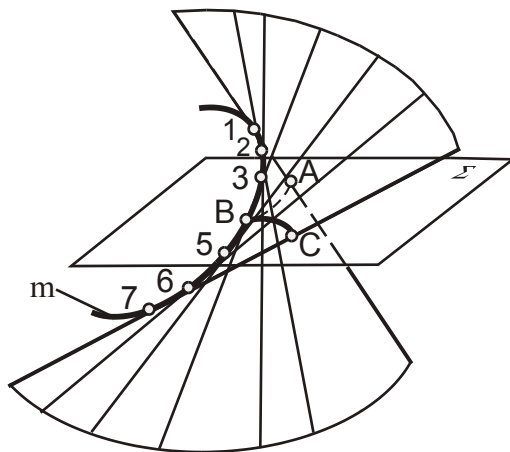
Рассмотрим несколько наиболее характерных разновидностей тех и других линейчатых поверхностей.

## РАЗВЕРТЫВАЮЩИЕСЯ ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

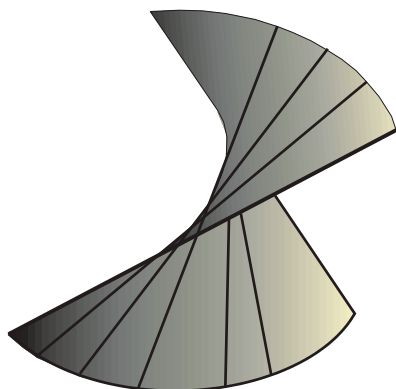
Поверхность называется развертывающейся, если она путем изгибания может быть совмещена с плоскостью без образования складок и разрывов. Очевидно, что все многогранные поверхности являются развертывающимися. Из кривых поверхностей этим свойством обладают только те линейчатые поверхности, которые имеют ребро возврата.



а)



б)



в)

Рис. 41

Существует только три вида линейчатых поверхностей, имеющих ребро возврата: торсы, конические и цилиндрические.

### *Торсы*

Возьмем некоторую пространственную ломаную линию 1, 2, 3, 4, 5, 6,... и продолжим ее стороны так, как показано на рис. 41а. В результате получим двухполую многогранную развертываемую поверхность. При неограниченном увеличении числа сторон ломаной линии с одновременным стремлением длины каждой из них к нулю и переходе к пределу получим:

1) пространственная ломаная линия 1, 2, 3, 4, 5, 6,...преобразуется в пространственную кривую линию  $m$ ;

2) ребра многогранной поверхности преобразуются в касательные к пространственной кривой  $m$ ;

3) многогранная поверхность преобразуется в линейчатую двухполую развертывающуюся кривую поверхность, которая называется торсом.

Множество всех касательных прямых к пространственной кривой представляет собой непрерывный каркас поверхности торса. Через каждую точку поверхности проходит одна касательная к кривой  $m$ . Таким образом, торс представляет собой поверхность, которая образуется непрерывным движением прямолинейной образующей, касающейся во всех своих положениях некоторой пространственной кривой линии. Направляющая пространственная кривая  $m$  (рис. 41б) служит границей между двумя полостями поверхности торса и называется **ребром**

**возврата.**

Если взять на кривой  $m$  некоторую точку  $B$  и провести через нее плоскость  $\Sigma$ ,

пересекающую обе полости поверхности, то полученная в пересечении кривая ABC будет иметь так называемую точку возврата В. Следовательно, ребро возврата является множеством точек возврата кривых линий, полученных при пересечении данной поверхности различными плоскостями. Этим и объясняется ее название.

Если ребром возврата является цилиндрическая винтовая линия, то такая поверхность называется развертывающимся геликоидом. Так как углы наклона всех образующих этой поверхности к плоскости, перпендикулярной оси винтовой линии, одинаковы, она является поверхностью одинакового ската.

Плоскость, перпендикулярная оси поверхности, пересекает ее по эвольвенте окружности. Свойством развертываемости торс обладает потому, что он является пределом некоторой развертывающейся многогранной поверхности. Геометрическая часть определителя торса состоит из ребра возврата. Алгоритмическая часть определителя торса состоит из указания о том, что образующая прямая при своем движении остается касательной к ребру возврата.

Если ребро возврата выродится в собственную точку пространства, то образующие торса, проходя через нее, образуют коническую поверхность произвольного вида. Если эта точка (вырожденное ребро возврата) будет несобственной точкой пространства, то образующие торса, проходя через нее, окажутся параллельными между собой и образуют цилиндрическую поверхность общего вида. Таким образом, цилиндрическая и коническая поверхности обладают свойством развертываемости, так как являются частными случаями поверхности торса. Однако, чтобы задать коническую или цилиндрическую поверхности, недостаточно иметь только ребро возврата (собственную или несобственную точку) – положение образующей прямой не определяется одной точкой. Необходимо задать еще направляющую линию.

К вопросу о развертываемости кривой линейчатой поверхности можно подойти и с точки зрения дифференциальной геометрии, которая доказывает, что линейчатая поверхность является развертывающейся, если касательная плоскость, проведенная в какой-либо точке поверхности, касается ее по прямолинейной образующей поверхности, проходящей через эту точку. Таким свойством обладают только три вида поверхностей: торс, коническая и цилиндрическая.

### ***Цилиндрические поверхности***

Цилиндрическая поверхность образуется движением прямой линии, скользящей по некоторой неподвижной замкнутой или незамкнутой кривой и остающейся параллельной своему исходному положению (рис. 42). Множество прямолинейных образующих представляет собой непрерывный каркас цилиндрической поверхности. Через каждую точку поверхности проходит одна прямолинейная образующая.

Неподвижная кривая  $m(m_1, m_2)$ , по которой скользит образующая  $l(l_1, l_2)$ , называется направляющей. Если направляющая линия является кривой второго порядка, то и цилиндрическая поверхность будет второго порядка. Геометрическая часть определителя цилиндрической поверхности состоит из направляющей линии  $m$  и исходного положения образующей  $l$  (см. рис. 42).

Алгоритмическая часть определителя состоит из указания о том, что любая

образующая поверхности может быть построена как прямая, пересекающая кривую  $m$  и параллельная прямой  $l$ . Цилиндрическая поверхность является бесконечной в направлении

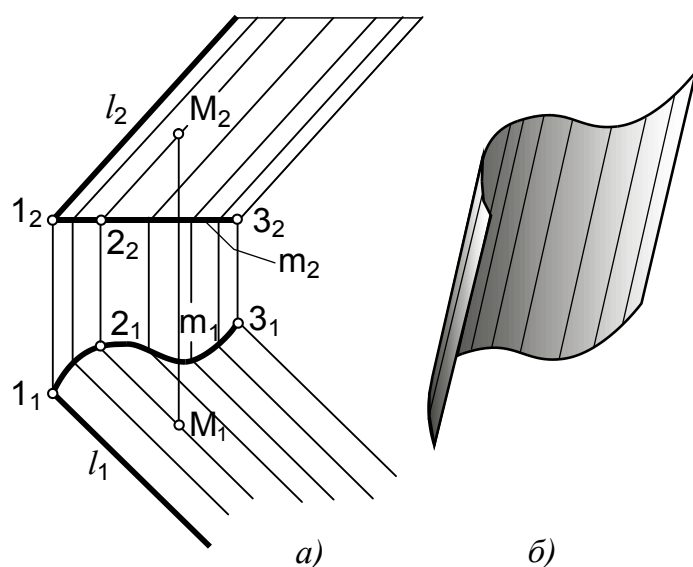


Рис. 42

своих образующих. Часть замкнутой цилиндрической поверхности, заключенная между двумя плоскими параллельными сечениями, называется цилиндром, а фигуры сечения – его основаниями (рис. 43, 44). Сечение цилиндрической поверхности плоскостью, перпендикулярной ее образующим, называется нормальным. В зависимости от формы нормального сечения цилиндры бывают:

- 1) круговые – нормальное сечение круг (см. рис. 43);
- 2) эллиптические – нормальное сечение эллипс (см. рис. 44);
- 3) параболические – нормальное сечение парабола;
- 4) гиперболические – нормальное сечение гипербола;
- 5) общего вида – нормальное сечение кривая случайного вида (рис. 42).

Если за основание цилиндра принимается его **нормальное** сечение, цилиндр называют **прямым** (см. рис. 43а, 44а).

Если за основание цилиндра принимается одно из **косых** сечений, цилиндр называют **наклонным** (см. рис. 43б, 44б, в).

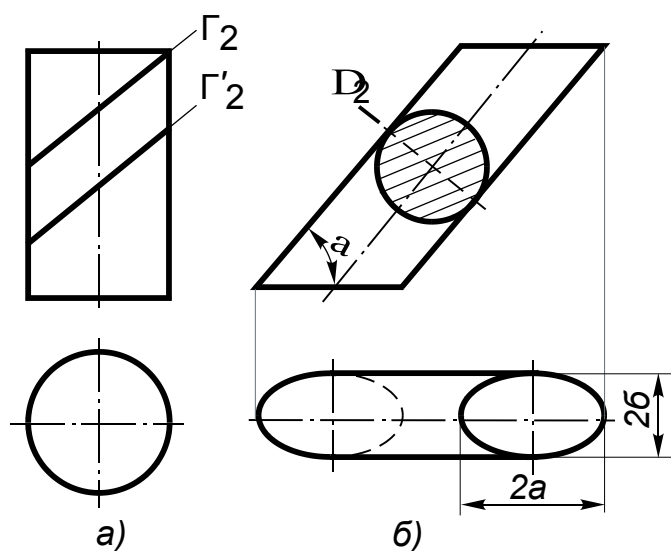


Рис. 43

Наклонные сечения прямого кругового цилиндра являются эллипсами (сечения плоскостями  $\Gamma(\Gamma_2)$  и  $\Gamma'(\Gamma'_2)$  на рис. 43а). На рис. 43б изображен наклонный цилиндр, основаниями которого являются косые сечения (эллипсы).

Наклонные сечения прямого эллиптического цилиндра в общем случае – эллипсы. Однако его всегда можно пересечь плоскостью, наклонной к его образующим, таким образом, что

в сечении получится круг. Эллиптический цилиндр имеет две системы круговых сечений (построение их рассмотрено в гл. 4). На рис. 44а показаны плоскости  $\Gamma(\Gamma_2)$  и  $\Gamma'(\Gamma'_2)$ , пересекающие эллиптический цилиндр по окружностям. На рис. 44б, в выполнены чертежи наклонных эллиптических цилиндров, основаниями которых являются их круговые сечения.

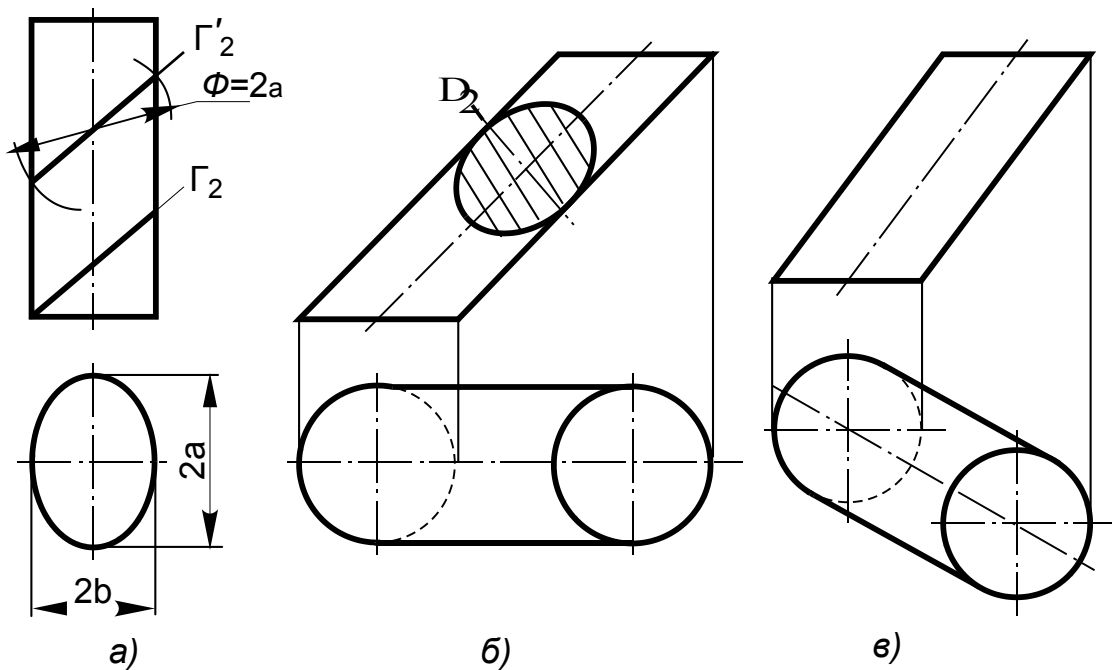


Рис. 44

### Конические поверхности

Коническая поверхность образуется движением прямой линии, скользящей по некоторой неподвижной замкнутой или незамкнутой кривой и проходящей во всех своих положениях через неподвижную точку (рис. 45).

Неподвижная кривая  $m(m_1, m_2)$ , по которой скользит образующая  $l(l_1, l_2)$ , называется направляющей. Если направляющая линия является кривой второго порядка, то и коническая поверхность будет второго порядка. Неподвижная

точка  $S(S_1, S_2)$ , делящая поверхность на две бесконечные половины, называется вершиной. Множество прямолинейных образующих представляет собой непрерывный каркас конической поверхности. Через каждую точку поверхности проходит одна прямолинейная образующая (исключением является только вершина  $S$ , которая называется «особой точкой поверхности»).

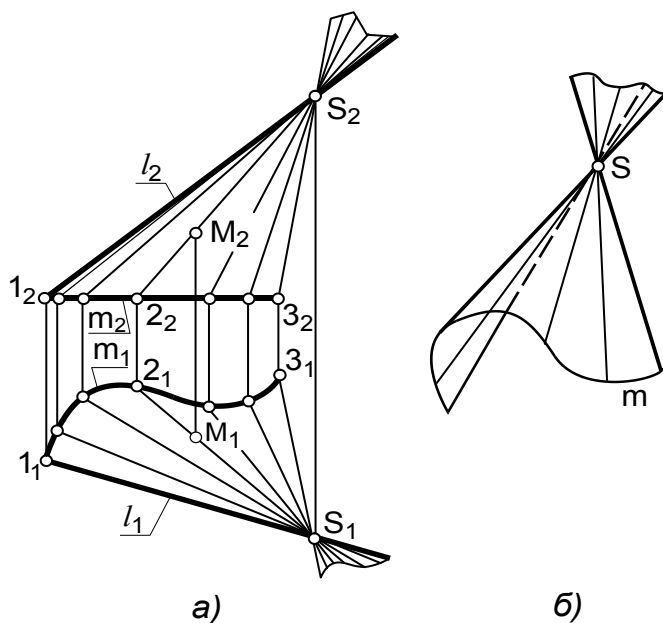


Рис. 45

Геометрическая часть определителя конической поверхности состоит из направляющей кривой  $m$  и вершины  $S$ .

Алгоритмическая часть определителя состоит из указания о том, что любая образующая поверхности может быть построена как прямая, проходящая через вершину  $S$  и пересекающая кривую  $m$ . Часть замкнутой конической поверхности, ограниченная вершиной и какой-либо плоскостью, пересекающей все ее образующие, называется конусом. Фигура сечения конической поверхности этой плоскостью называется основанием конуса.

Сечение конической поверхности плоскостью, перпендикулярной ее оси, называется **нормальным**. Осью конической поверхности называется линия пересечения ее плоскостей симметрии. Следовательно, не все конические поверхности имеют ось, а только те, которые имеют не меньше двух плоскостей симметрии.

Конические поверхности, не имеющие оси (а следовательно, и нормального сечения), называются коническими поверхностями общего вида. Конические поверхности, имеющие ось, в зависимости от вида нормального сечения бывают:

- 1) **круговые** – нормальное сечение круг (рис. 46);
- 2) **эллиптические** – нормальное сечение эллипс (рис. 47) и другие.

Если за основание конуса принимается фигура его нормального сечения, конус называют **прямым**, если иное сечение – **наклонным**.

Прямой круговой конус изображен на рис. 46а, наклонный круговой конус – на рис. 46б. Основанием такого конуса может быть только эллипс (см. раздел 4), ось его

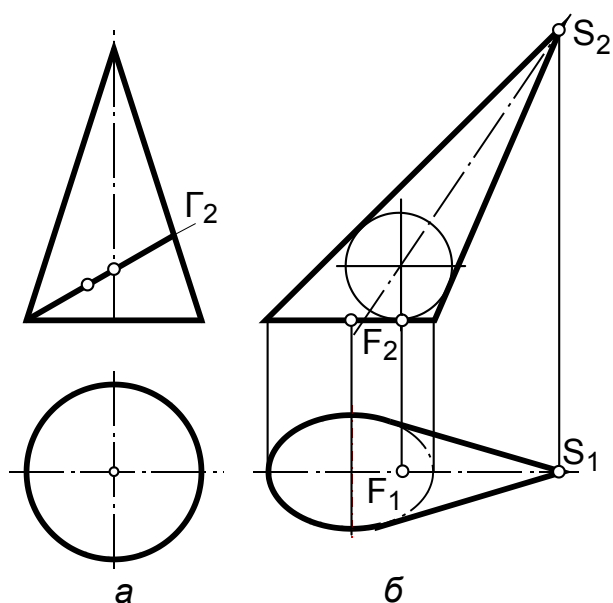


Рис. 46

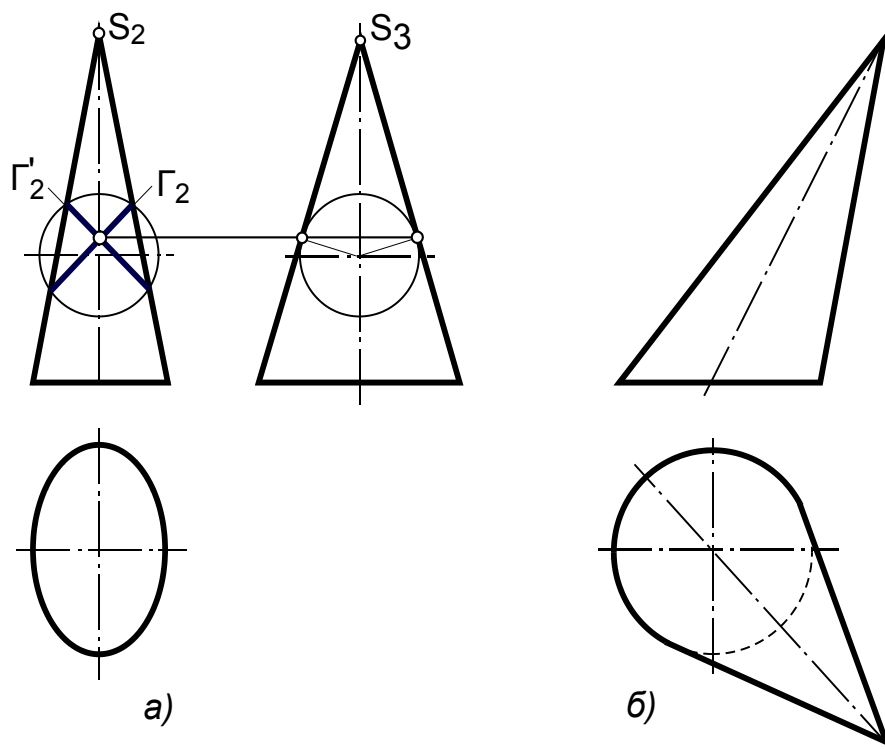


Рис. 47

не проходит через центр основания.

Прямой эллиптический конус показан на рис. 47а. Эллиптический конус (так же как

и эллиптический цилиндр) имеет две системы круговых сечений. Построение круговых сечений поверхностей второго порядка рассматривается в разделе 4.3. Если принять одно из них за основание конуса, получим наклонный эллиптический конус с круговым основанием (рис. 47б). Ось наклонного конуса не проходит через центр основания. Заметим, что у всех развертывающихся линейчатых поверхностей две смежные образующие либо пересекаются (торс, коническая поверхность), либо параллельны (цилиндрическая поверхность).

### **НЕРАЗВЕРТЫВАЮЩИЕСЯ (КОСЫЕ) ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ.**

Неразвертывающиеся линейчатые поверхности в общем случае образуются движением прямолинейной образующей по трем направляющим линиям, которые однозначно задают закон ее перемещения [10]. Направляющие линии могут быть кривыми и прямыми.

Разновидностями косых поверхностей являются линейчатые поверхности с направляющей плоскостью и частные их виды – линейчатые поверхности с плоскостью параллелизма (поверхности Каталана) [13].

В первом случае поверхность однозначно задается двумя направляющими линиями и направляющей плоскостью, которая заменяет третью направляющую линию. Образующая прямая скользит по двум направляющим и сохраняет постоянный угол  $\alpha$  с некоторой плоскостью  $\Sigma$ , которая называется направляющей. В частном случае, если угол  $\alpha$  равен нулю, образующая прямая будет параллельна направляющей плоскости, которая в этом случае называется плоскостью параллелизма.

Поверхности с направляющей плоскостью ( $\alpha \neq 0$ ) называются косыми цилиндрами, если обе направляющие являются кривыми линиями; косыми коноидами, если одна из направляющих – прямая линия; дважды косой плоскостью, если направляющие – скрещивающиеся прямые. Поверхности с плоскостью параллелизма ( $\alpha = 0$ ) в аналогичных случаях соответственно называются прямыми цилиндрами, прямыми коноидами и косой плоскостью.

#### ***Линейчатые поверхности с плоскостью параллелизма (поверхности Каталана)***

##### **Прямой цилиндр**

Прямой цилиндром называется поверхность, образованная движением прямой линии, скользящей по двум криволинейным направляющим, не принадлежащим одной плоскости, и остающейся во всех своих положениях параллельной некоторой заданной плоскости. Эта плоскость называется плоскостью параллелизма. На чертеже (рис. 48) изображен цилиндр, направляющими которого являются кривые  $m(m_1, m_2)$  и  $n(n_1, n_2)$ , а плоскостью параллелизма – плоскость  $\Sigma(\Sigma_1) \perp \Pi_1$ . Все образующие этой поверхности пересекают кривые  $m(m_1, m_2)$  и  $n(n_1, n_2)$  и параллельны плоскости  $\Sigma(\Sigma_1)$ . Если плоскостью параллелизма цилиндра является горизонтальная плоскость проекций  $\Pi_1$ , то все образующие поверхности будут горизонталями.

Через каждую точку поверхности проходит одна образующая. Геометрическая часть определителя цилиндра состоит из двух направляющих кривых линий ( $m$  и  $n$ ) и плоскости параллелизма ( $\Sigma$ ).

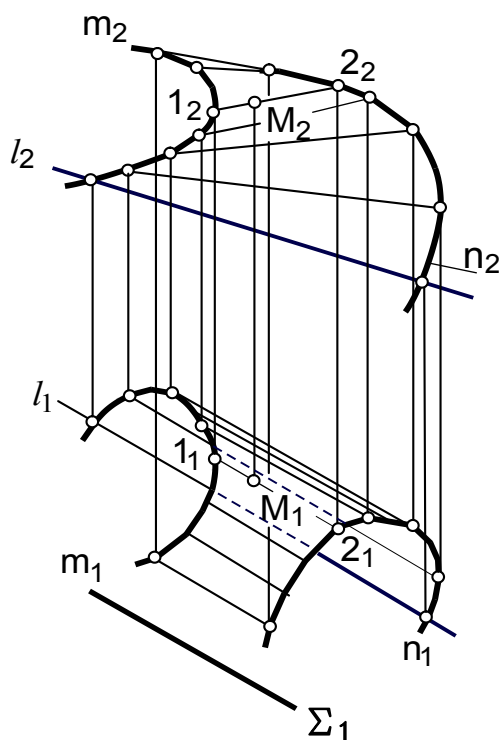


Рис. 48

Алгоритмическая часть определителя состоит из указания о том, что любая образующая поверхности может быть построена как прямая, пересекающая направляющие кривые и параллельная плоскости параллелизма.

### Прямой коноид

Прямым коноидом называется поверхность, образованная движением прямой линии, скользящей по двум направляющим, одна из которых – кривая, а вторая – прямая, и остающейся во всех своих положениях параллельной некоторой плоскости параллелизма. Коноид, направляющими которого являются кривая  $m(m_1, m_2)$  и прямая  $n(n_1, n_2)$ , а плоскостью параллелизма – плоскость  $\Sigma(\Sigma_1) \perp \Pi_1$ , изображен на рис. 49.

Коноид называется дважды прямым, если его прямолинейная направляющая

перпендикулярна плоскости параллелизма. Через каждую точку поверхности проходит одна образующая.

Геометрическая часть определителя коноида состоит из двух направляющих линий (прямой и кривой) и плоскости параллелизма.

Алгоритмическая часть определителя состоит из указания о том, что любая образующая поверхности может быть построена как прямая, пересекающая направляющие линии и параллельная плоскости параллелизма.

### Косая плоскость

Косой плоскостью называется поверхность, образованная движением прямой линии, скользящей по двум скрещивающимся прямым и остающейся во всех своих положениях параллельной некоторой плоскости параллелизма.

Косая плоскость, направляющими которой являются скрещивающиеся прямые  $m(m_1, m_2)$  и  $n(n_1, n_2)$ , а плоскостью параллелизма – плоскость  $\Pi_1$ , показана на рис. 50.

Ту же самую поверхность можно получить, если за направляющие прямые принять любую пару образующих, например  $AB(A_1B_1, A_2B_2)$  и  $CD(C_1D_1, C_2D_2)$ , за образующую прямую – одну из направляющих ( $m$  или  $n$ ) и за плоскость параллелизма – плоскость  $\Sigma(\Sigma_2)$ , параллельную прямым  $m$  и  $n$ . Таким образом, косая плоскость имеет два семейства прямолинейных образующих и две плоскости параллелизма. Образующие одного семейства –

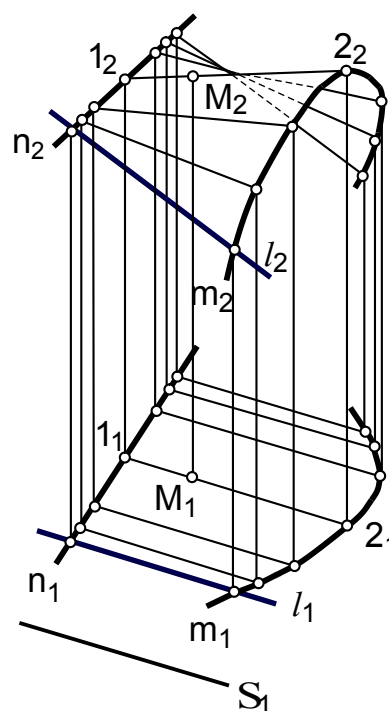


Рис. 49

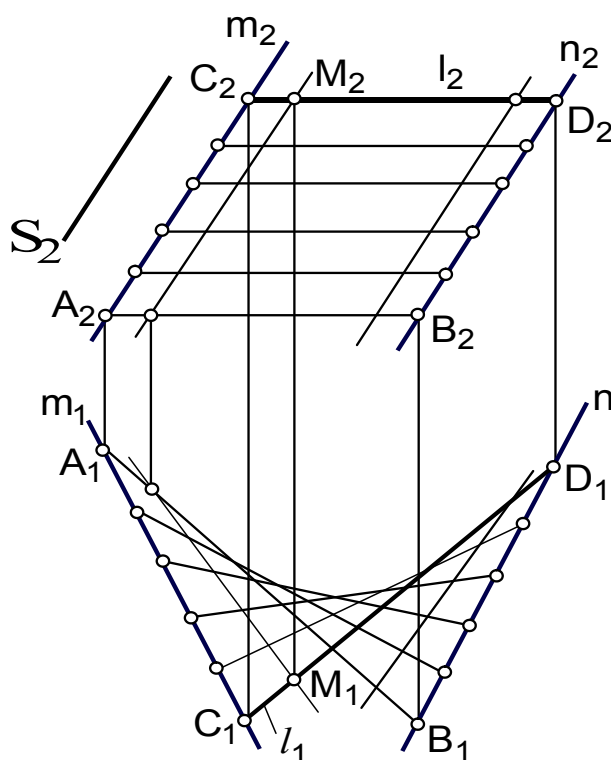


Рис. 50

являются параболом. Плоскость  $\Sigma$  и ей параллельные пересекают поверхность по гиперболам.

Плоскость  $T$ , касательная к поверхности в точке  $O$  пересекает поверхность

скрещивающиеся прямые, каждая образующая одного семейства пересекает все образующие второго. Поэтому через каждую точку поверхности проходят две прямолинейные образующие разных семейств.

Косую плоскость называют также гиперболическим параболоидом, так как при пересечении ее соответствующими плоскостями в сечении можно получить параболы и гиперболы.

На рис. 51 изображена косая плоскость, которую символически можно задать следующим образом:

$\Phi(AB, DC, \Delta)[l_j \cap AB \wedge DC; l_j \parallel \Delta]$  или

$\Phi(AD, BC, \Lambda)[l'_j \cap AD \wedge BC; l'_j \parallel \Lambda]$ ,

Плоскости  $\Gamma$  и  $\Theta$  и им параллельные пересекают поверхность по параболом. Криволинейные очерки поверхности на фронтальной и профильной проекциях

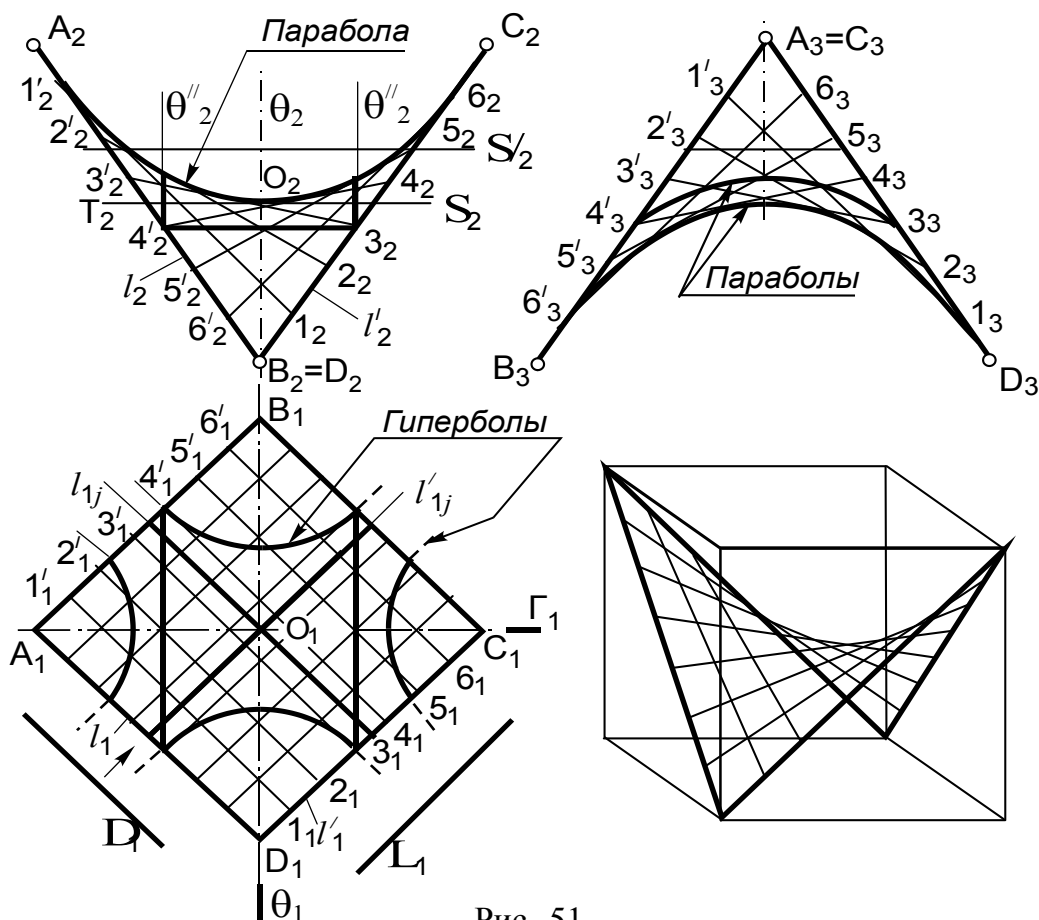


Рис. 51

по двум прямым – образующим  $l_j$  и  $l_j$ .

Геометрическая часть определителя косо́й плоскости состоит из направляющих прямых и плоскости параллелизма: Алгоритмическая часть определителя состоит из указания о том, что любая образующая поверхности может быть построена как прямая, пересекающая направляющие прямые и параллельная плоскости параллелизма.

### ***Винтовые поверхности***

Поверхность, образованная винтовым движением прямой линии, называется линейчатой винтовой поверхностью – геликоидом (винтовое движение характеризуется вращением вокруг некоторой оси  $i$  и поступательным перемещением, параллельным этой оси  $i$ ).

#### ***а. Прямой геликоид***

Если в качестве кривой направляющей коноида взять цилиндрическую винтовую линию, в качестве прямой направляющей – ось винтовой линии, а за плоскость параллелизма – плоскость, перпендикулярную оси винтовой линии, то поверхность, образованная при этих условиях, называется винтовым коноидом или прямым геликоидом (рис. 52). Очевидно, что образующая прямого геликоида пересекает ось  $i$  под прямым углом.

#### ***б. Наклонный геликоид***

Наклонным геликоидом называется поверхность, образованная движением прямой линии, скользящей по двум направляющим (одна из них цилиндрическая винтовая линия, а вторая – ось винтовой линии) и сохраняющей во всех положениях постоянный угол  $\beta$  с направляющей плоскостью, которую располагают перпендикулярно оси винтовой поверхности.

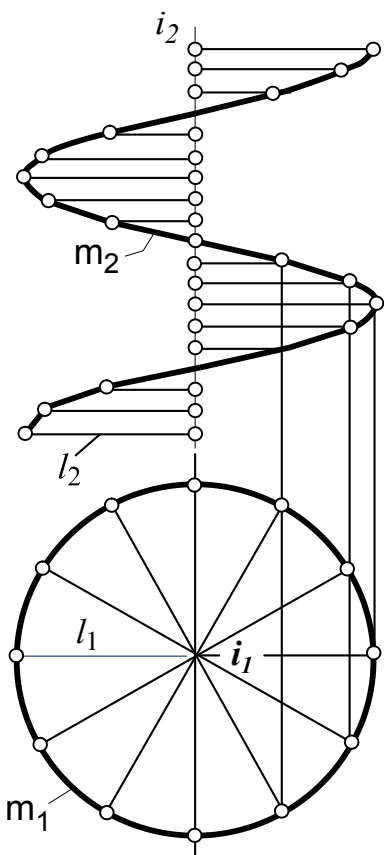


Рис. 52

При построении проекций наклонного геликоида удобно пользоваться направляющим конусом. Направляющий конус соосен с винтовой поверхностью, его образующие наклонены под углом  $\beta$  к плоскости основания.

Образующая прямая перемещается по направляющим и остается во всех своих положениях параллельной соответствующей образующей направляющего конуса. Таким образом, образующая прямая во всех своих положениях пересекает ось  $i$  под постоянным углом  $\alpha \neq 90^\circ$ .

Проекции наклонного геликоида построены на рис. 53. Геометрическая часть определителя наклонного геликоида состоит из направляющих линий ( $m$  и  $i$ ) и угла  $\alpha$ . Алгоритмическая часть определителя состоит из указания о том, что любая образующая поверхности может быть построена как прямая, пересекающая направляющие линии и

параллельная соответствующей образующей направляющего конуса. Плоскость, перпендикулярная оси поверхности, пересекает ее по спирали Архимеда (плоскость  $\Delta$  на рис. 53).

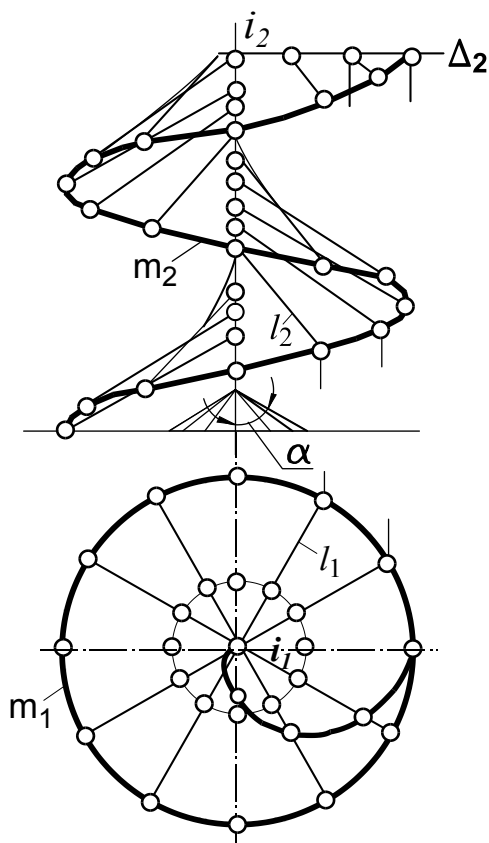


Рис. 53

Рассмотренные винтовые поверхности, так же как и поверхности вращения, обладают свойством сдвигаемости, т. е. поверхность может перемещаться вдоль самой себя без каких-либо деформаций. Это свойство поверхности широко используется в технике при создании винтовых пар (винт-гайка).

### Поверхности вращения

Если перемещение образующей линии представляет собой вращение вокруг некоторой неподвижной прямой (оси), то образованная в этом случае поверхность называется поверхностью вращения (рис. 54).

Образующая линия может быть плоской или пространственной кривой, а также прямой. Каждая точка, например  $B(B_1, B_2)$ , образующей линии  $l(l_1, l_2)$  при вращении вокруг оси  $i(i_1, i_2)$  описывает окружность, которая располагается в плоскости, перпендикулярной оси вращения (см. рис. 54). Эти окружности называются **параллелями**. Следовательно, плоскости,

перпендикулярные оси, пересекают поверхность вращения по параллелям. Линия, например,  $m(m_1, m_2)$  пересечения поверхности вращения плоскостью  $\Delta(\Delta_1)$ , проходящей через ось, называется **меридианом**. Все меридианы поверхности вращения конгруэнтны. Меридиан  $l(l_1, l_2)$ , который является результатом пересечения поверхности вращения с плоскостью уровня  $\Sigma(\Sigma_1)$ , называется **главным**. Проекция главного меридиана на плоскость, которой параллельна плоскость уровня, является очерковой линией соответствующей проекции поверхности вращения.

Множество всех параллелей или меридианов представляет собой непрерывный каркас поверхности вращения. Через каждую точку поверхности проходит одна параллель и один меридиан. Проекции точки располагаются на соответствующих проекциях параллели или меридиана. Задать точку на поверхности или построить вторую проекцию точки, если одна задана, можно при помощи параллели или меридиана, которые проходят через эту точку.

Геометрическая часть определителя поверхности вращения состоит из оси вращения  $i$  и образующей линии  $l$ . Чертеж поверхности вращения будет простейшим, если ось вращения расположить перпендикулярно одной из плоскостей проекций, а в качестве образующей линии взять главный меридиан (рис. 54б).

Алгоритмическая часть определителя поверхности вращения состоит из операции вращения образующей  $l$  вокруг оси  $i$  и построения каркаса параллелей необходимой плотности.

При проектировании различных инженерных сооружений, машин и механизмов наибольшее распространение получили поверхности, образующиеся вращением прямой линии и кривых второго порядка.

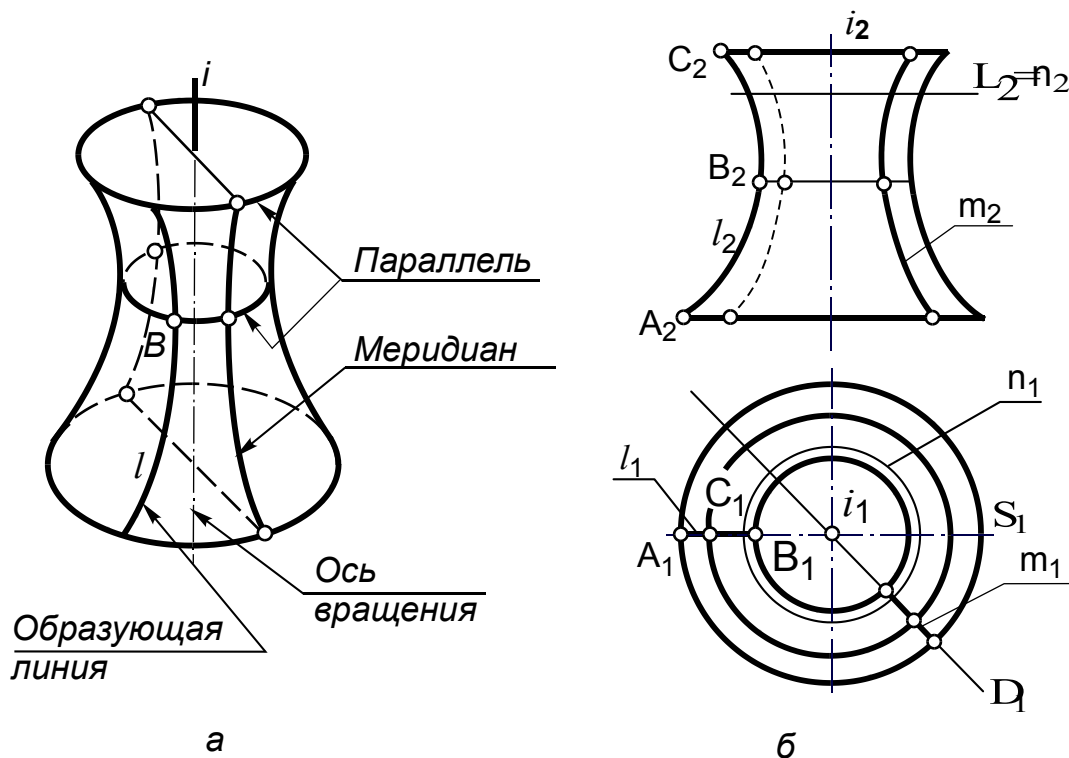


Рис. 54

**а. Поверхности, образуемые вращением прямой (линейчатые поверхности вращения)**

Вращением прямой линии образуются:

- 1) **цилиндр** вращения, если прямая  $l$  параллельна оси  $i$  (рис. 55а);
- 2) **конус** вращения, если прямая  $l$  пересекает ось  $i$  (рис. 55б);
- 3) **однополостный гиперболоид** вращения, если прямая  $l(BC)$  скрещивается с осью  $i$  (рис. 55в).

Поверхность имеет две образующие линии  $l(BC)$  и  $l'(B'C')$ , наклоненные в разные стороны и пересекающиеся в точке (А), принадлежащей наименьшей параллели. Отрезок ОА является кратчайшим расстоянием между образующей и осью. Таким образом, на поверхности однополостного гиперболоида располагаются два семейства прямолинейных образующих. Все образующие одного семейства – скрещивающиеся прямые. Каждая образующая одного семейства пересекает все образующие другого. Через каждую точку поверхности проходят две образующие разных семейств. Меридианом поверхности является гипербола.

Все рассмотренные линейчатые поверхности вращения являются поверхностями второго порядка.

Построение проекций точки, принадлежащей каждой из них, можно выполнить при помощи параллели или прямолинейной образующей, проходящих через нее.

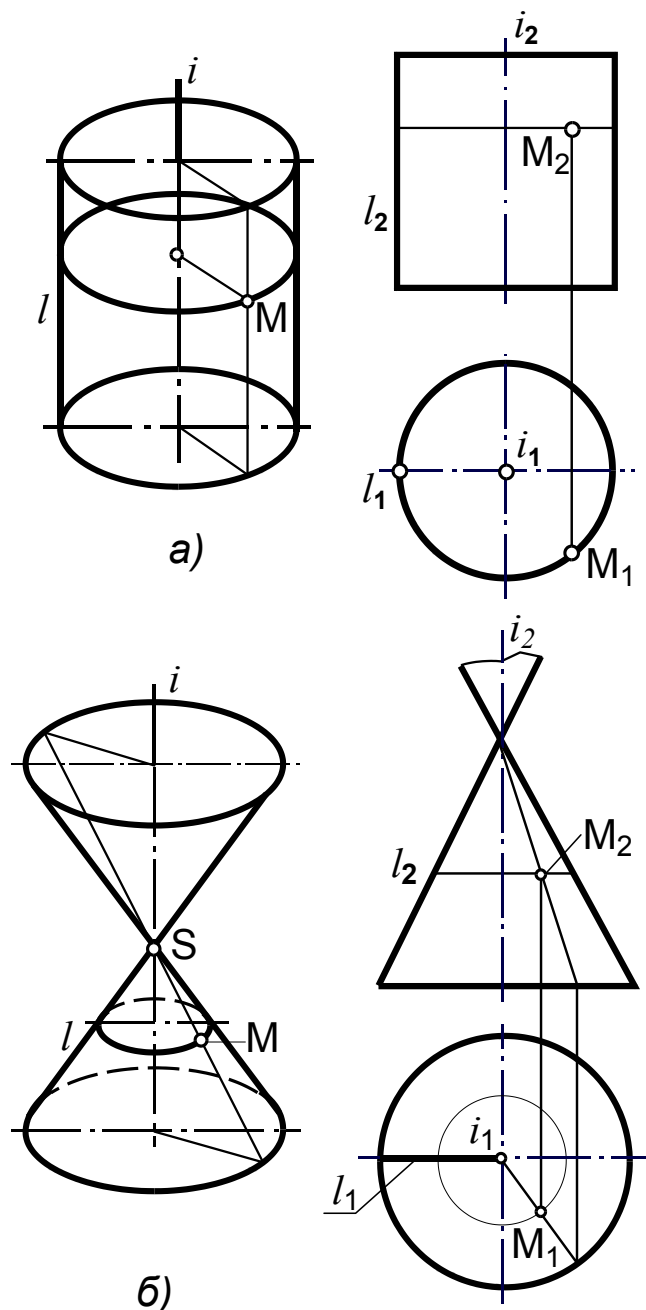


Рис. 55

#### **б. Поверхности, образуемые вращением кривых второго порядка вокруг их осей**

1. **Сфера** образуется вращением окружности вокруг ее диаметра (рис.56).

2. **Эллипсоид** вращения образуется вращением эллипса вокруг большой или малой оси.

3. **Параболоид** вращения образуется вращением параболы вокруг ее оси.

4. **Однополостный гиперboloид** вращения образуется вращением гиперболы вокруг ее мнимой оси. Эта поверхность образуется также вращением прямой (рис. 55в).

5. **Двуполостный гиперboloид** вращения образуется вращением гиперболы вокруг ее действительной оси.

При вращении асимптот гиперболы образуется конус вращения, который называется асимптотическим по отношению к поверхности гиперboloида.

Все рассмотренные поверхности вращения являются поверхностями второго порядка. Построение проекции точки, принадлежащей каждой из них, можно выполнить при помощи параллели, проходящей через эту точку.

#### **в. Поверхности, образуемые вращением кривых второго порядка вокруг оси, не являющейся осью кривой, но расположенной в ее плоскости.**

Существует теорема: «При вращении плоской или пространственной алгебраической кривой  $n$ -го порядка вокруг произвольной оси образуется алгебраическая поверхность вращения, имеющая в общем случае порядок  $2n$ ». Из этой теоремы следует, что при вращении кривой второго порядка вокруг оси, не являющейся осью кривой, но расположенной в ее плоскости, образуется поверхность четвертого порядка. Наиболее распространенной поверхностью четвертого порядка является тор.

**Тором** называется поверхность, образованная вращением окружности вокруг оси, принадлежащей плоскости окружности, но не проходящей через ее

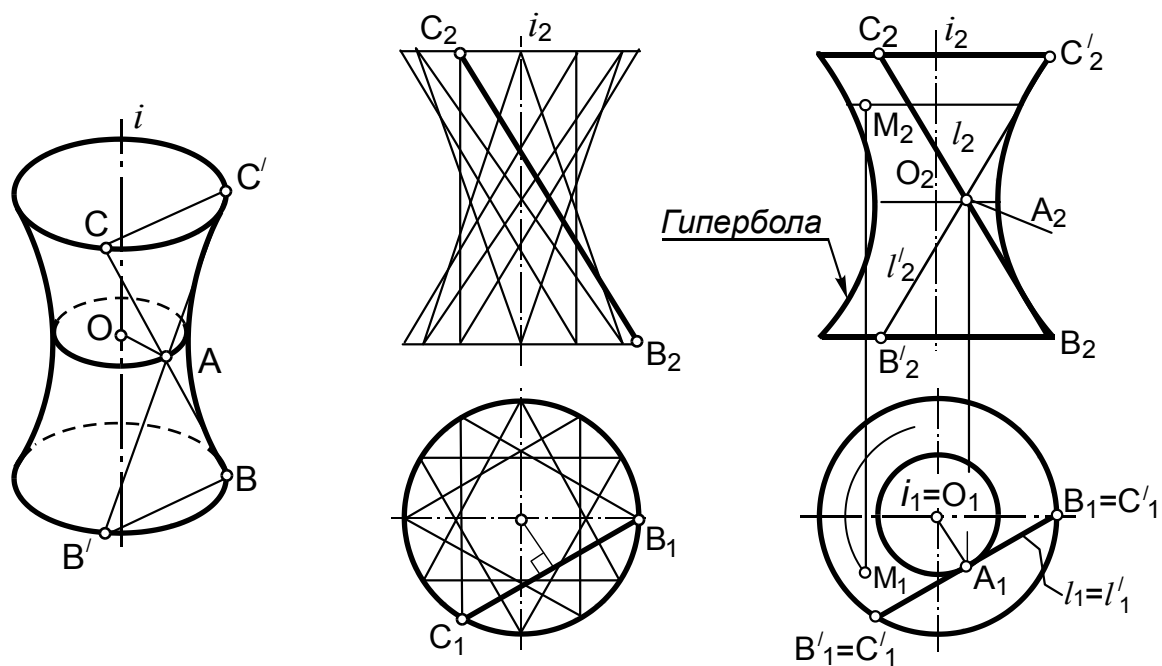


Рис. 55в

центр. При этом ось вращения может пересекать окружность, касаться ее и располагаться вне окружности. В первых двух случаях тор называется закрытым, в последнем — открытым, или кольцом. На рис. 57 изображены проекции тора-кольца.

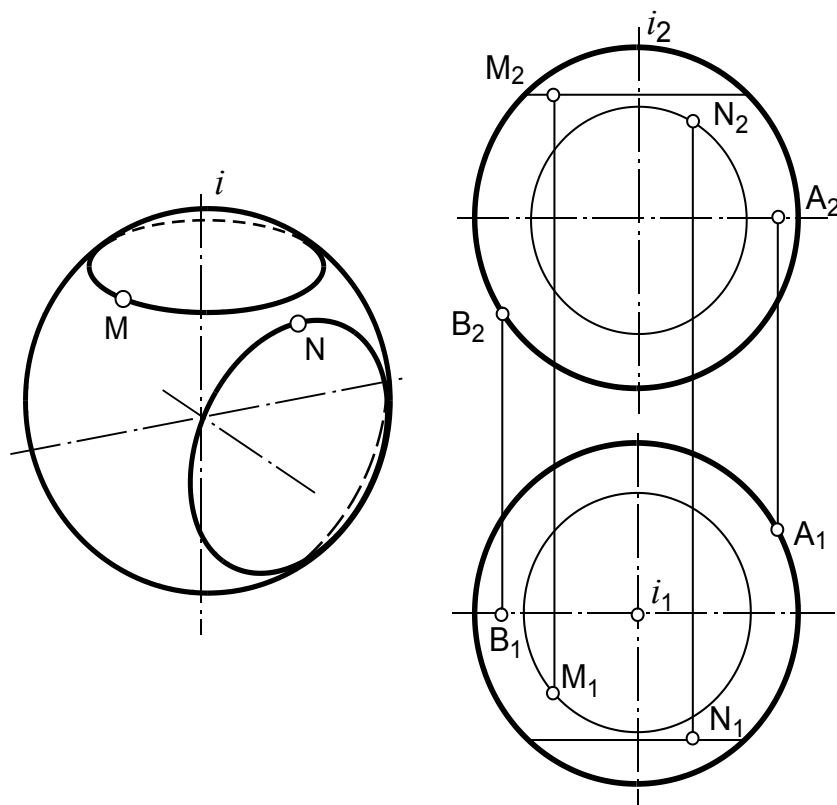
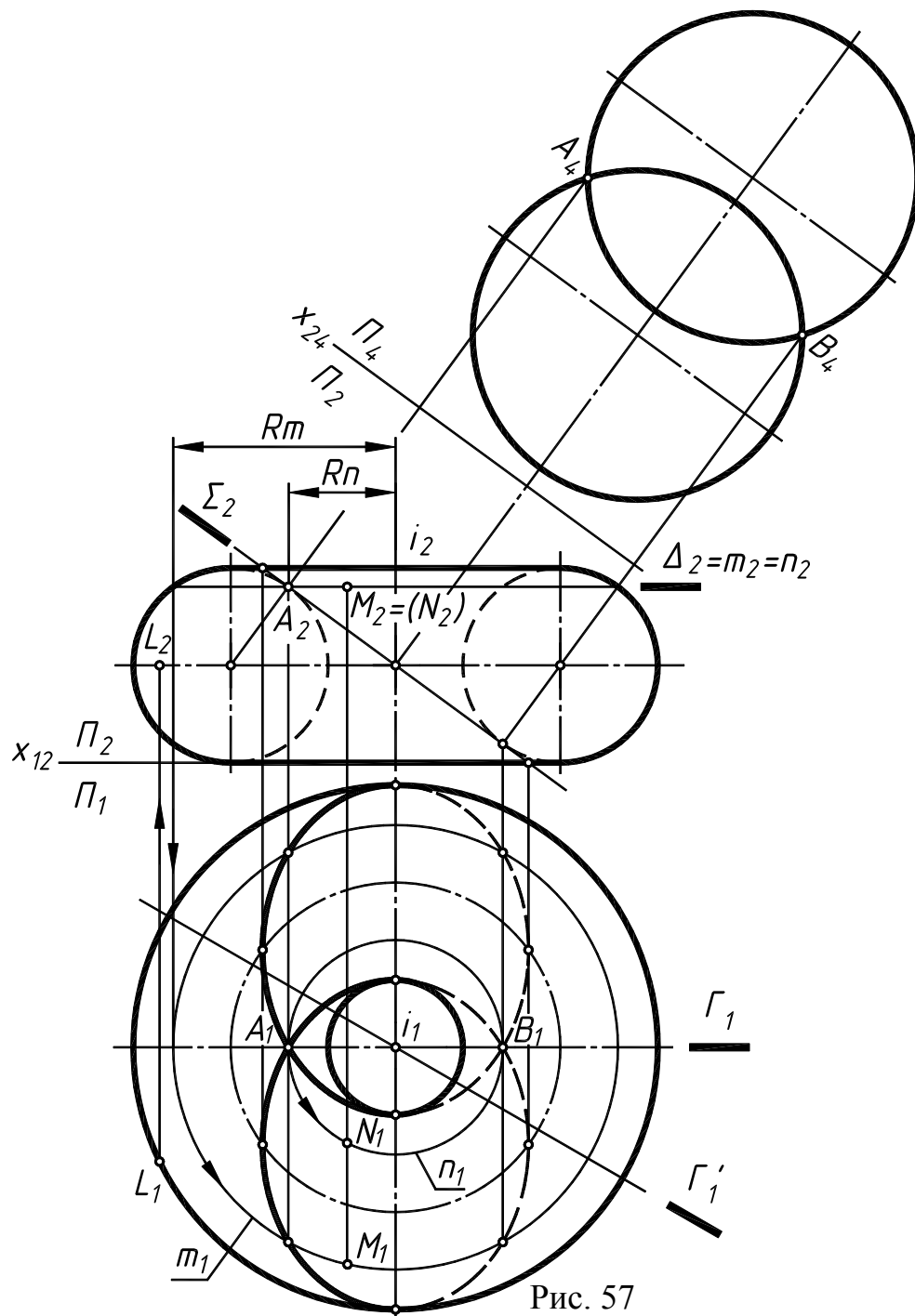


Рис. 56

Являясь поверхностью четвертого порядка, тор пересекается произвольной прямой в четырех точках, произвольной плоскостью по кривой четвертого порядка. Эта кривая распадается на две окружности (параллели), если плоскость перпендикулярна оси тора (плоскость  $\Delta$  на рис. 57), на две окружности (меридиан), если плоскость проходит через ось тора (плоскости  $\Gamma$  и  $\Gamma'$ ), на две окружности, если плоскость проходит через центр тора и касается его меридиана (плоскость  $\Sigma$ ). Проекции точек, например  $M$  и  $N$ , принадлежащих поверхности тора, можно построить при помощи параллелей  $m$  и  $n$  (см. рис. 57). Точка  $M$  принадлежит наружной поверхности тора (радиус параллели  $R_m$ ). Точка  $N$  принадлежит внутренней поверхности тора (радиус параллели  $R_n$ ).



## Построение очерков проекций поверхностей вращения

Известно, что очерком проекции поверхности является проекция соответствующей линии видимого контура. Очерк проекции является границей, отделяющей проекцию поверхности от остальной части плоскости проекции.

Рассмотрим два случая построения очерков проекций поверхностей вращения.

1. Ось  $i$  поверхности вращения перпендикулярна плоскости проекций. Поверхность вращения, ось которой перпендикулярна плоскости  $\Pi_1$ , изображена

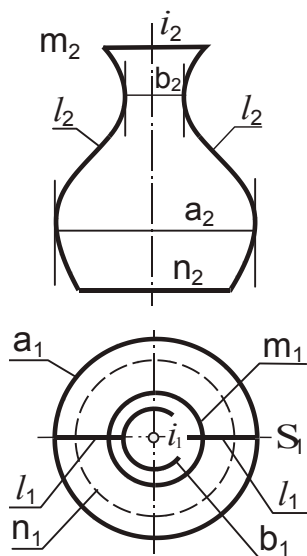


Рис. 58

на рис. 58. Здесь очерком горизонтальной проекции являются горизонтальные проекции  $a_1$  и  $b_1$  наибольшей  $a$  и наименьшей  $b$  параллелей. Кроме этого на чертеже изображают горизонтальные проекции  $m_1$  и  $n_1$  верхней  $m$  и нижней  $n$  параллелей, ограничивающих поверхность. Таким образом, линиями видимого контура поверхности вращения (если  $i \perp \Pi_1$ ) относительно плоскости  $\Pi_1$  являются наибольшая и наименьшая параллели, а в некоторых случаях и крайние параллели, ограничивающие поверхность. Главный меридиан  $l(l_1, l_2)$  является линией видимого контура поверхности относительно фронтальной плоскости проекций и проецируется на нее без искажения. Следовательно, очерк фронтальной проекции поверхности вращения (при  $i \perp \Pi_1$ ) образуется фронтальными проекциями  $l_2$  главного меридиана  $m_2$  и  $n_2$  верхней и нижней параллелей, ограничивающих поверхность.

2. Ось  $i$  поверхности вращения является линией уровня.

Если ось  $i$  поверхности вращения является горизонталью (или фронталью), то очерком горизонтальной проекции (или фронтальной) будет служить соответственно горизонтальная или фронтальная проекции главного меридиана. Проекция поверхности на другую плоскость проекций будет ограничена линией, представляющей собой проекцию линии видимого контура поверхности относительно этой плоскости проекций. Эта линия может быть построена при помощи сфер, вписанных в поверхность вращения.

Рассмотрим примеры.

1. Осью  $i(i_1, i_2)$  конуса вращения является фронталь (рис. 59). Очерк фронтальной проекции конуса представляет собой треугольник, боковые стороны которого являются фронтальными проекциями главного меридиана, а основание - фронтальной проекцией параллели, ограничивающей поверхность.

Очерк горизонтальной проекции конуса строится следующим образом. Вписываем в конус вращения сферу, приняв за центр произвольную точку  $O(O_1, O_2)$  оси  $i(i_1, i_2)$ . Сфера соприкасается с поверхностью конуса по параллели  $k(k_2)$ . Линией видимого контура сферы относительно плоскости  $\Pi_1$  (при взгляде сверху) будет окружность  $a(a_1, a_2)$ , расположенная в плоскости, параллельной  $\Pi_1$ . Параллель  $k(k_2)$  пересекается с окружностью  $a(a_1, a_2)$ , в точках  $1(1_1, 1_2)$  и  $2(2_1, 2_2)$ . Точки 1 и 2 являются точками смены видимости параллели  $k(k_1, k_2)$ . Множество точек типа 1 и 2, построенных аналогично, образует линию видимого

контура поверхности конуса относительно плоскости  $\Pi_1$ . Для конуса вращения эта линия представляет собой пару образующих  $(S_1)=m$  и  $(S_2)=m'$ , для построения которых

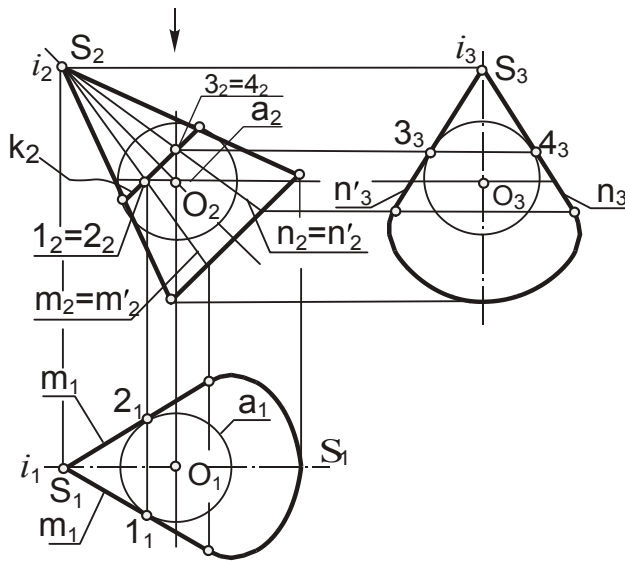


Рис. 59

относительно плоскости  $\Pi_2$  (при взгляде спереди) выполняется следующим образом. вписываем в поверхность вращения несколько сфер (на рис.60 показано пять сфер). Каждая из этих сфер соприкасается с поверхностью вращения по параллелям  $k(k_1), k'(k'_1), \dots$ . Линиями видимого контура сфер относительно плоскости  $\Pi_2$  (при взгляде спереди) будут окружности  $a(a_1, a_2), a'(a'_1, a'_2), \dots$  расположенные в плоскостях, параллельных  $\Pi_2$ . Параллели  $\kappa(\kappa_1), \kappa'(\kappa'_1), \dots$  пересекаются соответственно с окружностями  $a(a_1, a_2), a'(a'_1, a'_2), \dots$  в точках  $1(1_1, 1_2)$  и  $2(2_1, 2_2)$ ,  $3(3_1, 3_2)$  и  $4(4_1, 4_2)$ ,  $5(5_1, 5_2)$  и  $6(6_1, 6_2)$ ,  $7(7_1, 7_2)$  и  $8(8_1, 8_2)$ ,  $9(9_1, 9_2)$  и  $10(10_1, 10_2)$ . Точки 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и образуют линию видимого контура  $m(m_1, m_2)$  поверхности относительно  $\Pi_2$ . Ее фронтальная проекция, проходящая через точки  $1_2, 3_2, 5_2, 7_2, 10_2, 8_2, 6_2, 4_2$  и  $2_2$  является очерком фронтальной проекции поверхности вращения.

Если осью поверхности вращения является прямая общего положения, то способом замены плоскостей проекций нужно преобразовать ее в линию уровня и построить очерки проекций поверхности в новой системе плоскостей проекций, а затем обратным преобразованием

достаточно одной вспомогательной сферы. Правая часть горизонтальной проекции конуса ограничивается эллипсом, в который проецируется параллель, ограничивающая поверхность конуса. Аналогично построен очерк профильной проекции конуса вращения.

2. Осью  $i(i_1, i_2)$  поверхности вращения (тора) является горизонталь (рис. 60). Очерком горизонтальной проекции является горизонтальная проекция главного меридиана поверхности вращения.

Построение линии  $m(m_1, m_2)$  видимого контура поверхности

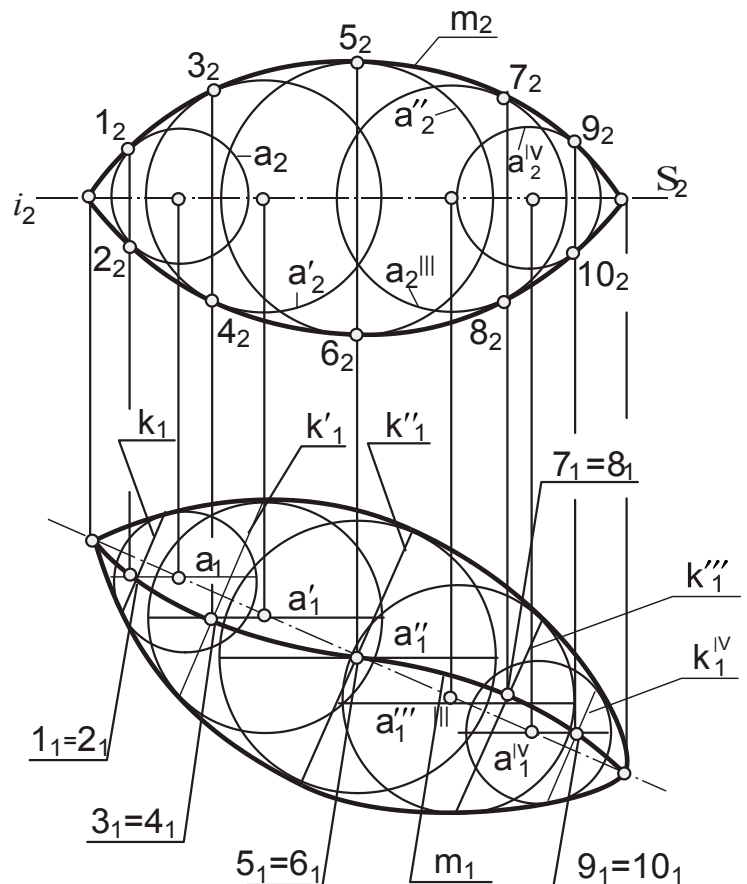


Рис. 60

построить очерки проекций поверхности в исходной системе.

### Глава 3. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА

Во многих случаях трудоемкость решения задачи зависит не столько от сложности ее условия, сколько от положения заданных геометрических фигур относительно плоскостей проекций. Во всех случаях, когда заданные геометрические фигуры являются проецирующими, решение задачи, как правило, упрощается. Такое положение геометрических фигур относительно плоскостей проекций, при котором мы непосредственно по чертежу получаем ответ на поставленный в задаче вопрос, называется наивыгоднейшим. Например, по рис. 61б можно сразу определить расстояние между параллельными прямыми  $a$  и  $b$ , а по рис. 61а, этого сделать нельзя.

Таким образом, при решении той или иной задачи бывает целесообразно преобразовать чертеж так, чтобы заданные геометрические фигуры оказались

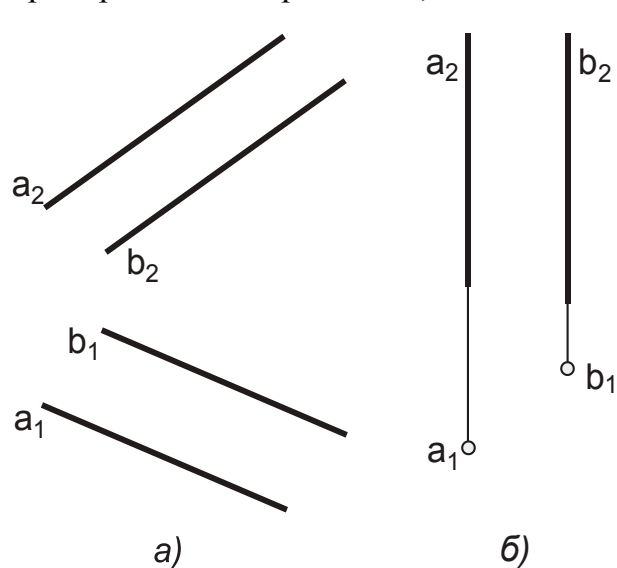


Рис. 61

бы в наивыгоднейшем положении относительно плоскостей проекций. Для этого существуют различные способы преобразования комплексного чертежа. Каждый из них основан на одном из следующих принципов:

- 1) на изменении положения плоскостей проекций относительно неподвижных геометрических фигур;
- 2) на изменении положения заданных геометрических фигур относительно неподвижных плоскостей проекций;
- 3) на изменении направления проецирования, т. е. на замене

ортогонального проецирования косоугольным или центральным на одну из старых плоскостей проекций или на какую-нибудь новую. Рассмотрим некоторые из них.

#### 3.1. СПОСОБ ЗАМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

Сущность способа состоит в том, что одну из заданных плоскостей проекций ( $\Pi_1$  или  $\Pi_2$ ) заменяют новой плоскостью  $\Pi_4$ . При этом положение второй плоскости проекций и заданных геометрических фигур остается неизменным. Новая плоскость проекций  $\Pi_4$  выбирается с таким расчетом, чтобы она занимала частное положение по отношению к рассматриваемой геометрической фигуре и была при этом перпендикулярной к незаменяемой плоскости проекций. Таким

образом, исходная (старая) система плоскостей проекций  $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$  может быть

преобразована в новую систему  $\frac{\Pi_2}{\Pi_4}$  при замене плоскости  $\Pi_1$  плоскостью  $\Pi_4 \perp \Pi_2$  или в систему  $\frac{\Pi_4}{\Pi_1}$  при замене плоскости  $\Pi_2$  плоскостью  $\Pi_4 \perp \Pi_1$ . Каждая из этих полученных систем может быть преобразована в новую путем замены плоскости проекций, не заменявшейся в предыдущем преобразовании. Таким образом, система  $\frac{\Pi_2}{\Pi_4}$  может быть преобразована в систему  $\frac{\Pi_5}{\Pi_4}$  при замене плоскости  $\Pi_2$  плоскостью  $\Pi_5 \perp \Pi_4$ , а система  $\frac{\Pi_4}{\Pi_1}$  – в систему  $\frac{\Pi_4}{\Pi_5}$  при замене плоскости  $\Pi_1$  плоскостью  $\Pi_5 \perp \Pi_4$  и т. д.

Такое последовательное преобразование исходной системы плоскостей проекций позволяет получить новую систему, в которой рассматриваемые геометрические фигуры окажутся в наивыгоднейшем положении относительно плоскостей проекций. Большинство задач решается с применением одного или двух последовательных преобразований исходной системы плоскостей проекций. Одновременно можно заменять только одну плоскость проекций  $\Pi_1$  (или  $\Pi_2$ ), другая плоскость  $\Pi_2$  (или  $\Pi_1$ ) должна оставаться неизменной.

Все свойства геометрических фигур и их изображений, ранее рассмотренные в исходной  $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$  системе, справедливы и для новой системы плоскостей проекций.

Каждая новая плоскость проекций  $\Pi_4, \Pi_5, \dots$  условно называется так же, как та из основных, которую она заменяет. Так, например, плоскость  $\Pi_4$ , заменяющая горизонтальную плоскость  $\Pi_1$ , условно называется также «горизонтальной», хотя она не занимает горизонтального положения в пространстве.

Рассмотрим инварианты преобразования, позволяющие по чертежу объекта, выполненному в старой системе, построить чертеж в новой системе плоскостей проекций.

### **Замена фронтальной плоскости проекций** (преобразование системы $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$ в систему $\frac{\Pi_4}{\Pi_1}$ )

Исходная (старая) система плоскостей проекций  $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$ , точка  $A$  пространства, ее ортогональные, проекции  $A_1$  и  $A_2$ , изображены на рис. 62а.

Заменим фронтальную плоскость проекций  $\Pi_2$ , новой плоскостью  $\Pi_4$  (которую условно будем называть тоже фронтальной), перпендикулярной к  $\Pi_1$ , и образующей с плоскостью  $\Pi_2$  некоторый угол (в случае проецирования точки этот угол произволен). В результате получим новую систему плоскостей проекций  $\frac{\Pi_4}{\Pi_1}$ . Плоскость  $\Pi_1$  является общей для старой и новой систем

плоскостей проекций. В новой системе  $\frac{\Pi_4}{\Pi_1}$  имеем:  $X_{14} = \Pi_1 \cap \Pi_4$  – новая ось

проекций,  $A_1$  и  $A_4$  – ортогональные проекции точки  $A$ .

При переходе от старой системы  $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$  к новой  $\frac{\Pi_4}{\Pi_1}$  остаются неизменными

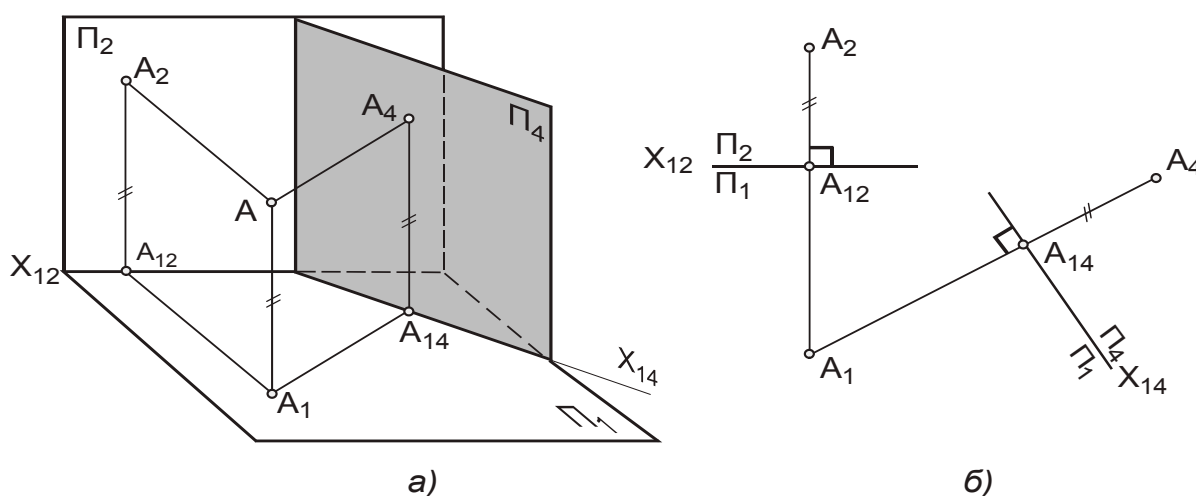


Рис. 62

(являются инвариантами преобразования):

- 1) плоскость  $\Pi_1$  и точка  $A$ ;
- 2) горизонтальная проекция  $A_1$ , точки  $A$ ;
- 3) расстояние точки  $A$  до плоскости  $\Pi_1$ , т. е.  $|AA_1| = |A_2A_{12}| = |A_4A_{14}|$ .

Выявленные инварианты преобразования позволяют построить по комплексному чертежу точки в старой системе плоскостей проекций ее комплексный чертеж в новой системе. Для этого на комплексном чертеже точки  $A$  ( $A_1, A_2$ ) проводим новую ось проекций  $x_{14}$  (рис. 62б), положение которой определяется положением новой фронтальной плоскости проекций  $\Pi_4$ . Из точки  $A_1$  проводим линию связи, перпендикулярную новой оси проекций  $x_{14}$ . На линии связи от точки  $A_{14}$  откладываем отрезок  $|A_{14}A_4| = |A_{12}A_2|$ . Полученная таким образом точка  $A_4$  является проекцией точки  $A$  на плоскость  $\Pi_4$ . В новой системе

плоскостей проекций  $\frac{\Pi_4}{\Pi_1}$  положение точки  $A$  определяется проекциями  $A_1$  и  $A_4$ .

### Замена горизонтальной плоскости проекций

(преобразование системы  $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$  в систему  $\frac{\Pi_2}{\Pi_4}$ )

Исходная (старая) система плоскостей проекций  $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$ , точка  $A$  пространства, ее ортогональные, проекции  $A_1$  и  $A_2$ , изображены на рис.63а.

Заменяем горизонтальную плоскость проекций  $\Pi_1$ , новой плоскостью  $\Pi_4$  (которую условно будем называть тоже горизонтальной), перпендикулярной к  $\Pi_2$ , и образующей с плоскостью  $\Pi_1$  некоторый угол (в случае проецирования точки величина угла произвольна). В результате получим новую систему плоскостей проекций  $\frac{\Pi_2}{\Pi_4}$ . Плоскость  $\Pi_2$ , является общей для старой и новой

систем плоскостей проекций. В новой системе  $\frac{\Pi_2}{\Pi_4}$  имеем:  $x_{24} = \Pi_2 \cap \Pi_4$  – новая ось проекций,  $A_2$  и  $A_4$  – ортогональные проекции точки  $A$ .

При переходе от старой системы  $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$  к новой  $\frac{\Pi_2}{\Pi_4}$  остаются неизменными (являются инвариантами преобразования):

- 1) плоскость  $\Pi_2$  и точка  $A$ ;
- 2) фронтальная проекция  $A_2$ , точки  $A$ ;
- 3) расстояние точки  $A$  до плоскости  $\Pi_2$ , т. е.  $|AA_2| = |A_1A_{12}| = |A_4A_{24}|$ .

Выявленные инварианты преобразования позволяют построить по

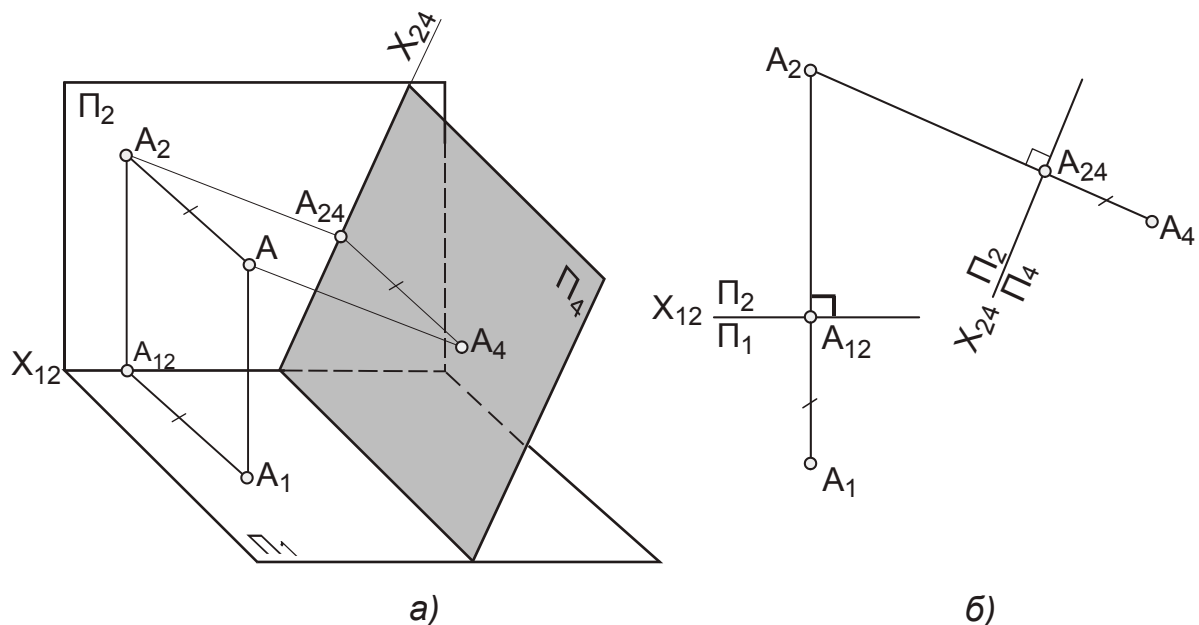


Рис. 63

комплексному чертежу точки в старой системе плоскостей проекций ее чертеж в новой системе. Для этого на комплексном чертеже точки  $A$  ( $A_1, A_2$ ) проводим новую ось проекций  $x_{24}$  (рис. 63б), положение которой определяется положением новой горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_4$ . Из точки  $A_2$  проводим линию связи, перпендикулярную новой оси проекций  $x_{24}$ . На линии связи от точки  $A_{24}$  откладываем отрезок  $|A_{24}A_4| = |A_{12}A_1|$ . Полученная точка  $A_4$  является проекцией

точки  $A$  на плоскость  $\Pi_4$ . В новой системе плоскостей проекций  $\frac{\Pi_2}{\Pi_4}$  положение точки  $A$  определяется проекциями  $A_2$  и  $A_4$ .

При необходимости выполнить две последовательные замены плоскостей проекций преобразование выполняется так, как показано на рис. 64.

Подумайте и выполните преобразование комплексного чертежа точки  $A$  в системе  $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$  в комплексный чертеж в системе  $\frac{\Pi_2}{\Pi_4}$ , а затем в системе  $\frac{\Pi_4}{\Pi_5}$ .

При решении задач с применением способа замены плоскостей проекций удобнее исходный комплексный чертеж задавать в основной системе изображения.

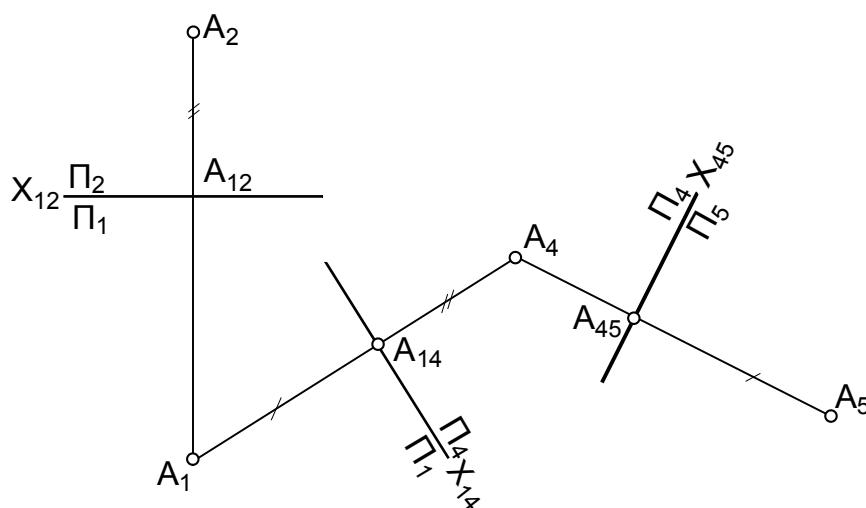


Рис. 64

Если же исходный чертеж выполнен в безосной системе, то можно зафиксировать плоскости проекций  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  в каком-либо удобном положении. Эта пространственная операция отражается на комплексном чертеже проведением оси проекций между горизонтальной и фронтальной проекциями объекта.

Рассмотрим характерные примеры решения геометрических задач с использованием способа замены плоскостей проекций.

### Основные задачи, решаемые способом замены плоскостей проекций

**Задача 1.** Преобразовать прямую общего положения (рис. 65) в линию уровня (горизонталь или фронталь).

**Решение.** Для решения задачи необходимо заменить плоскость проекций  $\Pi_1$ , или  $\Pi_2$  новой плоскостью проекций  $\Pi_4$ , параллельной прямой  $l$  и перпендикулярной к незаменяемой плоскости проекций. Для того чтобы прямая  $l$  в новой системе плоскостей проекций стала, например,

фронталью, заменяем фронтальную плоскость проекций  $\Pi_2$  новой плоскостью  $\Pi_4 \perp \Pi_1$  и параллельной прямой  $l$ .

**Построение на комплексном чертеже.**

1) проводим новую ось проекций  $x_{14}$  параллельно  $l_1$  на произвольном расстоянии от нее; такое положение оси  $x_{14}$  обусловливается тем, что  $\Pi_4$  параллельна  $l$ . В частном случае, если плоскость  $\Pi_4$  проведена непосредственно через прямую  $l$ , ось  $x_{14} = l_1$ ;

2) выберем на прямой  $l$  две точки  $A(A_1A_2)$  и  $B(B_1B_2)$ ;

3) построим проекции точек  $A$  и  $B$  на плоскости  $\Pi_4$ ;

4) прямая  $l_4(A_4B_4)$  является проекцией прямой  $l$  на плоскость  $\Pi_4$ . Прямая

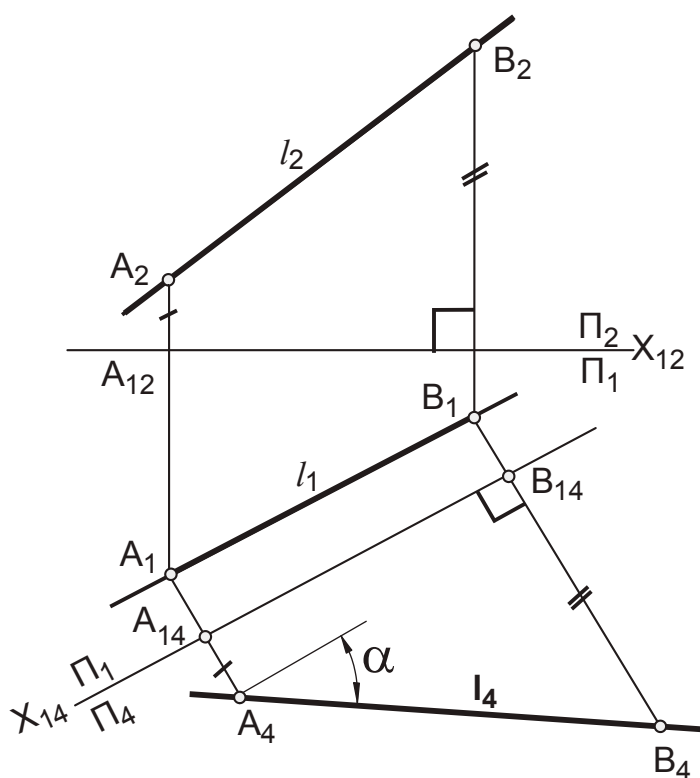


Рис. 65

$l(A, B)$  в новой системе плоскостей проекций  $\frac{\Pi_4}{\Pi_1}$  является фронталью.

**Примечания:**

1. Отрезок  $[AB]$  прямой  $l$  проецируется на плоскость  $\Pi_4$  в истинную величину, т.е.  $|A_4B_4| = |AB|$

2.  $\alpha$  – величина угла наклона прямой  $l$  к плоскости  $\Pi_1$ .

Подумайте и решите задачу 1 в безосной системе изображения.

Преобразуйте прямую  $l$  так, чтобы она стала в новой системе плоскостей проекций горизонталью.

**Задача 2.** Преобразовать линию уровня в проецирующую прямую.

**Решение.** Допустим, что заданная линия уровня (рис. 66) является горизонталью  $h(h_1, h_2)$ . Для решения задачи заменяем плоскость  $\Pi_2$  исходной системы  $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$  плоскостью  $\Pi_4 \perp h$ , при этом плоскость  $\Pi_4$  будет перпендикулярна

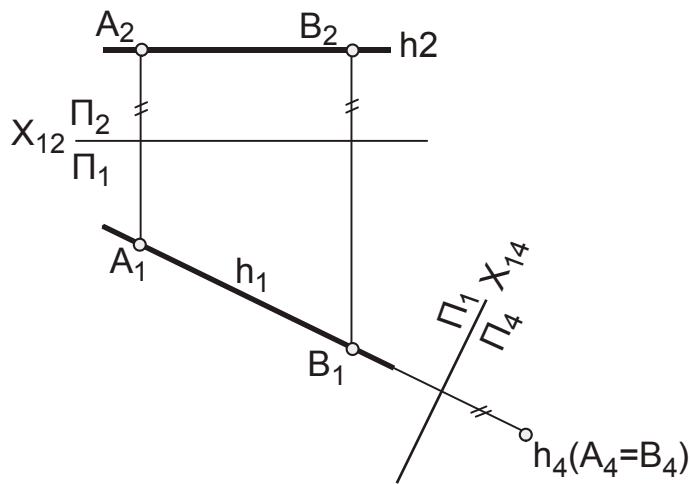


Рис. 66

$\Pi_1$  так как  $h \parallel \Pi_1$  и образует с ней новую систему плоскостей проекций  $\frac{\Pi_4}{\Pi_1}$ .

**Построения на комплексном чертеже:**

1) проводим новую ось проекций  $x_{14} \perp h_1$ ; такое положение оси обуславливается тем, что  $\Pi_4 \perp h$ ;

2) выберем на прямой  $h$  две точки  $A(A_1, A_2)$  и  $B(B_1, B_2)$ ;

3) построим проекции точек  $A$  и  $B$  на плоскости  $\Pi_4$ ; так как расстояния точек  $A$  и  $B$  до плоскости  $\Pi_1$  одинаковы, то проекции их на плоскости  $\Pi_4$  совпадут, т. е.  $h_4 = A_4 = B_4$ . Прямая  $h(h_1, h_4)$  в новой системе плоскостей проекций является фронтально проецирующей.

Задайте самостоятельно комплексный чертеж фронтали  $f$  и преобразуйте ее в проецирующую прямую.

Подумайте и решите задачу 2 в безосной системе изображений.

Прямую общего положения преобразовать в проецирующую заменой только одной плоскости проекций нельзя, так как плоскость  $\Pi_4$  перпендикулярная прямой, не будет перпендикулярна ни одной из старых плоскостей проекций, и, следовательно, не образует ни с одной из них прямоугольной системы плоскостей проекций.

Для того чтобы прямую общего положения преобразовать в проецирующую, необходимо выполнить две последовательные замены плоскостей проекций. Вначале прямую следует преобразовать в линию уровня, а затем линию уровня преобразовать в проецирующую. На рис. 67 показано преобразование прямой  $l$  общего положения в горизонтально проецирующую.

Прямую  $l$  общего положения преобразуйте во фронтально проецирующую (чертеж задайте самостоятельно).

**Задача 3.** Преобразовать плоскость общего положения в проецирующую (рис. 68).

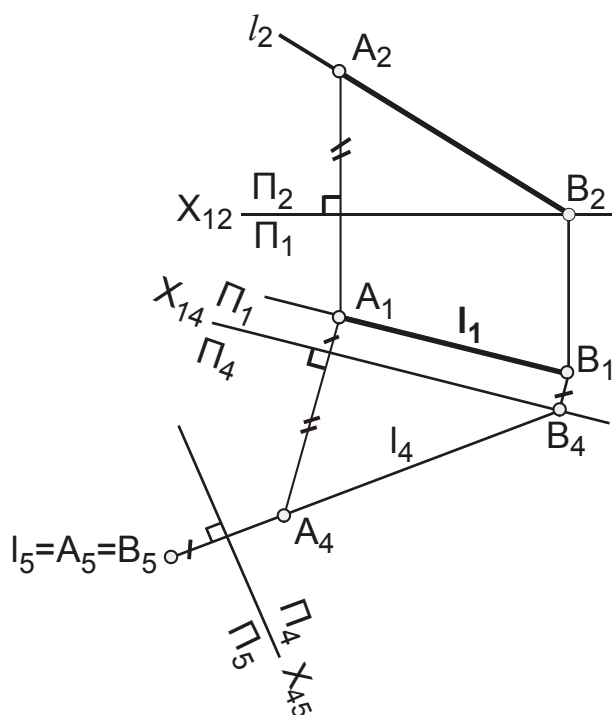


Рис. 67

преобразована во фронтально проецирующую (см. рис. 68) путем преобразования горизонтали  $h(h_1, h_2)$ , принадлежащей плоскости  $\Sigma$ , во фронтально проецирующую прямую (см. задачу 2). Все построения, выполненные на комплексном чертеже, сделаны на основе материала данного параграфа. В новой

системе плоскостей проекций  $\frac{\Pi_4}{\Pi_1}$  плоскость  $\Sigma$  является фронтально проецирующей ( $\Sigma \perp \Pi_4$ ), и поэтому ее проекция на  $\Pi_4$  вырождается в прямую линию  $\Sigma_4(C_4, A_4, B_4)$ .

$\alpha$  – величина угла наклона плоскости  $\Sigma$  к плоскости  $\Pi_1$ .

Преобразуйте плоскость общего положения  $\Gamma$  в горизонтально проецирующую (исходный чертеж задайте самостоятельно).

**Задача 4.** Преобразовать проецирующую плоскость  $\Gamma$  в плоскость уровня.

**Решение.** Допустим, что заданная плоскость  $\Gamma$  является фронтально проецирующей (рис. 69). Заменим плоскость  $\Pi_1$  новой плоскостью проекций  $\Pi_4$ , параллельной плоскости  $\Gamma(ABC)$  и, следовательно, перпендикулярной неизменяемой плоскости  $\Pi_2$ . В новой системе

**Решение.** Для решения задачи необходимо заменить плоскость  $\Pi_1$  или  $\Pi_2$  исходной системы  $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$  новой плоскостью  $\Pi_4$ , перпендикулярной плоскости  $\Sigma(ABC)$ . Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости. Следовательно, если какую-либо прямую, принадлежащую плоскости  $\Sigma$ , преобразовать в проецирующую, то плоскость  $\Sigma$  в новой системе плоскостей проекций станет проецирующей. Проще всего для этой цели воспользоваться линией уровня (см. задачу 2).

На чертеже плоскость  $\Sigma(ABC)$  преобразована во фронтально

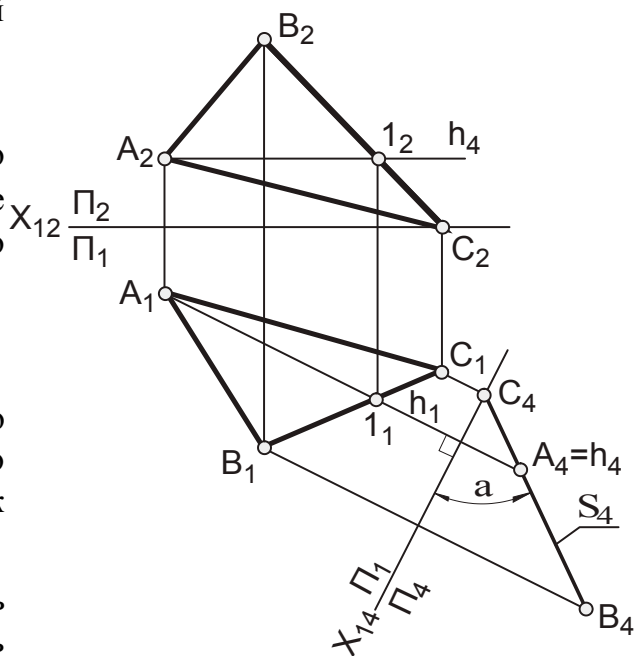


Рис. 68

плоскостей проекций  $\frac{\Pi_2}{\Pi_4}$  плоскость  $\Gamma(ABC)$  станет горизонтальной плоскостью уровня.

#### Построения на комплексном чертеже:

1) проводим новую ось проекций  $x_{24}$  параллельно  $A_2C_2$  на произвольном от нее расстоянии; такое положение оси проекций  $x_{24}$  обуславливается тем, что  $\Pi_4$  параллельна  $\Gamma(ABC)$ . Ось  $x_{24}$  совпадает с прямой  $(A_2C_2)$ , если плоскость  $\Pi_4$  совмещается с плоскостью  $\Gamma(ABC)$ ;

2) построим проекции точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  на плоскость  $\Pi_4$ ;

3) треугольник  $A_4B_4C_4$  является проекцией треугольника  $ABC$  на новую плоскость проекций  $\Pi_4$ .

**Примечание.** Так как плоскость треугольника  $ABC$  параллельна плоскости  $\Pi_4$ , то  $A_4B_4C_4 \cong ABC$  и  $|A_4B_4C_4| = |ABC|$ .

Преобразуйте горизонтально проецирующую плоскость  $\Sigma$  во фронтальную плоскость уровня (исходный чертеж задайте самостоятельно).

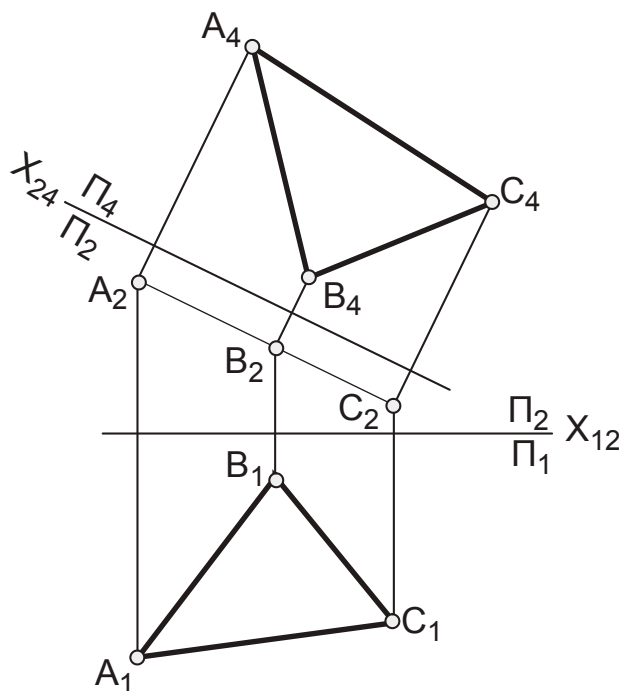


Рис. 69

**Примечание.** Плоскость общего положения преобразовать в плоскость уровня заменой только одной плоскости проекций нельзя, так как плоскость  $\Pi_4$ , параллельная ей, не будет перпендикулярна ни одной из старых плоскостей проекций и, следовательно, не образует ни с одной из них прямоугольной системы плоскостей проекций.

Для того чтобы плоскость общего положения преобразовать в плоскость уровня, необходимо выполнить две, рассмотренные выше, последовательные замены плоскостей проекций. Вначале плоскость общего положения необходимо преобразовать в проецирующую, а затем проецирующую

плоскость преобразовать в плоскость уровня. На рис. 70 показано преобразование плоскости  $\Delta(ABC)$  в горизонтальную плоскость уровня.

Для закрепления рассмотренного материала преобразуйте плоскость общего положения  $\Delta(ABC)$  во фронтальную плоскость уровня (исходный чертеж задайте самостоятельно).

Способ замены плоскостей проекций, как уже отмечалось, является одним из способов преобразования комплексного чертежа и находит широкое применение в инженерной практике при выполнении чертежей различных изделий.

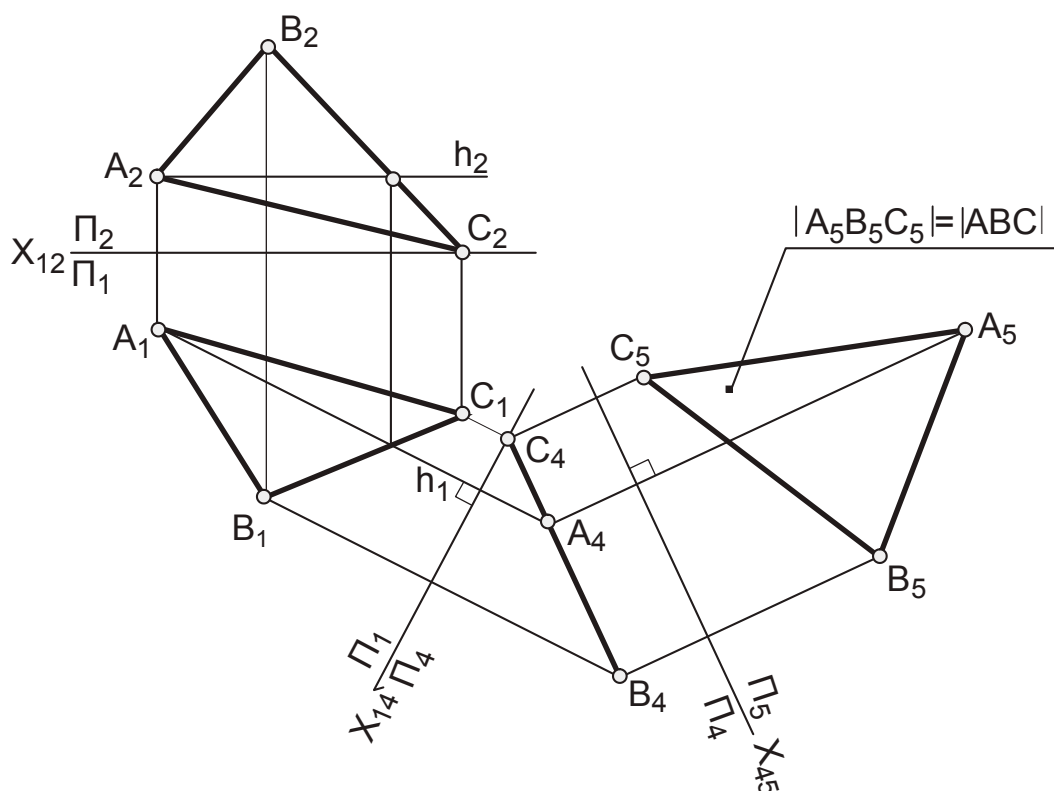


Рис. 70

### 3.3. СПОСОБ ВРАЩЕНИЯ

Способ вращения состоит в том, что данная геометрическая фигура

вращается вокруг некоторой неподвижной оси до требуемого положения относительно неподвижных плоскостей проекций. При этом каждая точка фигуры, например точка А (рис. 71), описывает окружность, расположенную в плоскости  $\Sigma$ , перпендикулярной оси вращения  $i$ . Центр  $O$  этой окружности является точкой пересечения оси вращения с плоскостью  $\Sigma$ . Радиус окружности равен расстоянию точки  $A$  до оси  $i$  ( $R = |AO|$ ).

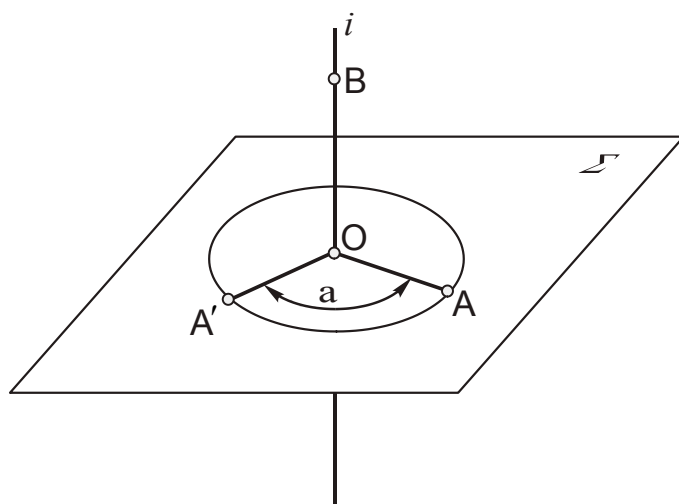


Рис. 71

Если точка  $A$  геометрической фигуры, вращаясь вокруг оси  $i$ , повернется на некоторый угол  $\alpha$ , то и все точки фигуры повернутся на угол  $\alpha$ . Точки геометрической фигуры, принадлежащие оси вращения  $i$  (например, точка  $B$  на рис. 71), в процессе вращения остаются неподвижными.

Для упрощения построений на комплексном чертеже в качестве оси вращения выбирают проецирующую прямую или линию уровня.

## Вращение вокруг проецирующей прямой

### 1. Вращение точки $A$ вокруг горизонтально проецирующей прямой $i(i \perp \Pi_1)$ .

Если точка  $A$  вращается вокруг оси  $i \perp \Pi_1$ , то плоскость  $\Sigma$ , в которой располагается окружность, описываемая точкой, становится горизонтальной

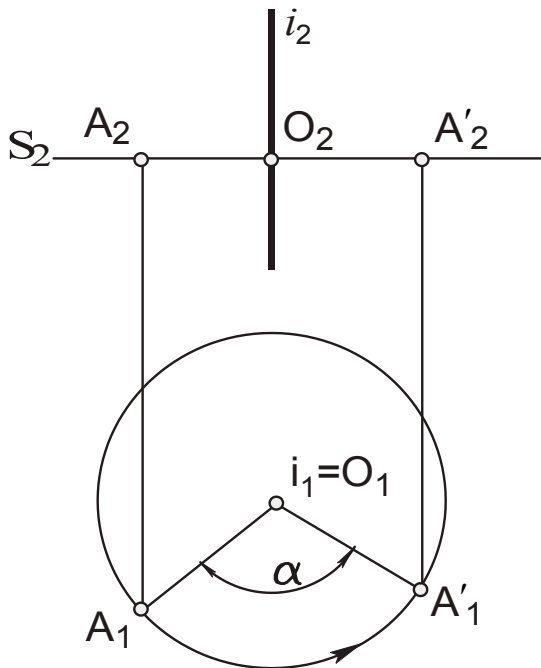


Рис. 72

плоскостью уровня ( $\Sigma \parallel \Pi_1$ ). Следовательно, окружность, описываемая точкой  $A$  в пространстве спроецируется на плоскость  $\Pi_1$  без искажения, а на плоскость  $\Pi_2$  – в отрезок прямой, совпадающий с  $\Sigma_2$ . Таким образом, на комплексном чертеже (рис. 72):

1) горизонтальная проекция  $A_1$  точки  $A$  перемещается по окружности радиуса  $|R| = |AO| = |A_1O_1|$ ;

2) фронтальная проекция  $A_2$  точки  $A$  перемещается по прямой, перпендикулярной линиям связи (вырожденная фронтальная проекция  $\Sigma_2$  плоскости  $\Sigma \parallel \Pi_1$ );

3) угол поворота горизонтальной проекции  $A_1$  точки  $A$  равен углу поворота точки в пространстве.

### 2. Вращение точки $A$ вокруг фронтально проецирующей прямой $i(i \perp \Pi_2)$ .

Если точка  $A$  вращается вокруг оси  $i$  перпендикулярной  $\Pi_2$ , то плоскость  $\Sigma$ , в которой располагается окружность, описываемая точкой, становится

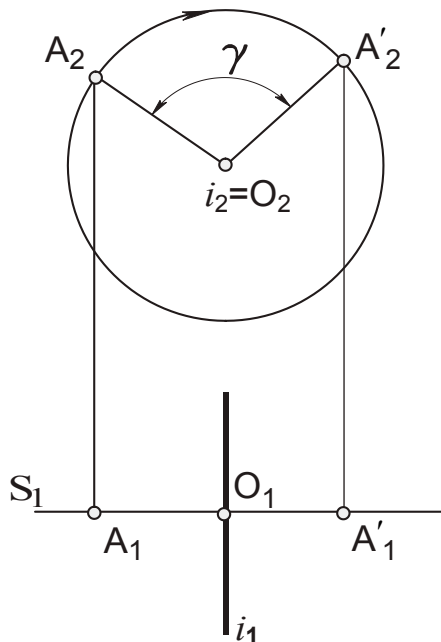


Рис. 73

фронтальной плоскостью уровня ( $\Sigma \parallel \Pi_2$ ). Следовательно, окружность, описанная точкой  $A$  в пространстве, спроецируется на плоскость  $\Pi_1$  в отрезок прямой, совпадающий с  $\Sigma_1$ , а на плоскость  $\Pi_2$  – без искажения.

Таким образом, на комплексном чертеже (рис. 73):

1) горизонтальная проекция  $A_1$  точки  $A$  перемещается по прямой, перпендикулярной линиям связи (вырожденная горизонтальная проекция  $\Sigma_1$  плоскости  $\Sigma \parallel \Pi_2$ );

2) фронтальная проекция  $A_2$  точки  $A$  перемещается по окружности радиуса  $|R| = |AO| = |A_2O_2|$ ;

3) угол поворота фронтальной проекции  $A_2$  точки  $A$  равен углу поворота точки в пространстве.

#### Примечания:

1. Положение прямой линии в пространстве определяется двумя точками; следовательно, вращение прямой сводится к вращению двух точек, принадлежащих ей.

2. Положение плоскости в пространстве определяется тремя точками, не принадлежащими одной прямой: следовательно, вращение плоскости сводится к вращению трех точек, определяющих плоскость.

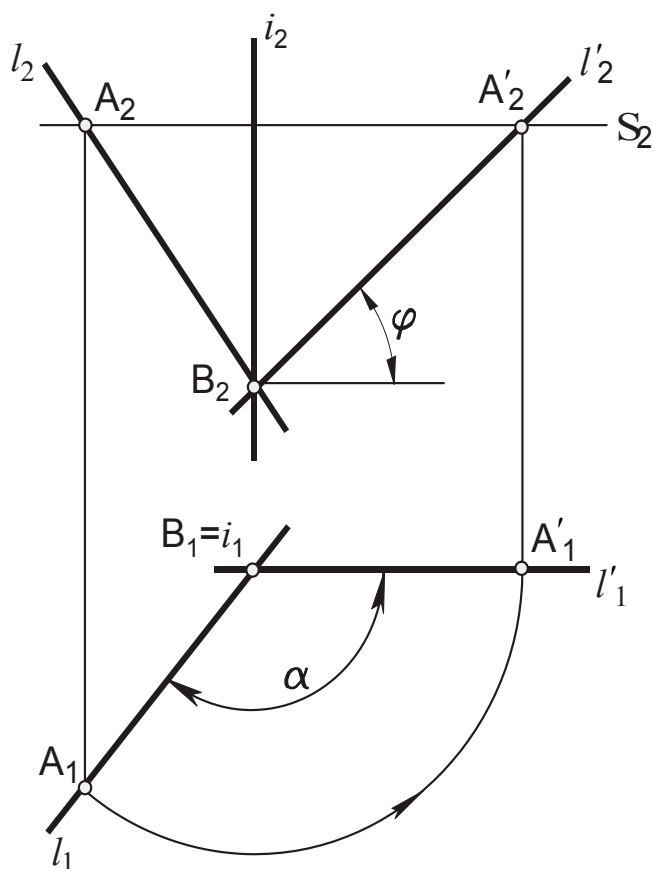
3. Вращение прямой можно свести к вращению только одной ее точки, а вращение плоскости – к вращению двух ее точек, если провести ось вращения так, чтобы она пересекала прямую или плоскость.

### Основные задачи, решаемые способом вращения

**Задача 1.** Преобразовать прямую общего положения в линию уровня. (рис.74)

**Решение.** Для того чтобы прямую общего положения  $l(l_1, l_2)$  преобразовать, например, во фронталь, ее необходимо вращать около оси  $i \perp \Pi_1$ ;

1) выбираем две точки  $A(A_1A_2)$  и  $B(B_1B_2)$ , принадлежащие прямой  $l$ ;



2) проводим ось вращения  $i(i_1, i_2)$  перпендикулярно  $\Pi_1$  через точку  $B(B_1B_2)$  прямой  $l(l_1, l_2)$ ;

3) при вращении прямой  $l$  вокруг оси  $i$  точка  $B$  прямой останется неподвижной, так как принадлежит оси, а точка  $A$  будет вращаться по правилам, рассмотренным выше;

4) угол поворота точки  $A$  и ее горизонтальной проекции  $A_1$  определяется так: когда прямая  $l$  займет положение  $l'$  параллельное  $\Pi_2$ , ее горизонтальная проекция  $l_1$  расположится перпендикулярно линиям связи.

Дальнейшие построения ясны из чертежа. Прямая  $l'$  ( $l'_1, l'_2$ ) – искомая.

Для преобразования прямой  $l$  общего положения в горизонталь, ее необходимо вращать около оси  $i$ , перпендикулярной  $\Pi_2$  и проходящей через какую-либо точку прямой.

Рис. 74

Решите самостоятельно эту задачу.

#### Примечания:

1. При вращении прямой вокруг оси  $i \perp \Pi_1$  угол наклона её к плоскости  $\Pi_1$  не изменяется, поэтому горизонтальная проекция отрезка прямой меняет свое положение, сохраняя начальную величину.

2. При вращении прямой вокруг оси  $i \perp \Pi_2$  угол наклона ее к плоскости  $\Pi_2$  не изменяется, поэтому фронтальная проекция отрезка прямой меняет свое положение, сохраняя начальную величину.

Подумайте, можно ли прямую общего положения вращением около оси  $i \perp \Pi_1$  расположить параллельно  $\Pi_1$ , а около оси  $i \perp \Pi_2$  – параллельно  $\Pi_2$ .

**Задача 2.** Преобразовать линию уровня в проецирующую прямую (рис.75).

**Решение.**

1. Если линия уровня  $AB(A_1B_1, A_2B_2)$  является горизонталью, то ее можно преобразовать вращением около оси  $i$  перпендикулярной  $\Pi_1$  во фронтально проецирующую прямую. При вращении горизонтали вокруг оси  $i$  она сохраняет параллельность плоскости  $\Pi_1$  и может быть повернута в положение, перпендикулярное  $\Pi_2$ . Построение ясно из чертежа.

2. Если линия уровня является фронталью, то ее можно преобразовать в горизонтально проецирующую прямую вращением около оси  $i$  перпендикулярной  $\Pi_2$ . Подумайте почему. Решите эту задачу.

**Примечание.**

Для того чтобы прямую общего положения преобразовать в проецирующую, необходимо выполнить два последовательных преобразования: вначале преобразовать ее в линию

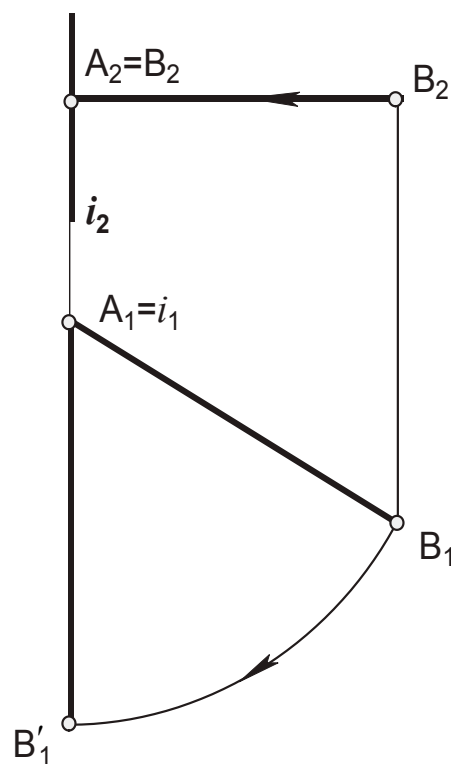


Рис. 75

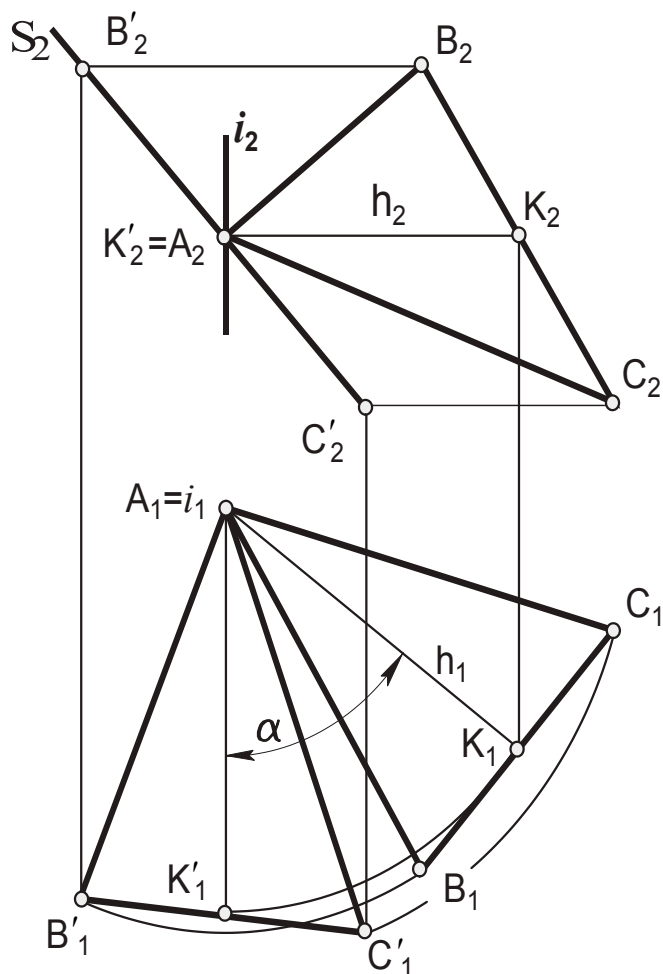


Рис. 76

уровня (см. первую задачу), а затем линию уровня преобразовать в проецирующую (см. вторую задачу). Почему?

**Задача 3.** Преобразовать плоскость общего положения в проецирующую (рис. 76).

**Решение.**

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости. Следовательно, если какую-либо прямую, принадлежащую плоскости  $\Sigma$ , преобразовать в проецирующую, то плоскость  $\Sigma$  тоже станет проецирующей. Проще всего для этой цели воспользоваться линиями уровня (см. задачу 2).

Если плоскость  $\Sigma(ABC)$  вращать вокруг оси  $i \perp \Pi_1$  (см. рис.76), то горизонталь  $(AK)$ , принадлежащая плоскости, может быть повернута в положение,

перпендикулярное плоскости  $\Pi_2$  (см. задачу 2), при этом плоскость  $\Sigma$  становится фронтально проецирующей.

Для упрощения построений на комплексном чертеже горизонталь  $AK(A_1K_1, A_2K_2)$  и ось вращения  $i(i_1, i_2)$  проведены через вершину  $A$  треугольника  $ABC$ .

Для построения новой горизонтальной проекции  $A_1B'_1C'_1$  треугольника  $ABC$  можно воспользоваться одним из следующих соображений:

1) так как угол наклона плоскости треугольника  $ABC$  к плоскости  $\Pi_1$  при вращении вокруг оси  $i \perp \Pi_1$  не изменяется, то  $\Delta A_1B'_1C'_1 \cong \Delta A_1B_1C_1$

2) величина угла поворота точек  $B_1$  и  $C_1$  равна величине угла поворота горизонтальной проекции горизонтали ( $\alpha = K_1A_1K'_1$ ). Точка  $A_1$  неподвижна, так как она принадлежит оси вращения. Остальные построения основаны на правилах, изложенных ранее, и понятны из чертежа.

Треугольник  $AB'C'$  перпендикулярен  $\Pi_2$  и поэтому его фронтальная проекция  $B'_2A_2C'_2$  вырождается в прямую линию.

Для того чтобы плоскость  $\Sigma$  преобразовать в горизонтально проецирующую, ее необходимо вращать вокруг оси  $i \perp \Pi_2$ , а в качестве вспомогательной линии уровня взять фронталь. Решите эту задачу, исходный чертеж задайте самостоятельно.

**Задача 4.** Преобразовать проецирующую плоскость в плоскость уровня (рис. 77).

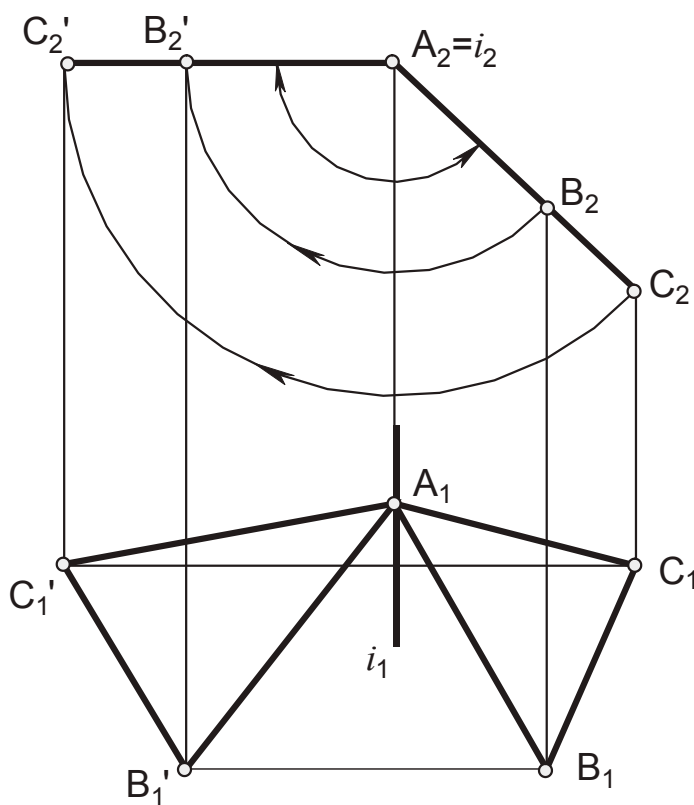


Рис. 77

Если плоскость  $\Sigma(ABC)$  является фронтально проецирующей плоскостью, то ее можно преобразовать в горизонтальную плоскость уровня, вращая вокруг оси  $i$ , перпендикулярной плоскости  $\Pi_2$ , проведенной через вершину  $A$  треугольника  $ABC$ .

В то время когда плоскость  $\Sigma(ABC)$  расположится параллельно плоскости  $\Pi_1$  ее фронтальная проекция – прямая ( $A_2B_2C_2$ ) займет положение ( $A_2B'_2C'_2$ ), перпендикулярное линиям связи.

Величина угла поворота плоскости  $\alpha = C_2A_2C'_2$ . Остальные построения основаны на правилах, изложенных ранее, и понятны из чертежа.

Горизонтально проецирующую плоскость можно преобразовать во фронтальную плоскость уровня, вращая ее вокруг оси  $i \perp \Pi_1$  и проходящей через какую-либо точку плоскости.

Решите эту задачу, исходный чертеж задайте самостоятельно.

**Примечание.** Для того чтобы плоскость общего положения преобразовать

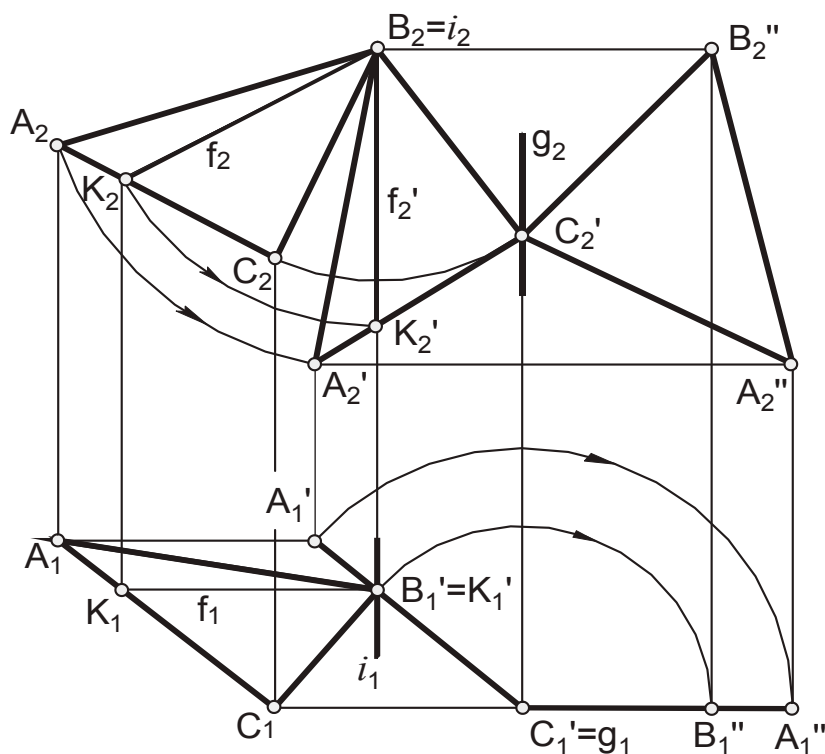


Рис. 78

в плоскость уровня, необходимо выполнить два последовательных преобразования: вначале преобразовать ее в проецирующую плоскость (см. третью задачу), а затем проецирующую плоскость преобразовать в плоскость уровня (см. четвертую задачу).  
**Почему?**

Преобразование плоскости  $\Sigma(ABC)$  во фронтальную плоскость уровня показано на рис.78.

### Вращение вокруг линии уровня (совмещение с плоскостью уровня)

Вращение геометрической фигуры вокруг линии уровня (горизонтали или фронтали) производится с целью ее совмещения с плоскостью уровня. Применяется этот способ в основном для преобразования плоскости общего положения в плоскость уровня при решении следующих задач:

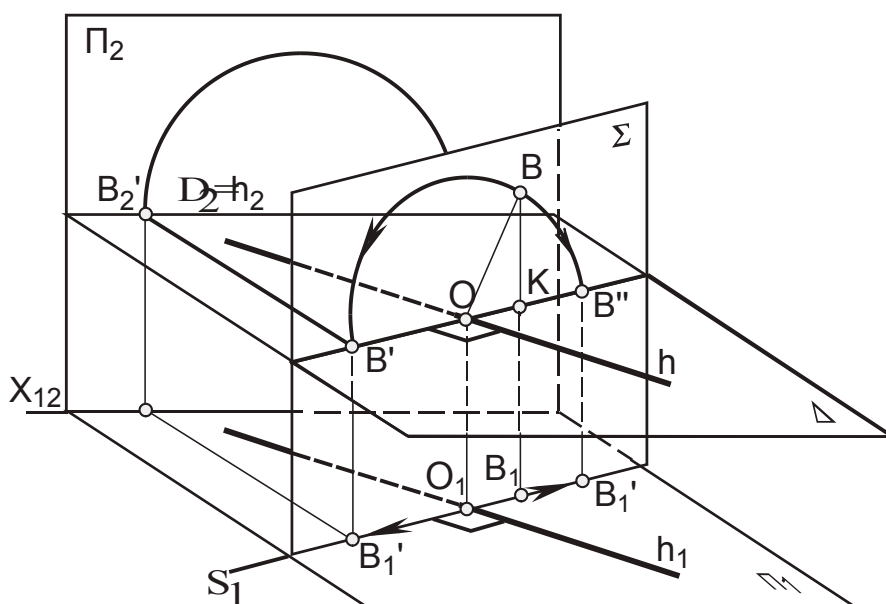
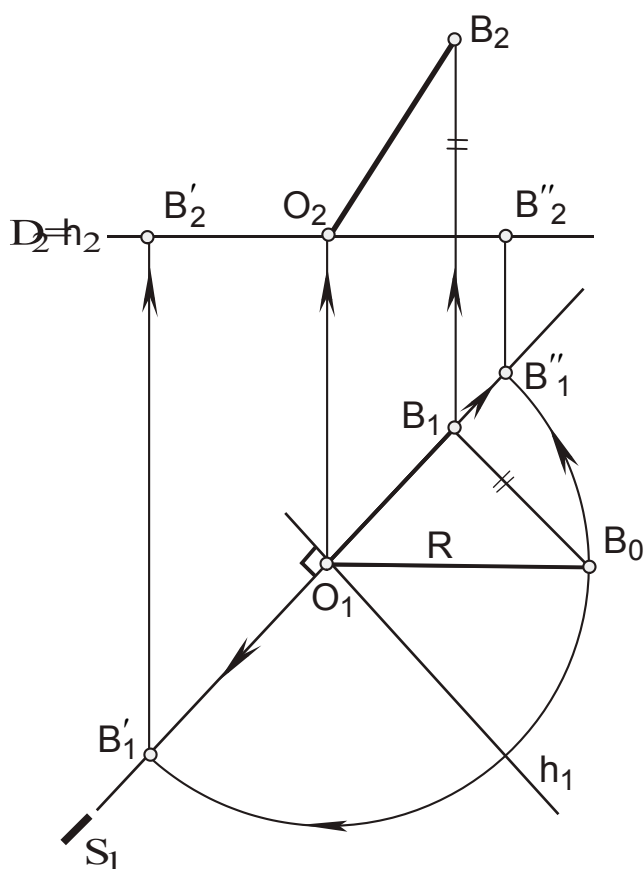


Рис. 79

- 1) определение величины плоской фигуры;
- 2) определение величины плоского угла;

Линия уровня, вокруг которой вращается плоскость общего положения, должна принадлежать этой плоскости. В этом случае вращение плоскости



Рассмотрим процесс совмещения точки В с горизонтальной плоскостью уровня  $\Delta$  путем вращения ее вокруг горизонтали  $h$ , принадлежащей этой плоскости (рис. 79).

Так как плоскость  $\Sigma$  перпендикулярна  $h$ , а  $h$  параллельна  $\Pi_1$ , то  $\Sigma$  перпендикулярна  $\Pi_1$  и ее горизонтальная проекция вырождается в прямую  $\Sigma_1 \perp h_1$ . Следо-

Таким образом, при вращении точки В вокруг горизонтали ее горизонтальная проекция В<sub>1</sub> перемещается по прямой  $\Sigma_1 \perp h_1$ . Направление перемещения зависит от направления вращения точки В (на рис. 79 показано стрелками). В то время, когда точка В совместится с плоскостью  $\Delta$  и займет одно из положений В' или В'', ее горизонтальная проекция В<sub>1</sub> переместившись по прямой  $\Sigma_1$  соответственно займет положение В'<sub>1</sub> или В''<sub>1</sub>. При этом

$$|\mathbf{OB}'| = |\mathbf{OB}''| = |\mathbf{O}_1\mathbf{B}'_1| = |\mathbf{O}_1\mathbf{B}''_1| = |\mathbf{OB}| = |\mathbf{R}|$$

- 1) Через горизонтальную проекцию  $B_1$  точки  $B$  проводим прямую  $\Sigma_1 \perp h_1$ ;
- 2)  $\Sigma_1 \cap h_1 = O_1$  – горизонтальная проекция центра окружности; фронтальная проекция  $O_2$  центра определяется по линии связи на  $h_2$ ;

3)  $[O_1B_1]$  и  $[O_2B_2]$  – соответственно горизонтальная и фронтальная проекции радиуса окружности;

4) способом прямоугольного треугольника ( $O_1B_1B_0$ ) определяем величину радиуса окружности ( $|R|=|O_1B_0|$ );

5) из точки  $O_1$ , как из центра, описываем окружность радиуса  $|R|=|O_1B_0|$  и

отмечаем точки  $B'_1$  и  $B''_1$  пересечения ее с прямой  $\Sigma_1$ ;

6) точки  $B'_1$  и  $B''_1$  являются горизонтальными проекциями соответственно точек  $B'$  и  $B''$ , фронтальные проекции  $B'_2$  и  $B''_2$  определяются по линиям связи на прямой  $\Delta_2$ .

В случае вращения точки вокруг фронтالي и совмещения ее с фронтальной плоскостью уровня рассуждаем аналогично. Решите самостоятельно эту задачу.

В качестве примера применения рассмотренного способа определим истинную величину треугольника  $ABC$  (рис. 81).

Если повернуть плоскость треугольника  $ABC$  вокруг горизонтали в положение, параллельное плоскости  $\Pi_1$ , и построить его новую горизонтальную

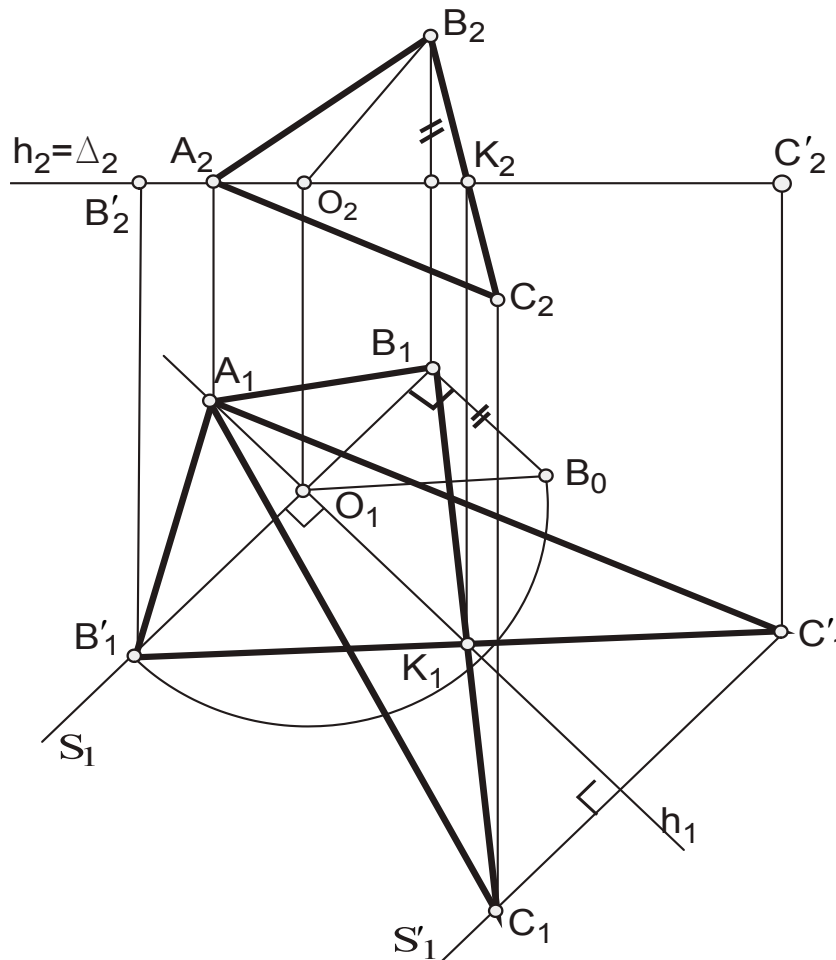


Рис. 81

проекцию, то эта проекция и будет искомой величиной.

1. Проведем в плоскости треугольника  $ABC$  горизонталь  $h(h_1, h_2)$  через вершину  $A(A_1, A_2)$  и отметим точку  $K(K_1, K_2)$  пересечения ее со стороной  $BC(B_1C_1, B_2C_2)$ .

2. Так как точки  $A$  и  $K$  плоскости треугольника принадлежат оси вращения (горизонтали  $h$ ), то при вращении плоскости они останутся неподвижными.

3. Таким образом, вращение плоскости треугольника  $ABC$  сводится к вращению только одной ее точки, например вершины  $B$ , не принадлежащей оси вращения, так как положение плоскости в пространстве определяется тремя точками  $A$ ,  $K$  и  $B$ .

4. Вершину  $B$  совмещаем с горизонтальной плоскостью  $\Delta$ , вращая ее вокруг горизонтали  $h$ . Все построения на комплексном чертеже аналогичны тем, которые выполнены на рис. 80. В результате получим точку  $B'(B'_1, B'_2)$ .

5. Три точки А, В' и К определяют новое положение плоскости треугольника АВС, параллельное плоскости  $\Pi_1$ .

6. Новое положение С' вершины С определяется как точка пересечения прямой (В'К) с плоскостью  $\Sigma'$ , в которой перемещается точка С. Новая горизонтальная проекция С' точки С определится как точка пересечения горизонтальной проекции (В'К<sub>1</sub>) прямой (В'К) с горизонтальной проекцией  $\Sigma'_1$  плоскости  $\Sigma'$ .

7. Треугольник АВ'С' ( $A_1B'_1C'_1, A_2B'_2C'_2$ ) параллелен  $\Pi_1$ , следовательно,  $\Delta A_1B'_1C'_1 \cong \Delta ABC$ .

Решите самостоятельно эту задачу вращением плоскости вокруг фронтали.

## Глава 4. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Задачи, в которых определяется относительное положение или общие элементы геометрических фигур, называются позиционными. К ним относятся задачи на принадлежность точки и линии поверхности, задачи, выражающие отношения между геометрическими фигурами, задачи на определение общих элементов геометрических фигур.

### 4.1. ЗАДАЧИ, ВЫРАЖАЮЩИЕ ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ФИГУРАМИ

#### 4.1.1. Относительное положение прямых

Две прямые в пространстве могут быть параллельными, пересекающимися и скрещивающимися.

##### *а. Прямые параллельные*

Если прямые а и b параллельны, то их одноименные проекции параллельны, т.е.  $a \parallel b \Rightarrow a_1 \parallel b_1 \wedge a_2 \parallel b_2$  (рис. 82). Для прямых общего положения справедливо и обратное утверждение:  $a_1 \parallel b_1 \wedge a_2 \parallel b_2 \Rightarrow a \parallel b$ .

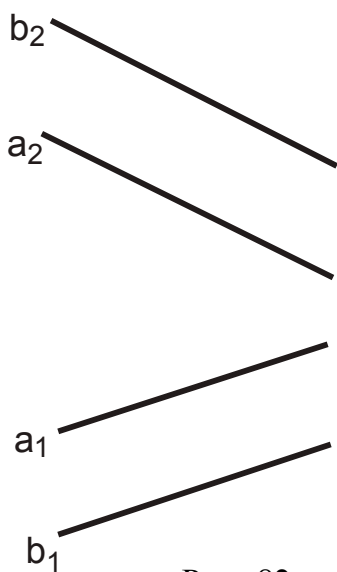


Рис. 82

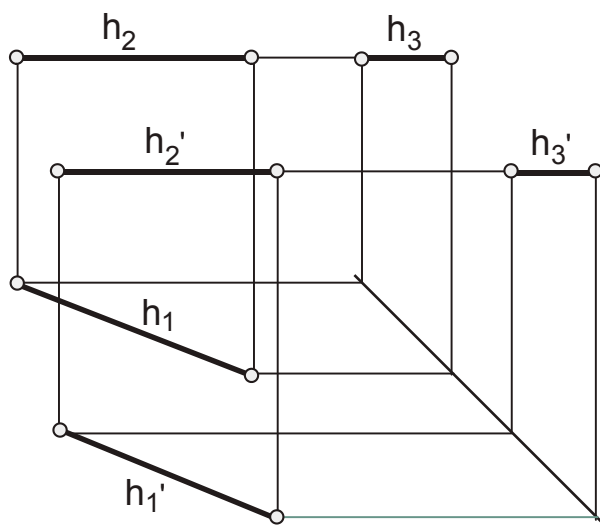


Рис. 83

Таким образом, для того, чтобы судить по чертежу о параллельности двух

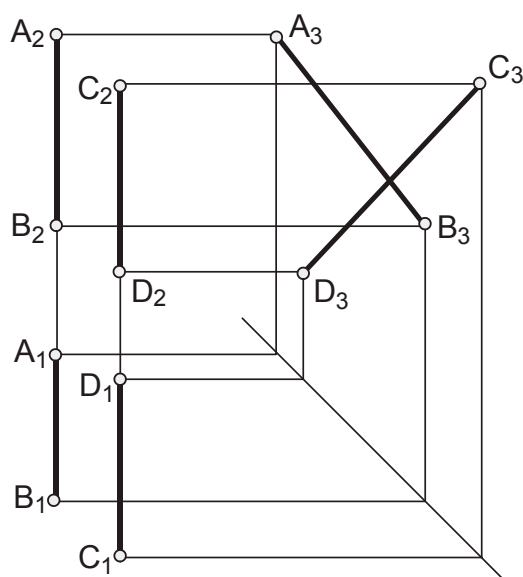


Рис. 84

прямых общего положения, достаточно иметь любую пару проекций каждой из них. Несколько иначе обстоит дело в случае, если прямые являются линиями уровня. Линии уровня параллельны, если их проекции на параллельную им плоскость проекций параллельны. Например, горизонтали  $h$  и  $h'$  (рис. 83) параллельны, так как параллельны их проекции  $h_1$  и  $h'_1$ , а профильные прямые  $(AB)$  и  $(CD)$  (рис. 84) не параллельны, так как их проекции на  $\Pi_3$  не параллельны.

### б. Прямые пересекающиеся

Если прямые  $c$  и  $d$  пересекаются, то точка  $K$  их пересечения проецируется в точки  $K_1$  и  $K_2$  пересечения их одноименных проекций.

Очевидно, что  $K_1$  и  $K_2$  принадлежат одной линии связи (рис. 85а,б).

Справедливо и обратное утверждение:  $K_1 = c_1 \cap d_1 \wedge K_2 = c_2 \cap d_2 \Rightarrow c \cap d$ , если  $K_1$  и  $K_2$  принадлежат одной линии связи.

### в. Прямые скрещивающиеся

Прямые непараллельные и непересекающиеся называются скрещивающимися. Один из возможных вариантов чертежа скрещивающихся прямых показан на рис. 86, где  $l \nparallel m$ , так как  $l$  не параллельна  $m$  и  $l$  не пересекается с  $m$ .

Точка пересечения горизонтальных проекций скрещивающихся прямых является горизонтальной проекцией двух горизонтально конкурирующих точек 1 и 2, принадлежащих прямой  $l$  и  $m$ .

Точка пересечения фронтальных проекций скрещивающихся прямых является фронтальной проекцией двух фронтально конкурирующих точек 3 и 4. По горизонтально конкурирующим точкам 1 и 2 определяется взаимное положение прямых  $l$  и  $m$  относительно  $\Pi_1$ . Фронтальная проекция 1<sub>2</sub> точки 1, принадлежащей прямой  $l$ , расположена выше, чем фронтальная проекция 2<sub>2</sub> точки 2, принадлежащей прямой  $m$  (направление взгляда показано стрелкой). Следовательно, прямая  $l$  расположена над прямой  $m$ .

По фронтально конкурирующим точкам 3 и 4 определяется взаимное

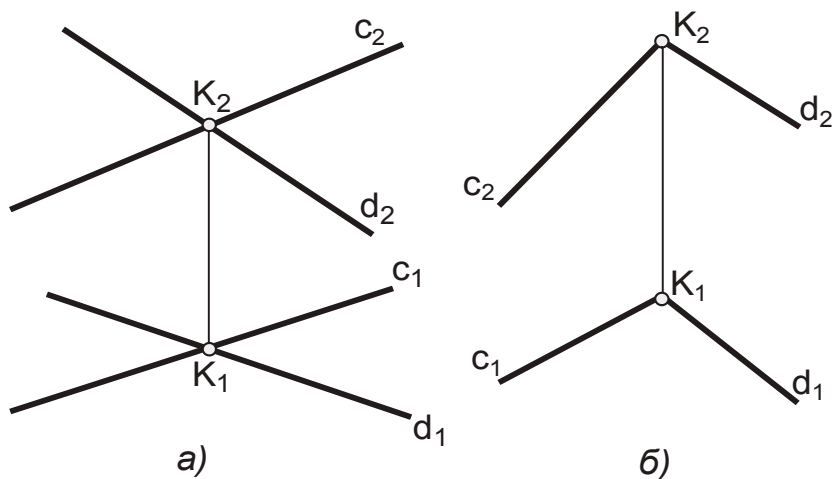


Рис. 85

положение прямых  $l$  и  $m$  относительно фронтальной плоскости проекций. Горизонтальная проекция  $4_1$  точки 4, принадлежащей прямой  $l$ , расположена

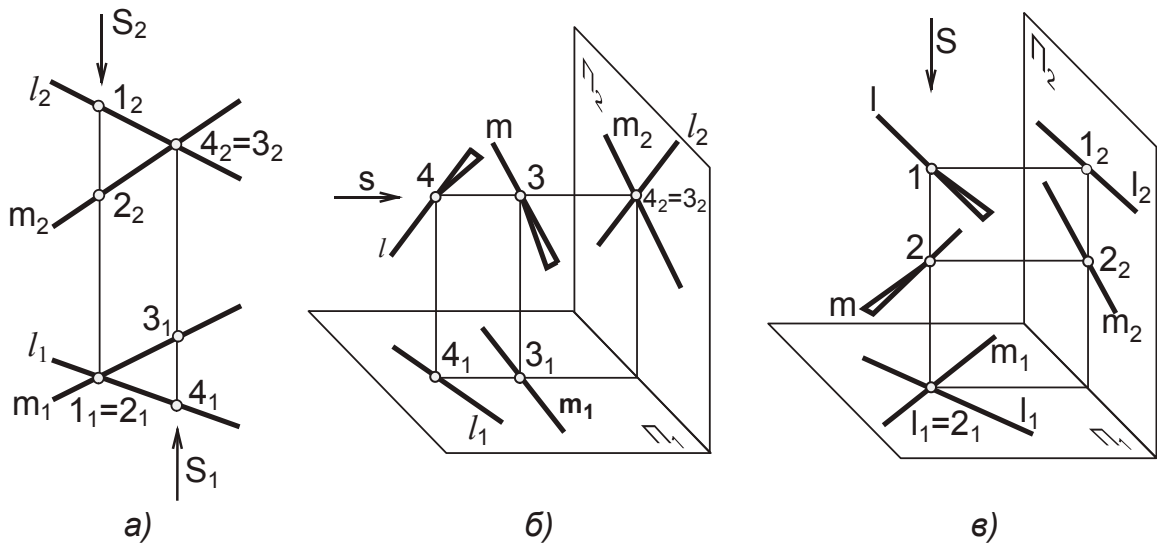


Рис. 86

ниже, чем горизонтальная проекция  $3_1$  точки 3, принадлежащей прямой  $m$  (направление взгляда показано стрелкой). Следовательно, прямая  $l$  расположена перед прямой  $m$ .

#### 4.1.2. Относительное положение прямой и плоскости, двух плоскостей

##### *а. Взаимная параллельность прямой и плоскости*

Построение чертежа взаимно параллельных прямой и плоскости основано

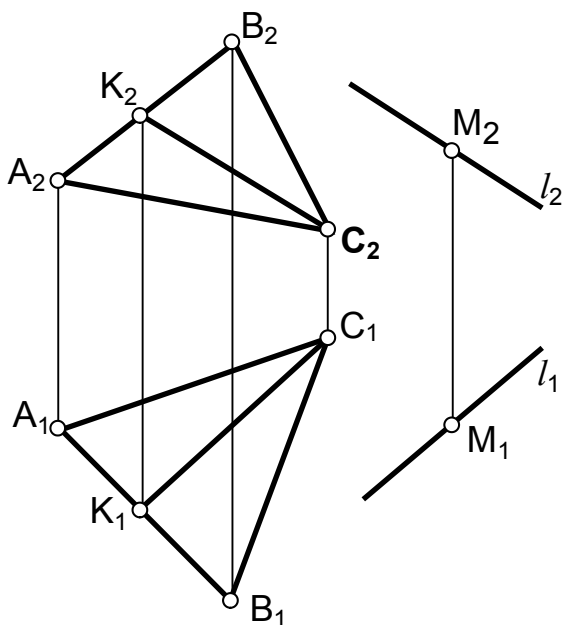


Рис. 87

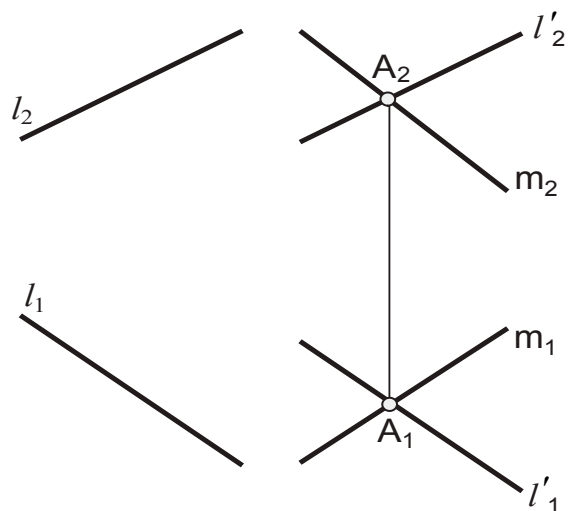


Рис. 88

на теореме стереометрии: если прямая параллельна какой-либо прямой, принадлежащей плоскости, то данная прямая и плоскость параллельны. Пусть требуется через точку  $M$  провести прямую, параллельную плоскости  $\Gamma(ABC)$ . Для этого достаточно провести через точку  $M$  прямую  $l$ , параллельную какой-либо прямой, принадлежащей плоскости треугольника  $ABC$ . На чертеже (рис.87)

через точку М проведена прямая  $l$ , параллельная СК:  $l_1 \parallel (C_1K_1)$  и  $l_2 \parallel (C_2K_2)$ .

Обратная задача – построение плоскости, параллельной данной прямой – выполняется на основании той же теоремы стереометрии. Плоскость

$\Gamma(l' \cap m)$  параллельна прямой  $l$  (рис. 88), так как  $l' \subset \Gamma$  и  $l \parallel l'$ . Обе задачи, очевидно, имеют бесчисленное множество решений.

### **б. Взаимная параллельность двух плоскостей**

Построение чертежа двух параллельных плоскостей основано на теореме стереометрии: если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны. Следовательно, чтобы построить плоскость  $\Gamma'$ , параллельную плоскости  $\Gamma(ABC)$ , достаточно провести через точку М две прямые, соответственно параллельные каким-нибудь двум пересекающимся прямым, принадлежащим плоскости  $\Gamma$ , например сторонам (AB) и (BC) (рис. 89).

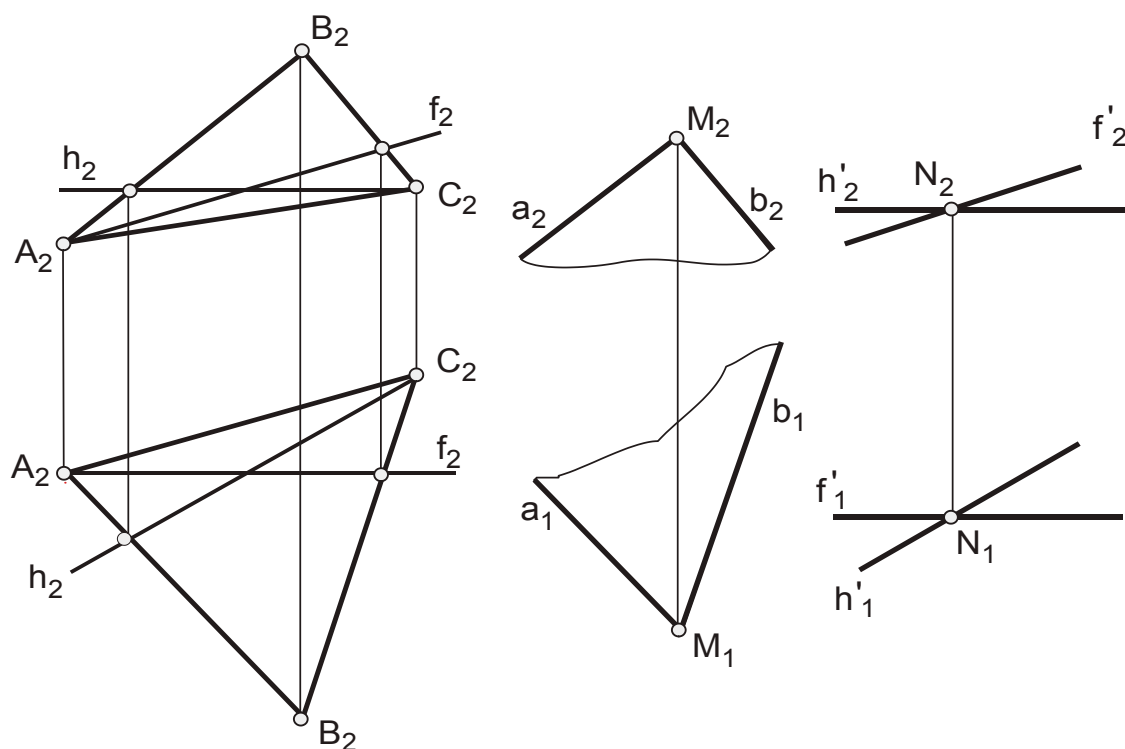


Рис. 89

Плоскость  $\Gamma(a \cap b)$  параллельна плоскости  $\Gamma(ABC)$ , так как  $a \parallel (AB)$  и  $b \parallel (BC)$ . Можно задать новую плоскость какими-нибудь другими пересекающимися прямыми, например горизонталью и фронталью, соответственно параллельными горизонтали и фронтали плоскости  $\Gamma(ABC)$ . Такая плоскость на рис. 89 проведена через точку N – плоскость  $\Delta(h' \cap f')$  параллельна плоскости  $\Gamma(ABC)$ , так как  $h' \parallel h$  и  $f' \parallel f$ .

### **4.1.3. Взаимно перпендикулярные прямые и плоскости**

Две прямые (пересекающиеся или скрещивающиеся) называются взаимно перпендикулярными, если угол между ними равен  $90^\circ$ .

Признаки перпендикулярности двух прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей рассматриваются в стереометрии. Напомним некоторые из этих признаков:

- 1) если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, принадлежащих плоскости, то эта прямая и плоскость взаимно перпендикулярны (рис. 90а);
- 2) прямая, перпендикулярная плоскости, перпендикулярна к любой прямой, принадлежащей этой плоскости (рис. 90б);

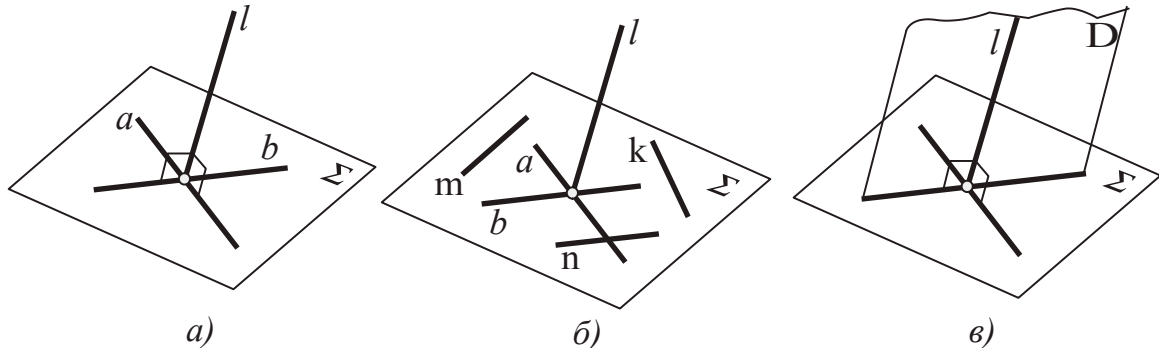


Рис. 90

- 3) если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости (рис. 90в).

На основании указанных признаков в пространстве начертательная геометрия разработала соответствующие признаки для комплексного чертежа.

### Проекции прямого угла

Любой линейный угол (острый, тупой, прямой) проецируется на плоскость проекций в истинную величину, если его стороны параллельны этой плоскости.

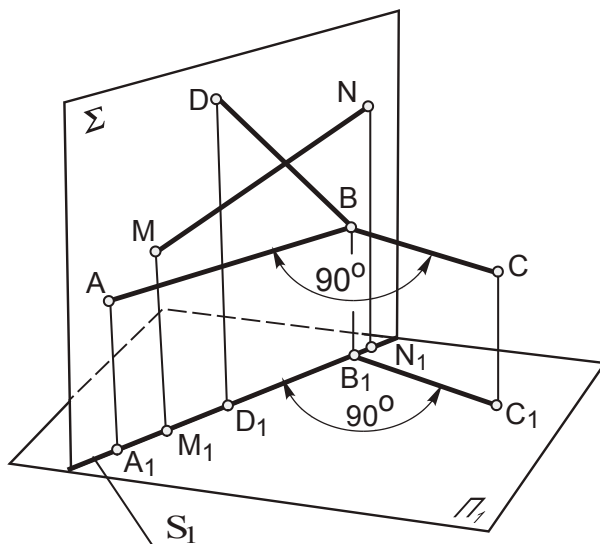


Рис. 91

При этом вторая проекция угла вырождается в прямую линию, перпендикулярную линиям связи.

Кроме того, прямой угол проецируется в истинную величину еще и тогда, когда только одна из его сторон параллельна плоскости проекций.

### Теорема 1.

Если одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, а другая является прямой общего положения, то прямой угол проецируется на эту плоскость проекций без искажения, т. е. в прямой же угол.

Пусть стороны (AB) и (BC) прямого угла ABC параллельны горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_1$  (рис.91). Тогда на  $\Pi_1$

$$\angle ABC \rightarrow \angle A_1B_1C_1 \text{ и } \angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$$

Сторона (AB) и ее горизонтальная проекция ( $A_1B_1$ ) располагаются в горизонтально проецирующей плоскости  $\Sigma(\Sigma_1)$ . Сторона  $(BC) \perp \Sigma$ , так как  $(BC) \perp (AB)$  по условию и  $(BC) \perp (BB_1)$  по построению. Следовательно, прямая

(BC) перпендикулярна к любой прямой (пересекающейся или скрещивающейся с ней), принадлежащей плоскости  $\Sigma$ , например:  $(BC) \perp (BD)$ ,  $(BC) \perp (MN)$  и т. п. (прямые (BD), (MN), ... общего положения).

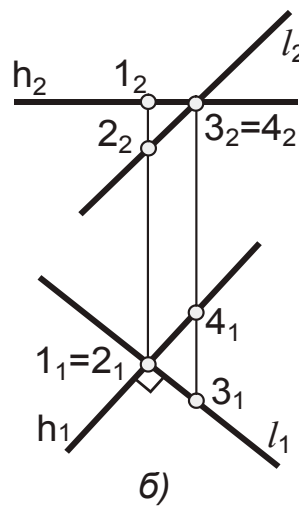
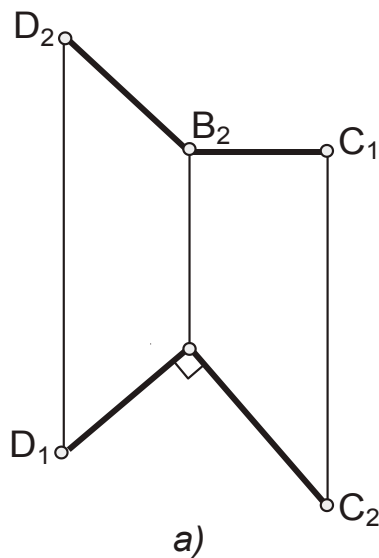


Рис. 92

Очевидно, что проекция на плоскость  $\Pi_1$  прямого угла, образованного прямой (BC) с любой прямой общего положения, например (BD), принадлежащей плоскости  $\Sigma$ , совпадает с проекцией  $A_1B_1C_1$  угла ABC. Таким образом, теорема доказана.

Прямой угол DBC на плоскость  $\Pi_2$  проецируется в искаженную величину, так как по отношению к ней условия теоремы не выполняются. Если

сторона (BD) прямого угла DBC займет положение, перпендикулярное плоскости  $\Pi_1$ , то проекция угла на эту плоскость выродится

в прямую линию, а на две другие плоскости проекций прямой угол спроецируется без искажения. Проекция прямого угла DBC, сторона (BC) которого параллельна плоскости  $\Pi_1$ , изображены на рис. 92а. На чертеже (рис. 92б) показаны проекции взаимно перпендикулярных скрещивающихся прямых, одна из которых является горизонталью. На чертеже (рис. 93а) показаны проекции прямого угла DBC, сторона (BC) которого параллельна плоскости  $\Pi_2$ . Проекция взаимно перпендикулярных скрещивающихся прямых, одна из которых является фронталью, изображены на чертеже (рис. 93б).

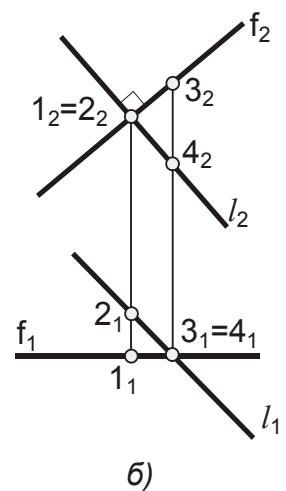
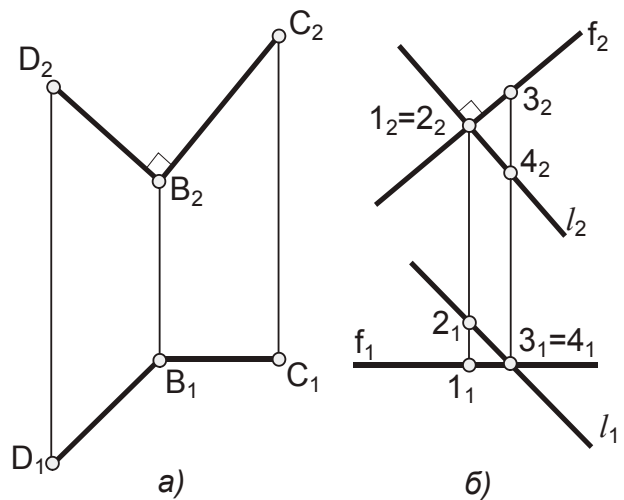


Рис. 93

### Прямая, перпендикулярная к плоскости

На вопрос о том, как располагаются на комплексном чертеже проекции перпендикуляра к какой-либо плоскости, отвечает следующая теорема.

#### Теорема 2.

Если прямая перпендикулярна к плоскости в пространстве, то на комплексном чертеже горизонтальная проекция прямой перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали, а фронтальная проекция перпендикулярна к фронтальной проекции фронтали, принадлежащим этой плоскости.

Пусть прямая (AK) перпендикулярна к плоскости общего положения  $\Sigma$  (рис.94). Проведем в плоскости  $\Sigma$  произвольные горизонталь  $h$  и фронталь  $f$ . Так как перпендикуляр к плоскости образует прямые углы со всеми прямыми,

принадлежащими плоскости, то  $(AK) \perp h$  и  $(AK) \perp f$ .

На основании теоремы 1:

1) прямой угол  $AKh$  проецируется на плоскость  $\Pi_1$  без искажения, т. е.  $(A_1K_1) \perp h$ , так как  $h \parallel \Pi_1$ ;

2) прямой угол  $AKf$  проецируется на плоскость  $\Pi_2$  без искажения, т. е.  $(A_2K_2) \perp f$ , так как  $f \parallel \Pi_2$ .

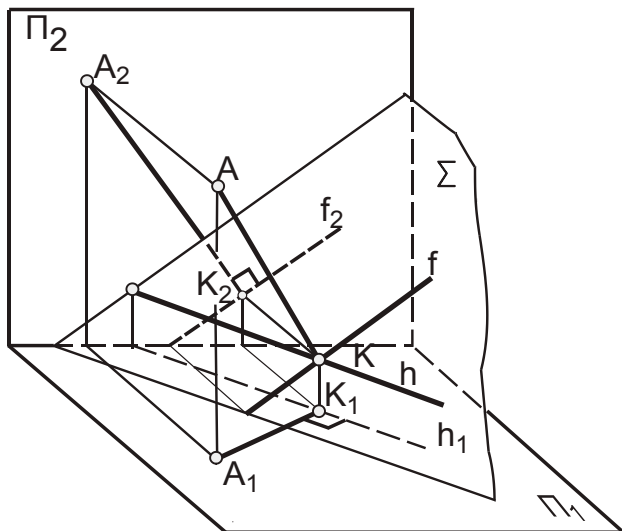


Рис. 94

Напомним, что все горизонтالي, принадлежащие одной и той же плоскости, параллельны между собой, а все фронталь – между собой. Поэтому для построения проекций перпендикуляра к плоскости можно воспользоваться любыми горизонталью и фронталью, принадлежащими плоскости.

На основании первой и второй теорем решаются следующие основные задачи.

1. Провести перпендикуляр из точки A к плоскости  $\Sigma(a \cap b)$ .

Решение приведено на чертеже (рис.

95). В плоскости  $\Sigma(a \cap b)$  построены горизонталь  $h(h_1, h_2)$  и фронталь  $f(f_1, f_2)$ . Проекции искомого перпендикуляра  $n$  проведены через соответствующие проекции  $A_1$  и  $A_2$  заданной

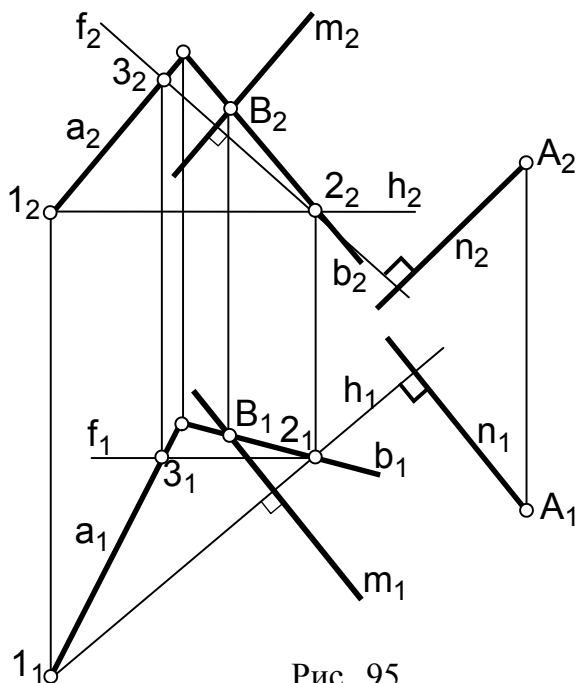


Рис. 95

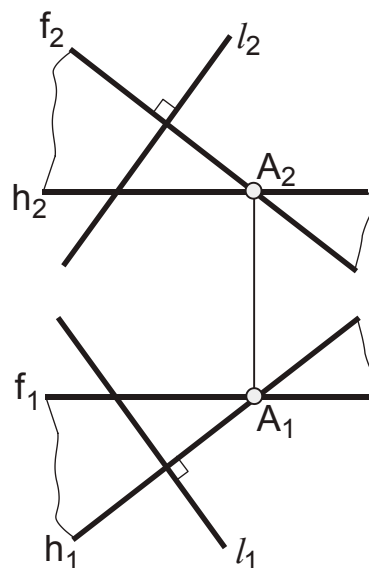


Рис. 96

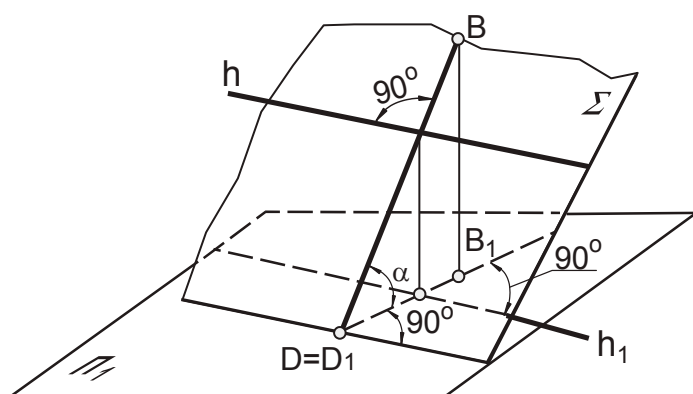
точки A так, что  $n_1 \perp h_1$  и  $n_2 \perp f_2$ . Точка пересечения перпендикуляра  $n$  с плоскостью  $\Sigma$  в этой задаче не определялась.

2. Восставить перпендикуляр к плоскости  $\Sigma(ABC)$  в точке B, принадлежащей плоскости.

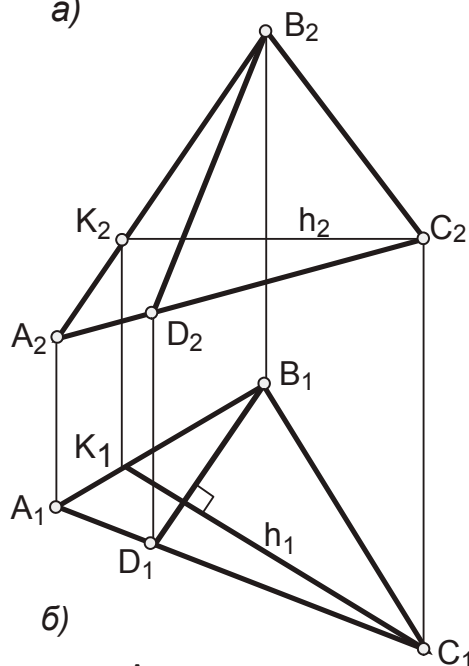
Решение задачи аналогично решению предыдущей (прямая  $m$  на рис. 95).

3. Через точку A провести плоскость  $\Gamma$ , перпендикулярную прямой  $l$  общего

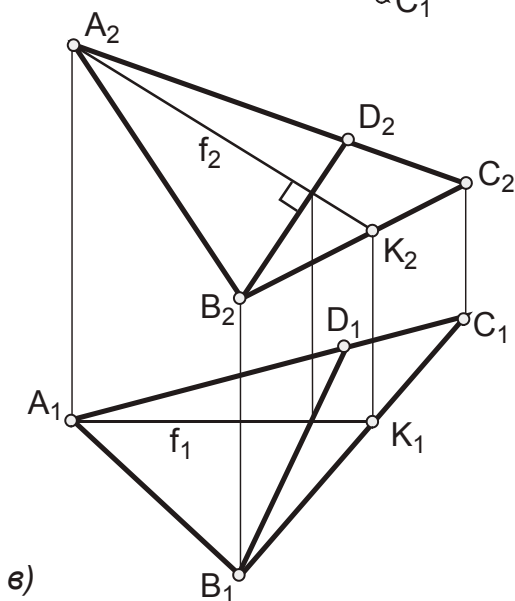
положения.



а)



б)



в)

Рис. 97

Для решения задачи достаточно провести через точку А две прямые, каждая из которых была бы перпендикулярна прямой l. В качестве таких прямых необходимо взять горизонталь и фронталь, так как их проекции легко построить на основании теоремы 1.

На чертеже (рис. 96) через точку А( $A_1A_2$ ) проведена горизонталь  $h \perp l [h_1 \perp l_1, h_2 \perp (A_1A_2)]$  и фронталь  $f \perp l [f_1 \perp (A_1A_2), f_2 \perp l_2]$ .

Плоскость  $\Sigma(h \cap f) \perp l$  является искомой. Точка пересечения прямой l с плоскостью  $\Sigma$  в задаче не определялась.

### Линии наибольшего наклона

Прямые, принадлежащие плоскости и перпендикулярные горизонталям, фронталям или профильным прямым этой плоскости, называются линиями наибольшего наклона.

На рис. 97а прямая  $BD \perp h$  является линией наибольшего наклона плоскости  $\Sigma$  к плоскости  $\Pi_1$ . Из всех прямых, принадлежащих плоскости, она образует наибольший угол с плоскостью  $\Pi_1$  (если  $BD \perp f$ , то с  $\Pi_2$ ; если  $BD \perp p$ , то с  $\Pi_3$ ). Поэтому угол  $\alpha$  на рис. 97а является линейным углом двугранного угла, образуемого плоскостями  $\Sigma$  и  $\Pi_1$ . На рис. 97б, в построены проекции линий наибольшего наклона плоскости  $\Sigma(ABC)$  соответственно к плоскостям  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ .

Построение проекций основано на теореме 1.

Величину угла  $\alpha$  можно определить, например, способом прямоугольного треугольника.

Плоскость на чертеже можно задать проекциями одной из принадлежащих ей линий

наибольшего наклона. Подумайте, почему одна линия наибольшего наклона однозначно определяет положение плоскости в пространстве?

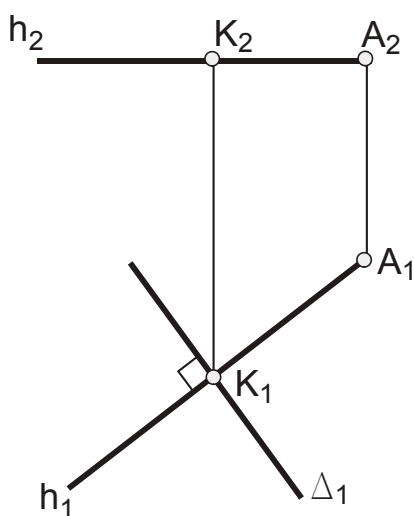


Рис. 98

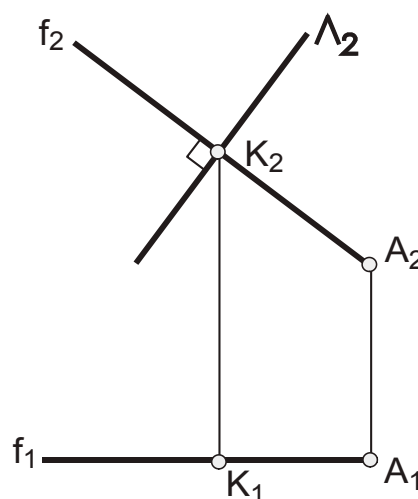


Рис. 99

### Частные случаи

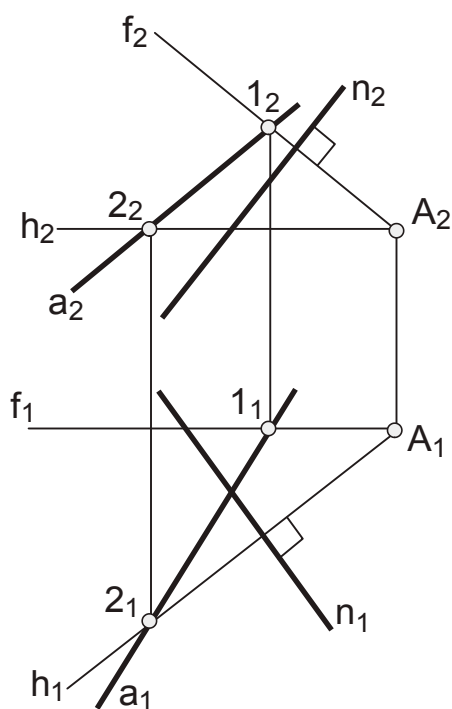


Рис. 100

1. Прямая, перпендикулярная горизонтально проецирующей плоскости  $\Delta(\Delta_1)$  (рис. 98), является горизонталью и на комплексном чертеже:

1)  $h_1 \perp \Delta_1$ ;  $h_2 \perp (A_1, A_2)$ ;

2)  $K(K_1 K_2) = h \cap \Delta$ ;

3)  $|A_1 K_1| = |AK|$  – расстояние от точки A до плоскости  $\Delta$ .

2. Прямая, перпендикулярная фронтально проецирующей плоскости  $\Lambda(\Lambda_1)$  (рис. 99), является фронталью и на комплексном чертеже:

1)  $f_1 \perp (A_1, A_2)$ ;  $f_2 \perp \Lambda_2$ ;

2)  $K(K_1, K_2) = f \cap \Lambda$ ;

3)  $|A_2 K_2| = |AK|$  – расстояние от точки A до плоскости  $\Lambda$ .

3. Прямая, перпендикулярная горизонтальной или фронтальной плоскости уровня, является соответственно горизонтально или фронтально проецирующей прямой.

### Взаимно перпендикулярные прямые общего положения

Если стороны прямого угла являются прямыми общего положения, то прямой угол на каждую из трех плоскостей проекций ( $\Pi_1, \Pi_2$ , и  $\Pi_3$ ) проецируется с искажением (частные случаи рассмотрены в начале главы). При построении проекций такого угла следует исходить из следующих положений:

1) если две прямые взаимно перпендикулярны, то через каждую из них можно провести плоскость, перпендикулярную к другой прямой;

2) если прямая перпендикулярна к плоскости, то она перпендикулярна любой прямой, принадлежащей этой плоскости.

Таким образом, построение взаимно перпендикулярных прямых общего положения в конечном счете сводится к построению плоскости, перпендикулярной к заданной прямой общего положения.

Рассмотрим решения некоторых задач.

1. Построить прямую  $a$ , перпендикулярную заданной прямой  $n$  общего положения.

Чтобы построить прямую, перпендикулярную к данной прямой, необходимо провести плоскость, перпендикулярную к этой прямой, и в этой плоскости провести любую прямую.

Решение задачи дано на чертеже (рис. 100). Через произвольную точку  $A$  пространства проведена плоскость  $\Sigma(h \cap f) \perp n$ , и в этой плоскости построена произвольная прямая  $a(a_1, a_2)$ . Прямая  $a \perp n$ , так как  $a \subset \Sigma \perp n$ .

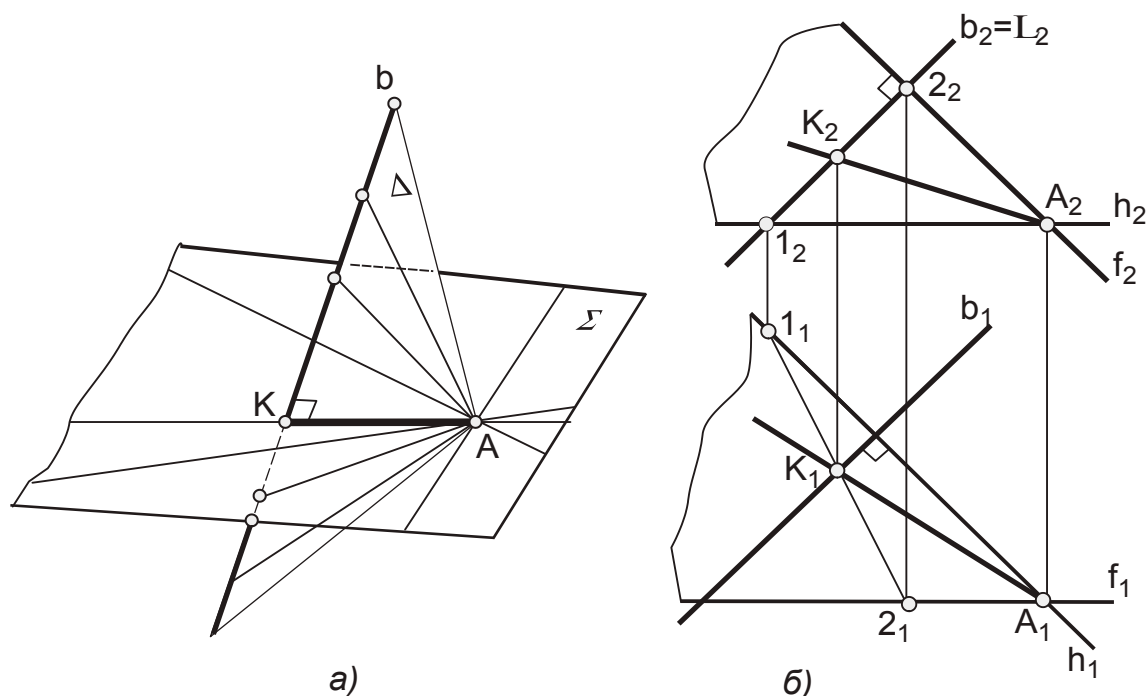


Рис. 101

2. Из точки  $A$  опустить перпендикуляр на прямую  $b$  общего положения.

Решение задачи дано на чертеже (рис.101).

Искомая прямая  $(AK) \perp b$  является результатом пересечения двух плоскостей: плоскости  $\Sigma \perp b$ , проходящей через точку  $A$ , и плоскости  $\Delta$ , проходящей через прямую  $b$  и точку  $A$ . Задача относится к числу комплексных, подробное объяснение ее решения дано в разделе «Комплексные задачи».

### Взаимно перпендикулярные плоскости

Если плоскость проходит через прямую линию, перпендикулярную к другой плоскости (или параллельна этой прямой), то она перпендикулярна к этой плоскости. Следовательно, плоскость  $\Sigma$ , перпендикулярную данной плоскости  $\Delta$ , можно построить:

1) либо как плоскость, проходящую через прямую, перпендикулярную заданной плоскости  $\Delta$ ;

2) либо как плоскость, перпендикулярную одной из прямых, принадлежащих плоскости  $\Delta$ .

В обоих случаях задача имеет бесчисленное множество решений, если на плоскость

$\Sigma$  не наложено каких-либо дополнительных условий.

На чертеже (рис.102) плоскость  $\Sigma(m \cap n) \perp \Delta(a \cap b)$  проведена через прямую  $m(m_1, m_2)$ , перпендикулярную плоскости  $\Delta(a \cap b)$ . Прямая  $n(n_1, n_2)$ , пересекающая прямую  $m$  в точке  $M$ , выбрана произвольно.

**Примечание.**

Если требуется провести плоскость  $\Sigma$ , перпендикулярную данной плоскости  $\Delta(a \cap b)$  и проходящую через заданную прямую  $n(n_1, n_2)$ , то плоскость  $\Sigma(m \cap n)$  является единственным

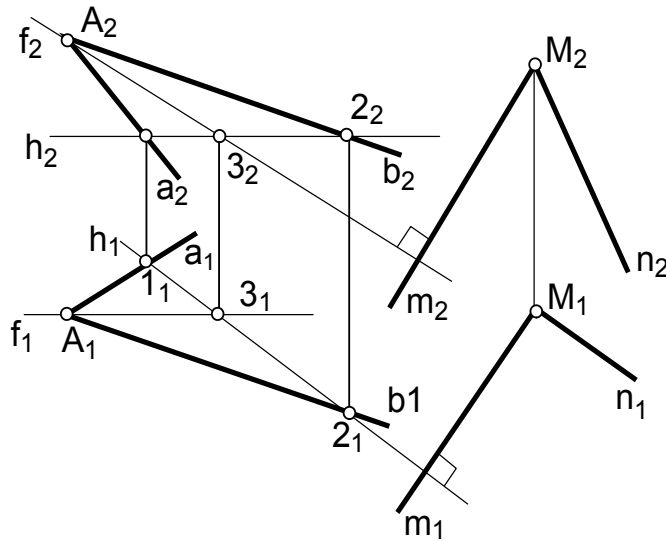


Рис. 102

решением.

На чертеже (рис. 103) плоскость  $\Sigma(h \cap f) \perp \Delta(a \cap b)$  проведена перпендикулярно прямой  $b(b_1, b_2)$ , принадлежащей плоскости  $\Delta$ , и задана поэтому горизонталью  $h[h_1 \perp b_1, h_2 \perp (M_1 M_2)]$  и фронталью  $f[f_1 \perp (M_1 M_2), f_2 \perp b_2]$ .

**Примечания:**

1. Если плоскость  $\Sigma(h \cap f)$  провести перпендикулярно горизонтали, принадлежащей плоскости  $\Delta(a \cap b)$ , то плоскость  $\Sigma$  расположится перпендикулярно к плоскостям  $\Delta$  и  $\Pi_1$  т. е. будет горизонтально проецирующей.

2. Если плоскость  $\Sigma(h \cap f)$  провести перпендикулярно фронтالي, принадлежащей плоскости  $\Delta(a \cap b)$ , то плоскость  $\Sigma$  расположится перпендикулярно к плоскостям  $\Delta$  и  $\Pi_2$ , т. е. будет фронтально проецирующей.

Плоскость, перпендикулярная одновременно двум заданным плоскостям, может быть построена:

- 1) либо как плоскость, перпендикулярная линии их пересечения;
- 2) либо как плоскость, проходящая через перпендикуляры к ним, построенные из одной точки пространства.

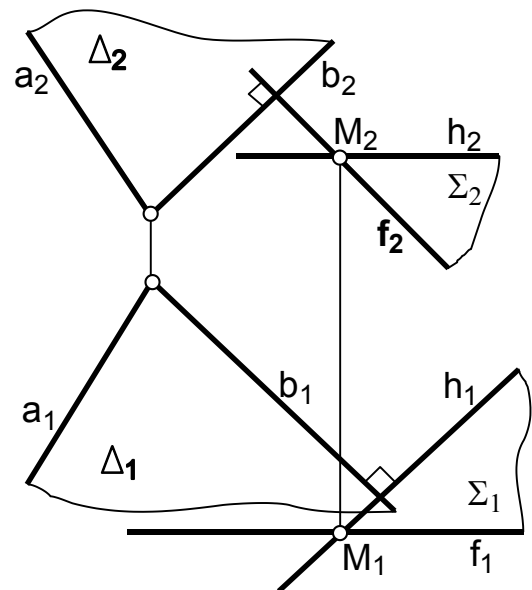


Рис. 103

## 4.2. ЗАДАЧИ, В КОТОРЫХ ОПРЕДЕЛЯЮТСЯ ОБЩИЕ ЭЛЕМЕНТЫ (ТОЧКИ ИЛИ ЛИНИИ) ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

Задачи этого типа делятся на первую и вторую позиционные.

К первой позиционной относятся все задачи, в которых определяются точки (одна или несколько) пересечения линии и поверхности.

Ко второй позиционной - все задачи, в которых определяется линия (одна или несколько) взаимного пересечения двух поверхностей.

### 4.2.1. Определение общих элементов простейших геометрических фигур из условия принадлежности (Вспомогательные позиционные задачи)

**Задача 1.** Построение точки пересечения прямой линии с проецирующей плоскостью.

Пусть даны горизонтально проецирующая плоскость  $\Sigma$  и прямая  $l$  общего положения (рис. 104а). Точка  $K$  пересечения прямой  $l$  с плоскостью  $\Sigma$  принадлежит одновременно и прямой  $l$  и плоскости  $\Sigma$ . Следовательно, горизонтальная проекция  $K_1$  точки  $K$  должна принадлежать одновременно

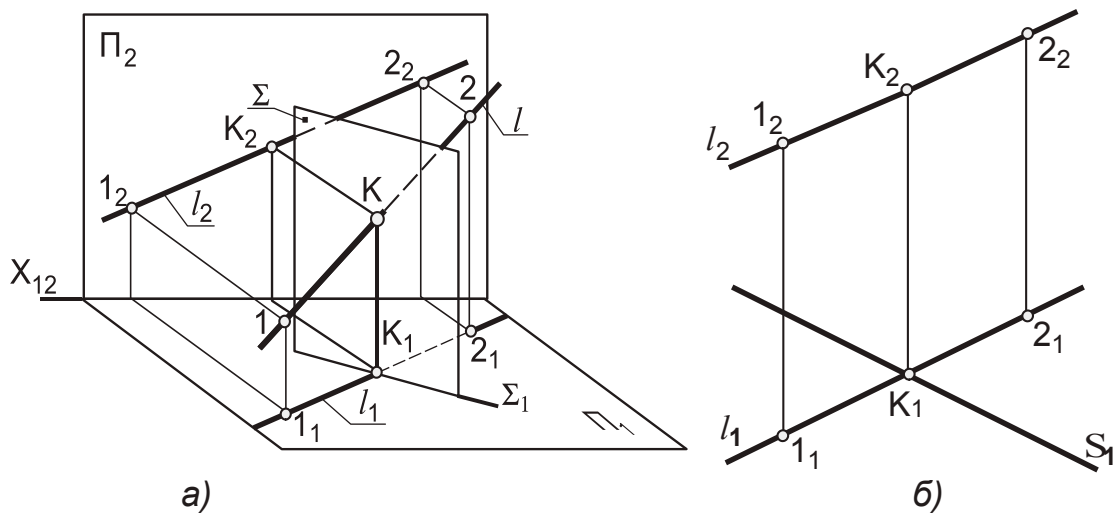


Рис. 104

горизонтальной проекции  $l_1$  прямой  $l$  и горизонтальной проекции  $\Sigma_1$  плоскости  $\Sigma$ , т. е.  $K_1 = l_1 \cap \Sigma_1$  (рис. 104б). Фронтальная проекция  $K_2$  точки  $K$  находится по линии связи на фронтальной проекции  $l_2$  прямой  $l$  на основании принадлежности точки  $K$  прямой  $l$ .

Если даны фронтально проецирующая плоскость  $\Delta$  и пересекающая ее прямая  $m$  общего положения (чертеж задайте самостоятельно), то  $K_2 \in \Delta_2$  и  $K_2 \in m_2$ , т. е.  $K_2 = \Delta_2 \cap m_2$ ;  $K_1$  находится по линии связи из условия, что  $K_1 \in m_1$ .

Прodelайте это построение на чертеже.

**Задача 2.** Построение линии пересечения плоскости общего положения с проецирующей плоскостью.

Пусть даны плоскость  $\Gamma(a \cap b)$  общего положения и горизонтально проецирующая плоскость  $\Sigma$  (рис. 105). Искомая линия  $k$  пересечения двух

плоскостей  $\Gamma$  и  $\Sigma$  является прямой и, следовательно, определяется двумя точками 1 и 2, одновременно принадлежащими этим плоскостям.

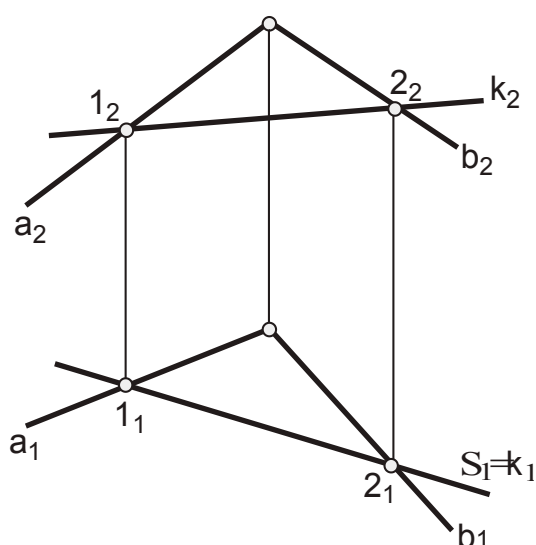


Рис. 105

Найдем точки 1 и 2 как точки пересечения прямых  $a$  и  $b$ , задающих плоскость  $\Gamma$ , с плоскостью  $\Sigma$ :  $1=a\cap\Sigma$  и  $2=b\cap\Sigma$ , т. е. дважды решим предыдущую задачу. Горизонтальные проекции  $1_1$  и  $2_1$  точек 1 и 2 определяют горизонтальную проекцию  $k_1$  прямой  $k(k_1=\Sigma_1)$ . Соединив прямой фронтальные проекции  $1_2$  и  $2_2$ , получим фронтальную проекцию  $k_2$  искомой прямой  $k$ .

Если даны плоскость  $\Gamma(a\cap b)$  общего положения и фронтально проецирующая плоскость  $\Delta$  (чертеж задайте самостоятельно), то для построения линии

$k(1, 2) = \Gamma\cap\Delta$  найдем точки  $1 = a\cap\Delta$  и  $2 = b\cap\Delta$ .

Прodelайте это построение самостоятельно.

**Задача 3.** Построение линии пересечения двух проецирующих плоскостей.

а) Даны две фронтально проецирующие плоскости  $\Delta$  и  $\Sigma$  (рис. 106а). Требуется построить линию  $k=\Delta\cap\Sigma$ .

Линией пересечения двух фронтально проецирующих плоскостей является фронтально проецирующая прямая, следовательно,  $k_2=\Sigma_2\cap\Delta_2$ ,  $k_1$  совпадает с линией связи.

б) Даны горизонтально проецирующая плоскость  $\Sigma$  и фронтально проецирующая плоскость  $\Gamma$ . Определить линию  $k = \Sigma\cap\Gamma$  (рис. 106б).

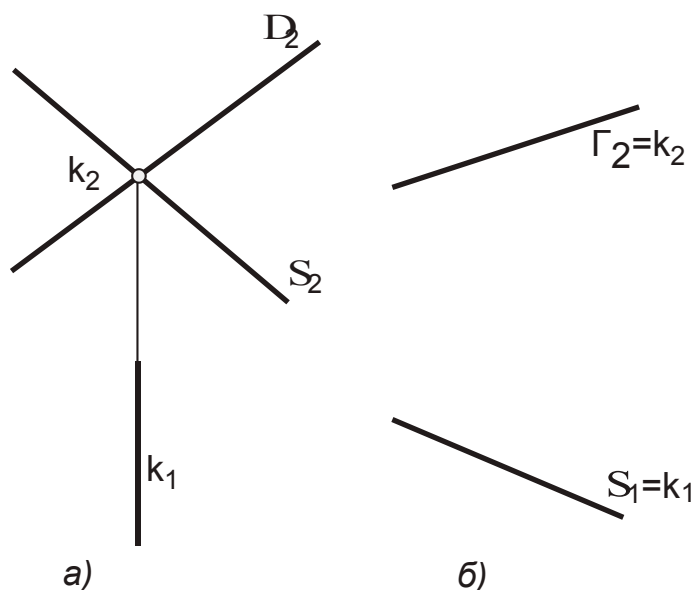


Рис. 106

Из условия принадлежности линии  $k$  одновременно плоскостям  $\Sigma$  и  $\Gamma$  имеем:  $k_1=\Sigma_1$  и  $k_2=\Gamma_2$

#### 4.2.2. Первая позиционная задача

##### (построение точек пересечения линии и поверхности)

В зависимости от вида и взаимного расположения линии и поверхности точек их пересечения может быть одна или несколько. Например, прямая линия с алгебраической поверхностью  $n$ -го порядка пересекается в  $n$  точках. В основу их построения положен способ вспомогательных поверхностей, сущность

которого состоит в том, что каждая из искомых точек рассматривается как результат пересечения двух линий, принадлежащих вспомогательной

поверхности. Одна из них является заданной линией, а вторая – линией пересечения вспомогательной и заданной поверхностей.

В соответствии с этим построение точек пересечения линии  $l$  и поверхности  $\Phi$  (независимо от их вида) осуществляется по следующей общей схеме (рис. 107):

1. Через данную линию  $l$  проводим вспомогательную поверхность  $\Theta$ .

2. Определяем линию  $m$  пересечения вспомогательной  $\Theta$  и заданной  $\Phi$  поверхностей.

3. Отмечаем точку  $A$  пересечения

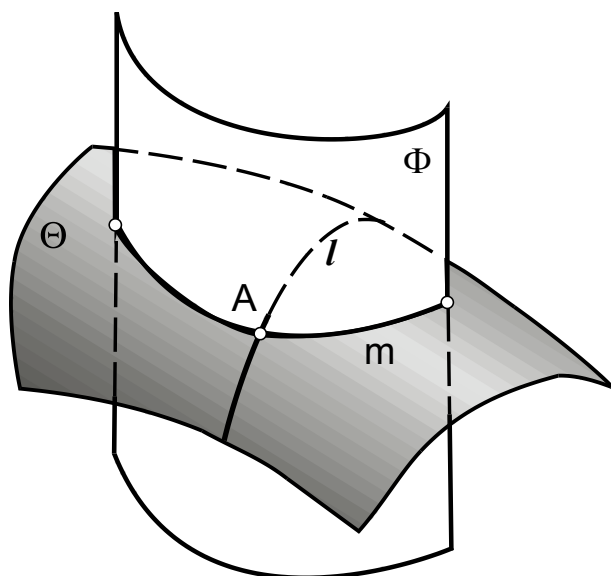


Рис. 107

линий  $l$  и  $m$ , которая и является искомой.

В символической записи схема имеет вид:

- 1) проводим  $l \in \Theta$ ;
- 2) определяем  $m = \Theta \cap \Phi$ ;
- 3) отмечаем  $A = l \cap m = l \cap \Phi$ .

#### Примечание.

Поскольку линии  $l$  и  $m$  принадлежат одной и той же вспомогательной поверхности, они могут пересекаться, касаться и не иметь общих точек. В первом случае линия  $l$  пересекается с поверхностью  $\Phi$ , во втором – касается ее, в третьем – не имеет с ней общих точек.

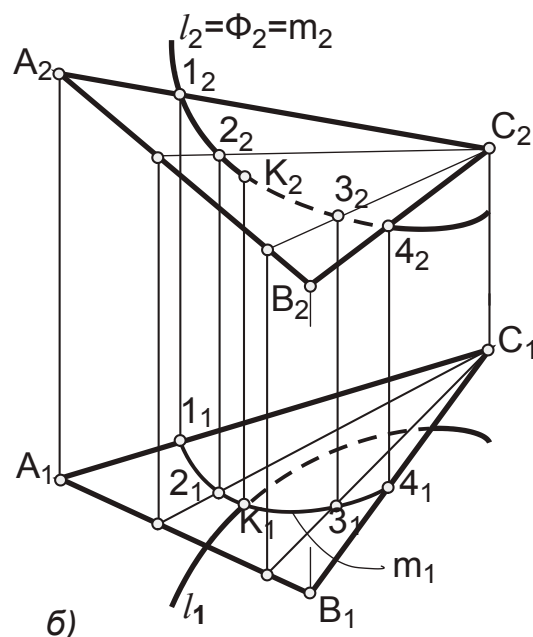
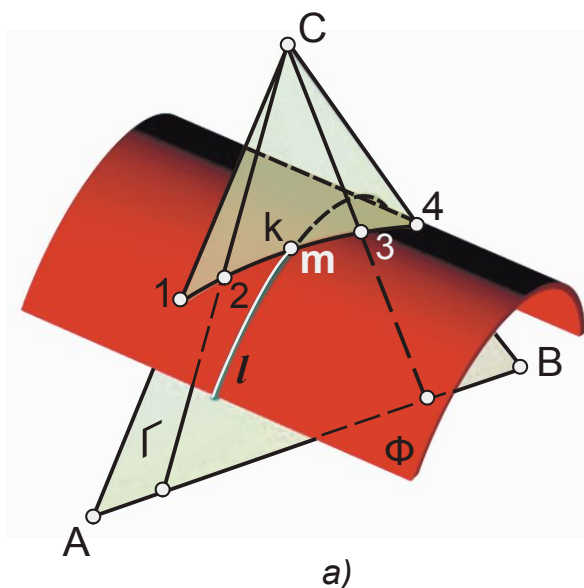


Рис. 108

Для конкретной задачи на основании общей схемы составляется алгоритм ее решения. Алгоритмом называется совокупность однозначных последовательных операций, которые необходимо выполнить для решения данной задачи. Схема преобразуется в алгоритм, если конкретизировать первый пункт, т. е. точно указать вид и положение вспомогательной поверхности, которая выбирается для определения точек пересечения заданных линии и поверхности. Только после составления алгоритма можно перейти к решению (построению) задачи на комплексном чертеже. Например, для определения точки К (рис.108) пересечения пространственной кривой  $l$  и плоскости  $\Gamma(ABC)$  общего положения алгоритм имеет вид (рис. 108а):

- 1) через кривую  $l$  провести фронтально проецирующую цилиндрическую поверхность  $\Phi(\Phi \supset l, \Phi \perp P_2)$ ;  $l$  - направляющая цилиндрической поверхности;
- 2) определить линию  $m$  пересечения плоскости  $\Gamma(ABC)$  и поверхности  $\Phi(m = \Phi \cap \Gamma)$ ;
- 3) отметить точку К пересечения линий  $l$  и  $m$ , которая является искомой( $k = l \cap m = l \cap \Gamma$ ).

Графическая реализация алгоритма, т. е. построение проекций точки К на комплексном чертеже, показана на рис. 108б. Фронтальная проекция  $\Phi_2$  вспомогательной цилиндрической поверхности совпадает с фронтальной проекцией  $l_2$  линии  $l(\Phi_2 = l_2)$ . Фронтальная проекция  $m_2$  линии  $m$  совпадает с фронтальной проекцией  $\Phi_2$  вспомогательной поверхности ( $m_2 = \Phi_2$ , ее горизонтальная проекция  $m_1$  найдена на основании принадлежности ряда точек (1,2,3,4) линии  $m$  плоскости  $\Gamma(ABC)$ ). Дальнейшее построение ясно из чертежа.

В качестве вспомогательных поверхностей наиболее часто применяются плоскости (общего и частного положения) и проецирующие цилиндрические поверхности. Выбор вида и положения вспомогательной поверхности определяется главным образом следующими соображениями:

1. Видом заданной линии  $l$ . Если линия  $l$  – пространственная кривая, то в качестве вспомогательной должна быть выбрана проецирующая цилиндрическая поверхность, для которой  $l$  является направляющей (см. рис. 108). Если  $l$  – кривая плоская, то в качестве вспомогательной может быть использована проецирующая цилиндрическая поверхность или плоскость, которой принадлежит данная кривая. И, наконец, если  $l$  – прямая линия, то в качестве вспомогательной поверхности выбирается плоскость.

2. Требованием простоты и точности построения на комплексном чертеже. Для выполнения этого требования вспомогательную поверхность следует по возможности выбирать так, чтобы **проекции линии ее пересечения с заданной поверхностью были графически простыми линиями, т. е. прямолинейными отрезками или дугами окружности** (рис. 109–114). Иногда для выполнения этого условия приходится прибегать к преобразованию комплексного чертежа (рис.115).

Ниже рассматриваются примеры решения типовых задач на определение точек пересечения прямой линии и поверхности.

Алгоритмы их решения составлены в соответствии с общей схемой решения первой позиционной задачи, рассмотренной выше.

**Задача 1.** Определение точки пересечения прямой линии общего положения

с плоскостью общего положения.

При определении точки  $K$  пересечения прямой  $l$  общего положения с плоскостью  $\Gamma(ABC)$  общего положения (рис. 109) в качестве вспомогательной

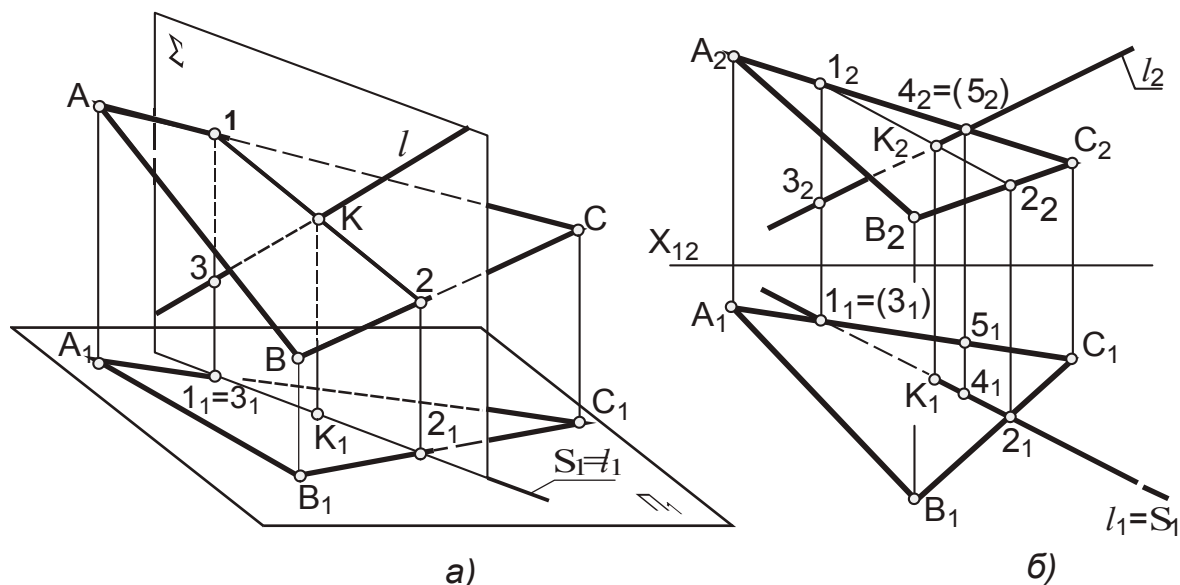


Рис. 109

поверхности должна быть применена какая-либо проецирующая плоскость. Выберем, например, горизонтально проецирующую плоскость  $\Sigma$  и составим алгоритм решения:

- 1)  $\Sigma \supset l$ ,  $\Sigma \perp \Pi_1$ , т. е. через прямую  $l$  проводим горизонтально проецирующую плоскость  $\Sigma$ ;
- 2)  $(1,2) = \Gamma \cap \Sigma$ , т. е. определяем линию  $(1,2)$  пересечения плоскостей  $\Gamma$  и  $\Sigma$ ;
- 3)  $K = (1,2) \cap l$ , т. е. отмечаем точку  $K$  пересечения линий  $(1,2)$  и  $l$ , которая и является искомой.

### Построение.

На рис. 109б дана графическая реализация этого алгоритма.

Проведена плоскость  $\Sigma \supset l$ ; на чертеже  $l_1 = \Sigma_1$ . Найдены фронтальная  $(1_2, 2_2)$  и горизонтальная  $(1_1, 2_1)$  проекции линии  $(1,2) = \Gamma \cap \Sigma$ . Точка  $K_2 = l_2 \cap (1_2, 2_2)$  является фронтальной проекцией искомой точки  $K$ . Ее горизонтальная проекция  $K_1 \in l_1$  определяется по линии связи.

Считая, что заданная плоскость  $\Gamma(ABC)$  непрозрачна, определили видимость проекций прямой  $l$  при помощи конкурирующих точек. Видимость прямой изменяется на обратную в точке пересечения ее с плоскостью. Определение видимости производится отдельно для каждой проекции. Так, видимость горизонтальной проекции прямой  $l$  определяется при помощи горизонтально конкурирующих точек 1 и 3, принадлежащих скрещивающимся прямым  $l$  и  $(AC)$ . Так как точка 1 выше точки 3 (на что указывает расположение их фронтальных проекций), то прямая  $l$  расположена под  $AC$ . Следовательно, горизонтальная проекция  $l_1$  слева от точки  $K_1$  невидима (вычерчивается штриховой линией), а справа от нее видима.

Для фронтальной проекции видимость линии пересечения определялась с помощью двух фронтально конкурирующих точек.

Рассмотренный алгоритм применим для решения любых задач на пересечение прямой с плоскостью общего положения.

**Задача 2.** Определение точек пересечения прямой линии с поверхностью многогранника.

Решение этой задачи сводится к определению точек пересечения прямой с гранями многогранника и выполняется по алгоритму, аналогичному предыдущему.

Определение точек М и N пересечения прямой  $l$  с поверхностью призмы  $\Phi$  показано на рис. 110.

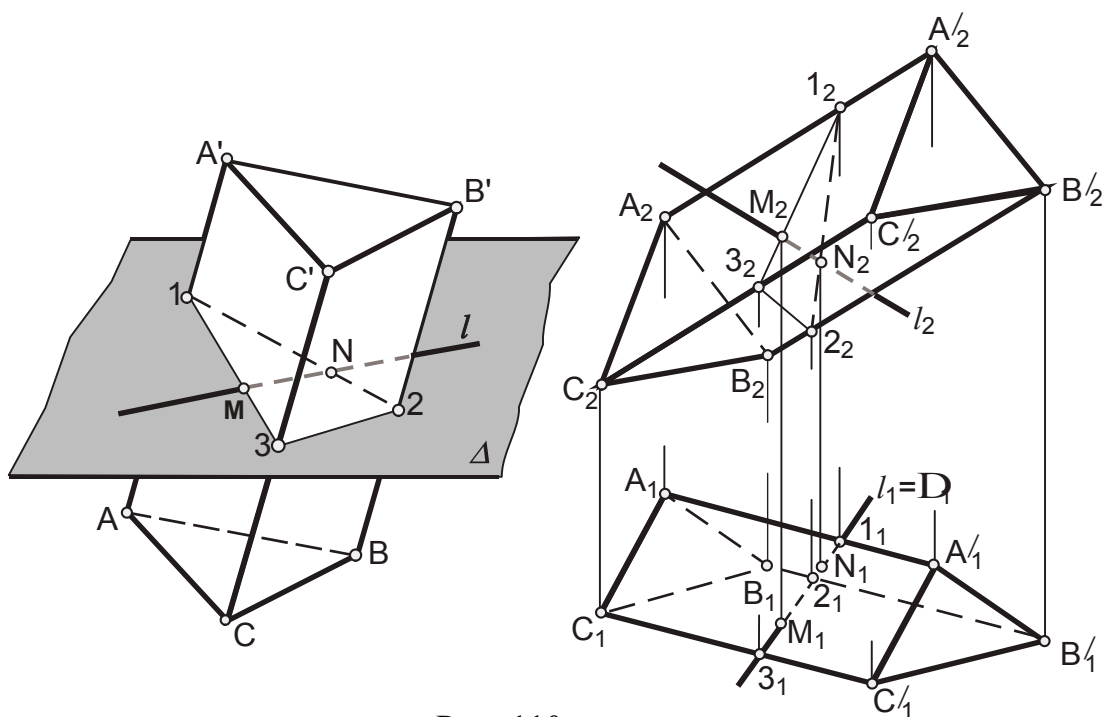


Рис. 110

#### Алгоритм:

- 1)  $\Delta \supset l, \Delta \perp \Pi_1$  (может быть выбрана  $\Delta \perp \Pi_2$ );
- 2)  $(1-2-3) = \Phi \cap \Delta$ ;
- 3)  $M = (1-2-3) \cap l = \Phi \cap l$ ,  
 $N = (1-2-3) \cap l = \Phi \cap l$ .

#### Построение.

Проводим через прямую  $l$  горизонтально проецирующую плоскость  $\Delta$ ; на чертеже  $l_1 = \Delta_1$ . Находим горизонтальную и фронтальную проекции замкнутой ломаной  $(1-2-3)$  пересечения плоскости  $\Delta$  и поверхности призмы  $\Phi$ . Отмечаем  $M_2 = (1_2-2_2-3_2) \cap l_2$  и  $N_2 = (1_2-2_2-3_2) \cap l_2$  и по линиям связи находим  $M_1 \in l_1$  и  $N_1 \in l_1$ .

Поверхность многогранника считается непрозрачной. Видимость проекций прямой  $l$  относительно плоскостей проекций определяется по видимости граней.

Рассмотренный алгоритм применим для определения точек пересечения прямой с любым многогранником.

#### Задача 3 .

Определение точек пересечения прямой линии с поверхностью конуса.

а) В задаче (рис. 111) требуется определить точки М и N пересечения

горизонтали  $h$  с поверхностью конуса вращения  $\Phi$ . В данном случае целесообразно через прямую  $h$  провести горизонтальную плоскость уровня  $\Gamma$ , так как такая плоскость пересечет поверхность конуса по параллели  $m$ , которая спроецируется на  $\Pi_1$  без искажения.

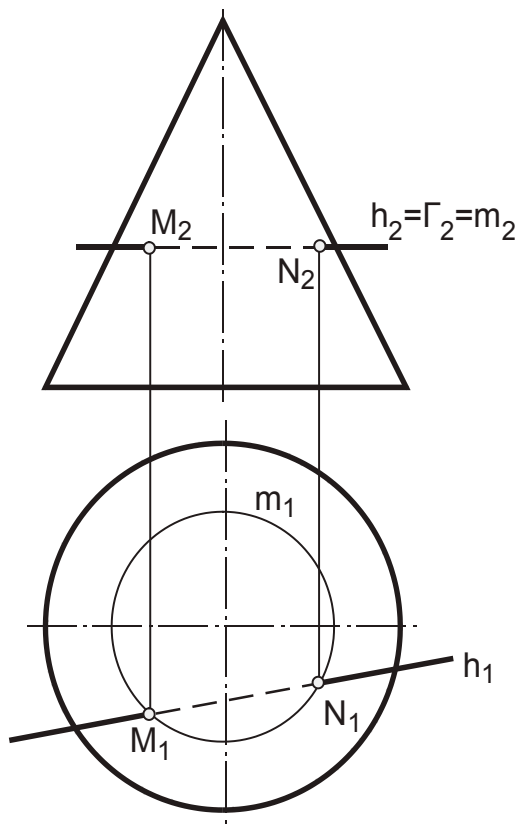


Рис. 111

**Алгоритм:**

- 1)  $\Gamma \subset h$ ,  $\Gamma \parallel \Pi_1$ ;
- 2)  $m = \Phi \cap \Gamma$ ;
- 3)  $M = m \cap h$ ;  $N = m \cap h$ .

Графическая реализация алгоритма понятна из чертежа.

**б)** В задаче (рис.112) требуется определить точки  $M$  и  $N$  пересечения прямой  $l$  общего положения с поверхностью  $\Phi$  эллиптического конуса. Применение в качестве вспомогательной проецирующей плоскости в данном случае нецелесо-образно, так как в сечении получится кривая второго порядка, которую нужно строить по точкам. Плоскость же общего положения, проходящая через вершину конуса и прямую  $l$ , пересечет его по образующим.

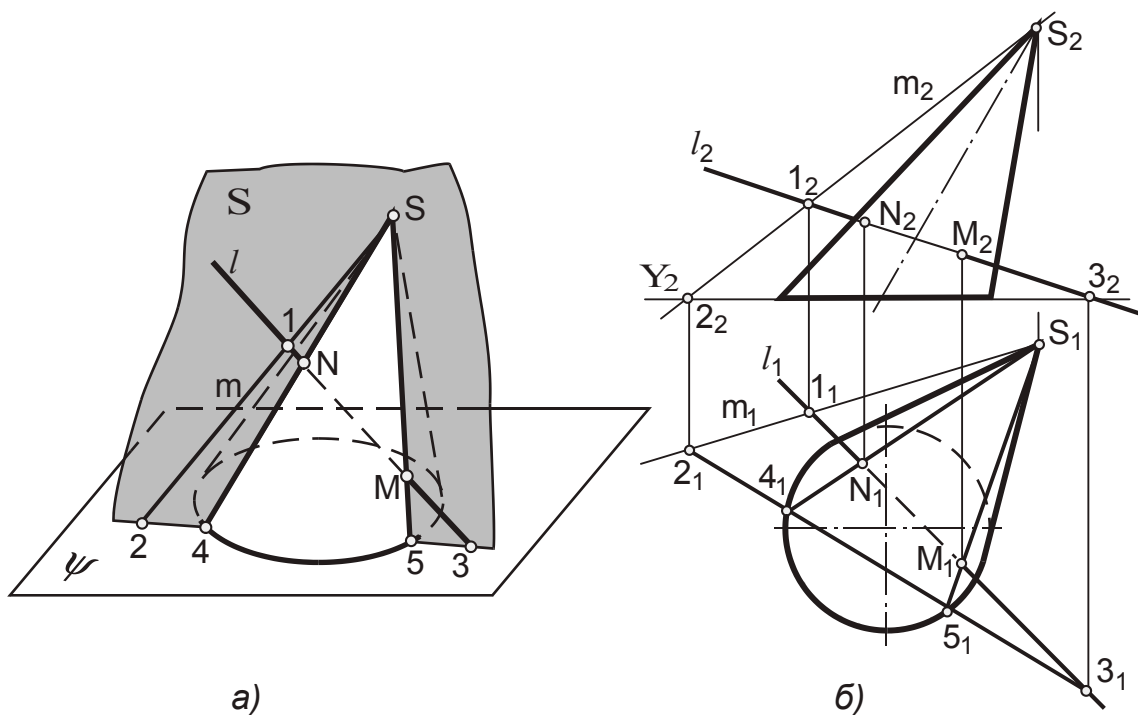


Рис. 112

**Алгоритм:**

- 1)  $\Sigma(l \cap m)$ ;  $S \in \Sigma$ , так как  $S \in m$ ;
- 2)  $\Sigma \cap \Phi = S4$  и  $S5$ ;
- 3)  $M = (S5) \cap l = \Phi \cap l$ ;  $N = (S4) \cap l = \Phi \cap l$ .

**Построение.**

Реализация алгоритма показана на рис.112б. Для определения образующих  $S4$  и  $S5$ , по которым плоскость  $\Sigma$  пересекает поверхность  $\Phi$  конуса, предварительно построена линия 2–3 пересечения плоскости  $\Sigma$  с плоскостью  $\Psi$  основания конуса. Найдены горизонтальные проекции  $4_1$  и  $5_1$  точек 4 и 5 пересечения прямой (2–3) с окружностью основания конуса, построены горизонтальные проекции  $(S_1 4_1)$  и  $(S_1 5_1)$  образующих  $(S4)$  и  $(S5)$ , и найдены проекции  $M_1$  и  $N_1$  а затем по линиям связи – проекции  $M_2$  и  $N_2$  точек  $M$  и  $N$ .

**Задача 4.**

Определение точек пересечения прямой линии с поверхностью  $\Phi$  эллиптического цилиндра.

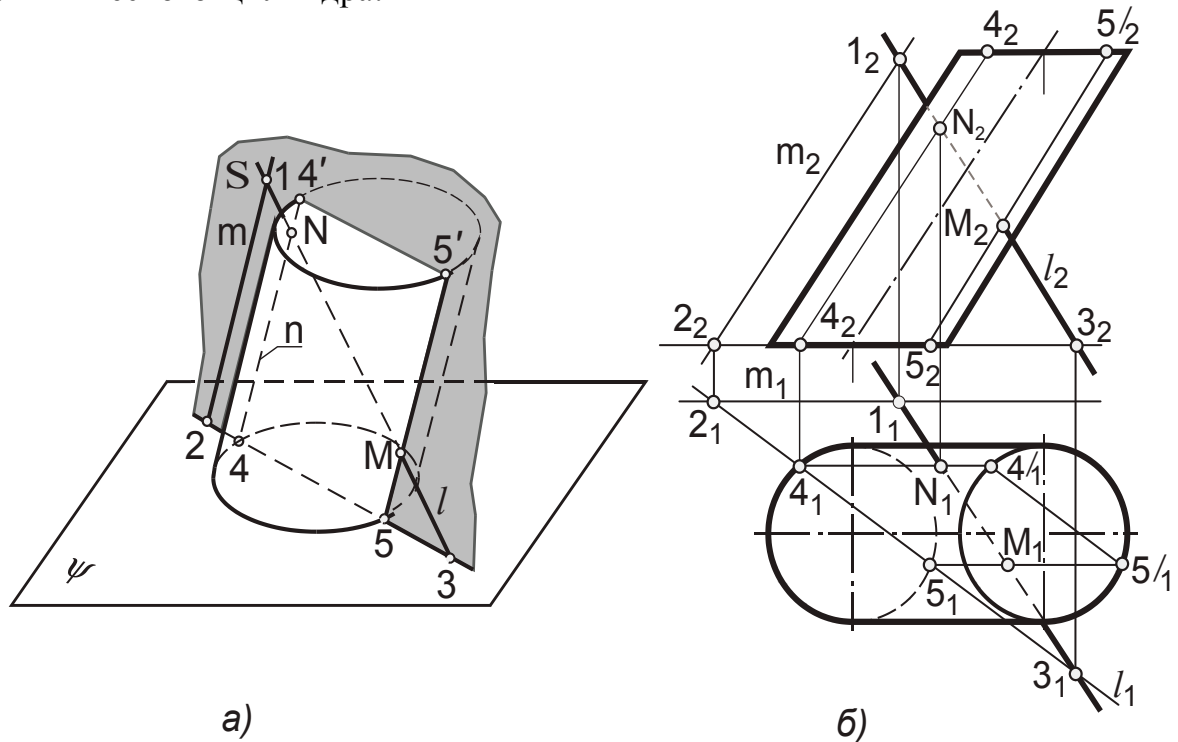


Рис. 113

При составлении алгоритма решения задачи на определение точек  $M$  и  $N$  пересечения прямой  $l$  с поверхностью  $\Phi$  эллиптического цилиндра (рис.113) в качестве вспомогательной следует выбрать плоскость, проходящую через прямую  $l$  и параллельную образующим цилиндра, которая пересечет его поверхность по образующим.

**Алгоритм:**

- 1)  $\Sigma(l \cap m)$ ,  $m$  параллельна образующим цилиндра, следовательно,  $\Sigma$  параллельна образующим;
- 2)  $\Sigma \cap \Phi = n(4-4'-5'-5)$ ;
- 3)  $l \cap (4-4') = N$  и  $l \cap (5-5') = M$ .

### Построение.

Решение задачи на чертеже показано на рис. 113б. Все построения аналогичны построениям задачи 3.

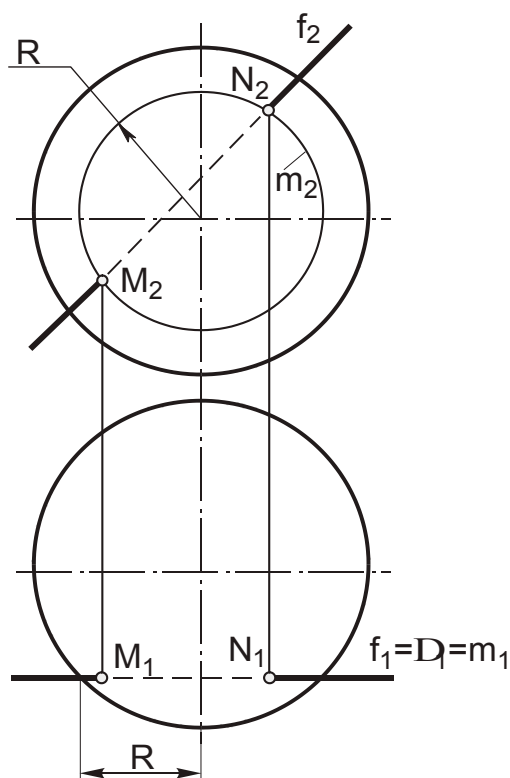


Рис. 114

Построена фронтальная проекция  $m_2$  линии  $m = \Theta \cap \Delta$ . Определены  $M_2 = m_2 \cap f_2$  и  $N_2 = m_2 \cap f_2$ ; по линиям связи найдены  $M_1 \in f_1$  и  $N_1 \in f_1$ .

б) В задаче, приведенной на рис. 115, требуется построить точки М и N пересечения сферы  $\Phi$  с прямой (AB) общего положения. В качестве вспомогательной применена горизонтально проецирующая плоскость  $\Sigma \supset (AB)$ . Окружность сечения сферы этой плоскостью спроецируется на  $\Pi_2$  в эллипс.

Для избежания построения эллипса плоскость  $\Sigma$  преобразована в плоскость уровня способом замены плоскостей проекций. На  $\Pi_4$  линия сечения спроецируется в окружность, т. е. в системе плоскостей  $\Pi_1/\Pi_4$  задача аналогична предыдущей.

Сначала найдены проекции  $M_4$  и  $N_4$  точек М и N, а затем обратным преобразованием –  $M_1, N_1$  и  $M_2, N_2$ .

### Задача 5.

Определение точек пересечения прямой линии и сферы.

а) В задаче, приведенной на рис. 114, требуется определить точки М и N пересечения сферы  $\Theta$  с фронталью.

В качестве вспомогательной целесообразно применить фронтальную плоскость уровня  $\Delta \supset f$ , так как окружность  $m$  сечения сферы  $\Theta$  этой плоскостью спроецируется на  $\Pi_2$  без искажения.

### Алгоритм:

- 1)  $\Delta \cap f, \Delta \parallel \Pi_2$ ;
- 2)  $m = \Theta \cap \Delta$
- 3)  $M = m \cap f$  и  $N = m \cap f$ .

### Построение.

Проведена  $\Delta \parallel \Pi_2$  – на чертеже  $f_1 = \Delta_1$ .

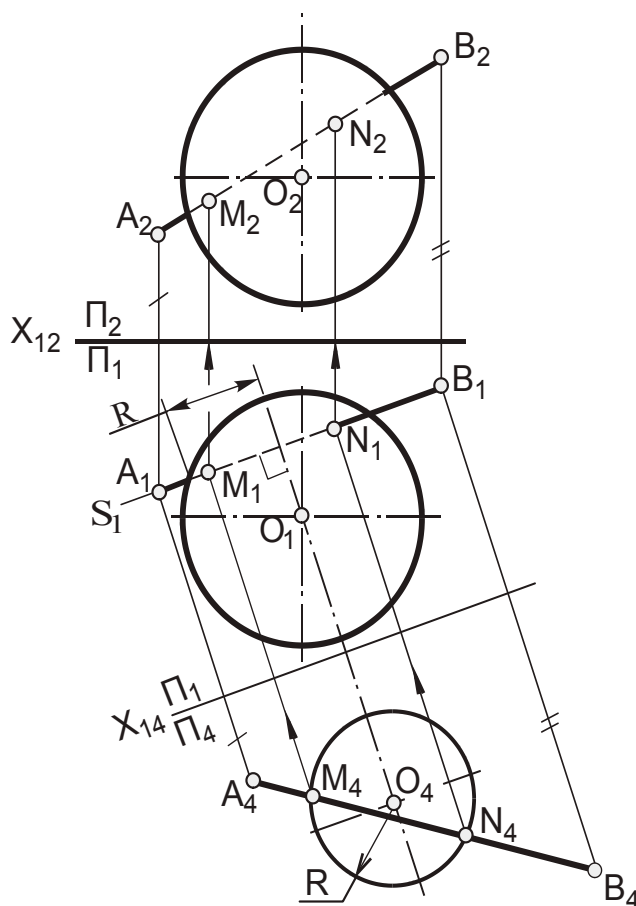


Рис. 115

### 4.2.3. Вторая позиционная задача (построение линии пересечения двух поверхностей)

Две поверхности пересекаются по линии (совокупности линий), которая одновременно принадлежит каждой из них (рис. 116, 117, 119, 121). В зависимости от вида и взаимного положения поверхностей линия их пересечения может быть прямой (см. рис. 117, 118), плоской или пространственной ломаной (см. рис. 119, 120, 127), плоской или пространственной кривой (рис. 122, 123, 124, 125, 128, 129).

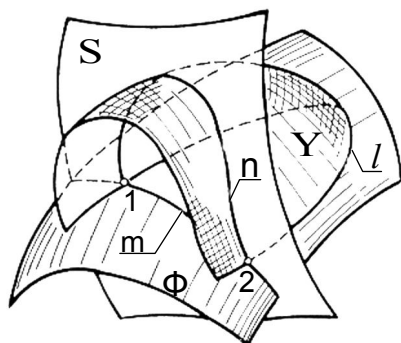


Рис. 116

Построение этой линии (независимо от ее формы) сводится к построению ряда точек, одновременно принадлежащих каждой из пересекающихся поверхностей. Линия, в определенном порядке соединяющая эти точки, и будет искомой. Точки, образующие линию пересечения, разделяются на опорные (точки K, L, M на рис.119; A, B, C, D на рис.121) и промежуточные (точки 3, 4).

Опорными точками являются:

1) точки, принадлежащие участвующим в пересечении ребрам многогранника (см. рис. 119);

2) точки, в которых линия пересечения пересекает линию видимого контура поверхности относительно той или иной плоскости проекций (точки C и D на рис.121); проекции этих точек принадлежат очерковой линии соответствующей проекции поверхности и называются **очерковыми**. В этих точках проекция линии пересечения касается очерка проекции поверхности. В случае пересечения поверхности с плоскостью (см. рис. 122 – 125) очерковые точки делят соответствующую им проекцию линии пересечения на видимую и невидимую части и называются **точками смены видимости**. При пересечении двух поверхностей (когда ни одна из них не является плоскостью) не каждая из очерковых точек является одновременно и точкой смены видимости;

3) экстремальные точки, то есть самая близкая и самая удаленная точки линии пересечения относительно той или иной плоскости проекций. Экстремальные точки относительно плоскости  $\Pi_1$  называются высшей и низшей (точки A и B на рис.121).

Основным способом построения точек, принадлежащих искомой линии пересечения, является способ вспомогательных поверхностей. Сущность его заключается в том, что каждая из искомых точек рассматривается как результат пересечения двух линий, одна из которых является линией пересечения вспомогательной поверхности с одной из заданных, а вторая – линией пересечения той же вспомогательной поверхности с другой из заданных поверхностей.

В соответствии с этим построение произвольных точек 1 и 2, принадлежащих линии  $l$  пересечения поверхностей  $\Phi$  и  $\Psi$  (независимо от их вида), осуществляется по следующей **общей схеме** (см. рис. 116):

1. Проводится вспомогательная поверхность  $\Sigma$ , пересекающая заданные поверхности  $\Phi$  и  $\Psi$ .

2. Определяются линии  $m$  и  $n$  пересечения вспомогательной поверхности  $\Sigma$  с каждой из заданных.

3. Отмечаются точки 1 и 2 пересечения построенных линий  $m$  и  $n$ , которые и являются искомыми, так как одновременно принадлежат данным поверхностям  $\Phi$  и  $\Psi$  и, следовательно, линии  $l$  их пересечения.

В символической записи схема имеет вид:

1)  $\Sigma \cap \Phi \cap \Psi$ ;

2)  $m = \Sigma \cap \Phi \cap n = \Sigma \cap \Psi$ ;

3)  $l = m \cap n \cap 2 = m \cap n$ .

#### **Примечание.**

Так как линии  $m$  и  $n$  принадлежат одной и той же вспомогательной поверхности  $\Sigma$ , они могут пересекаться, касаться и не иметь общих точек. В последнем случае вспомогательная поверхность выбрана неудачно, т. е. вне зоны существования линии пересечения.

Многократное применение указанного способа позволяет определить достаточное количество точек (опорных и промежуточных), принадлежащих линии пересечения. При решении конкретной задачи необходимо на основании общей схемы составить алгоритмы для построения опорных и промежуточных точек линии пересечения. В качестве вспомогательных поверхностей могут быть выбраны плоскость, сферическая, цилиндрическая и коническая поверхности. Наиболее часто применяются плоскости (способ вспомогательных плоскостей) или сферы (способ вспомогательных сфер). Выбор вида и положения вспомогательных поверхностей определяется в основном тремя соображениями:

1. Необходимо определить положение целого ряда опорных точек линии пересечения.

2. Любая из проведенных вспомогательных поверхностей должна пересекать каждую из заданных по таким линиям, проекций которых были бы, как правило, графически простыми линиями, т. е. прямыми или окружностями.

3. Все вспомогательные поверхности должны пересекать заданные в пределах зоны возможного расположения линии пересечения, чтобы избежать лишних построений.

Первое условие ставит выбор вспомогательных поверхностей в зависимость от необходимости определения тех или иных опорных точек линии пересечения. Действительно, опорные точки располагаются на вполне определенных линиях, принадлежащих заданным поверхностям. Поэтому вспомогательные поверхности должны быть выбраны таким образом, чтобы они пересекали заданные именно по этим линиям с учетом выполнения второго условия. Так, для определения точек, принадлежащих участвующим в пересечении ребрам многогранника (рис. 120, 127, 128), вспомогательные поверхности следует провести через эти ребра. Для построения очерковых точек (рис. 122–125, 128, 129 и др.) вспомогательная поверхность должна проходить через соответствующую линию видимого контура поверхности. В частности, для поверхностей вращения (см. рис. 122, 124, 128, 129) – через главный меридиан и экватор. Для построения экстремальных точек кривой пересечения трудно указать общий для всех случаев принцип проведения вспомогательной поверхности. Каждый раз приходится предварительно искать те линии поверхностей, которым эти точки принадлежат, а затем через них проводить вспомогательные поверхности.

### Например:

1. Высшую и низшую точки линии пересечения цилиндрических и конических поверхностей второго порядка с плоскостью общего положения (рис. 123) можно построить, руководствуясь тем, что касательные прямые к линии пересечения в этих точках являются горизонталями секущей поверхности. Касательная плоскость к заданной поверхности, проведенная через одну из этих касательных прямых, будет касаться поверхности по образующей прямой, которой принадлежит одна из искомых точек. Касательная плоскость, проведенная через вторую касательную прямую, коснется поверхности по образующей, которой принадлежит вторая искомая точка. Таким образом, вспомогательные поверхности (в данном случае плоскости) следует провести через найденные указанным способом образующие поверхности.

2. Высшую и низшую точки линии пересечения поверхности вращения с плоскостью (см. рис. 122, 124), двух поверхностей вращения (рис. 129) можно определить, руководствуясь тем, что они располагаются в общей плоскости симметрии для каждой пары пересекающихся поверхностей.

При этом следует иметь в виду:

а) плоскостью симметрии некоторой плоскости  $\Sigma$  является любая плоскость, к ней перпендикулярная;

б) плоскостью симметрии поверхности вращения является любая плоскость, проходящая через ее ось;

в) общая плоскость симметрии должна удовлетворять обоим указанным условиям, т.е. проходить через ось поверхности вращения и быть перпендикулярной к секущей плоскости (в случае пересечения поверхности вращения с плоскостью) или проходить через оси поверхностей вращения (в случае пересечения двух поверхностей вращения).

Следует обратить внимание на то, что при решении конкретной задачи каждая из опорных точек требует составления своего особого алгоритма построения, в то время как промежуточные точки могут быть построены на основании одного и того же алгоритма.

Второе условие, которому должны удовлетворять вспомогательные поверхности, в большинстве случаев выполнимо. Иногда для его обеспечения приходится прибегать к преобразованию комплексного чертежа.

Третье условие, которое необходимо соблюдать при выборе вспомогательных поверхностей, устанавливает пределы, в которых последние можно проводить. **Проекция линии пересечения могут располагаться только в пределах площади наложения одноименных проекций пересекающихся поверхностей**, поэтому проекции вспомогательных поверхностей должны пересекать эту площадь наложения. Если в качестве вспомогательных используются горизонтальные плоскости уровня, то границами, между которыми их можно проводить, являются высшая и низшая точки линии пересечения (см. рис. 122, 124, 129).

Рассмотрим приложение изложенных принципов к решению конкретных задач.

### *Способ вспомогательных плоскостей*

**Задача 1.** Построение линии пересечения двух плоскостей (поверхностей первого порядка) общего положения (см. рис. 117, 118).

Линия пересечения двух плоскостей  $\Delta(a \cap b)$  и  $\Sigma(c \parallel d)$  (см. рис.117) является прямой и, следовательно, определяется двумя точками М и N, одновременно принадлежащими обеим плоскостям. Каждая из них определяется по алгоритму, который составляется на основании общей схемы решения второй позиционной задачи. В данном случае в качестве вспомогательных поверхностей выбираются плоскости частного положения (проецирующие или плоскости уровня). Выберем, например, горизонтальную плоскость уровня  $\Gamma$  и составим алгоритм (см. рис. 117а), который в символической записи имеет вид:

- 1)  $\Gamma \cap \Delta \wedge \Sigma, \Gamma \parallel \Pi_1$
- 2)  $m = \Delta \cap \Gamma, n = \Sigma \cap \Gamma$ ;
- 3)  $M = m \cap n$

Определение второй точки N, принадлежащей линии пересечения плоскостей, выполняется по аналогичному алгоритму. Прямая, соединяющая точки М и N, является искомой.

### Построение.

Графическая реализация обоих алгоритмов, то есть решение задачи на комплексном чертеже, показана на рис.117б.

Если пересекающиеся плоскости (или одна из них) заданы многоугольниками, например ABC и DEFK (см. рис.118), то построение линии MN их пересечения значительно упрощается, если вспомогательные проецирующие плоскости проводить не произвольно, а через какие-либо две из сторон многоугольников. Сторона многоугольника (например, (AB) на рис. 118), через которую проведена вспомогательная проецирующая плоскость  $\Gamma$ , является уже линией пересечения плоскости  $\Gamma$  и треугольника

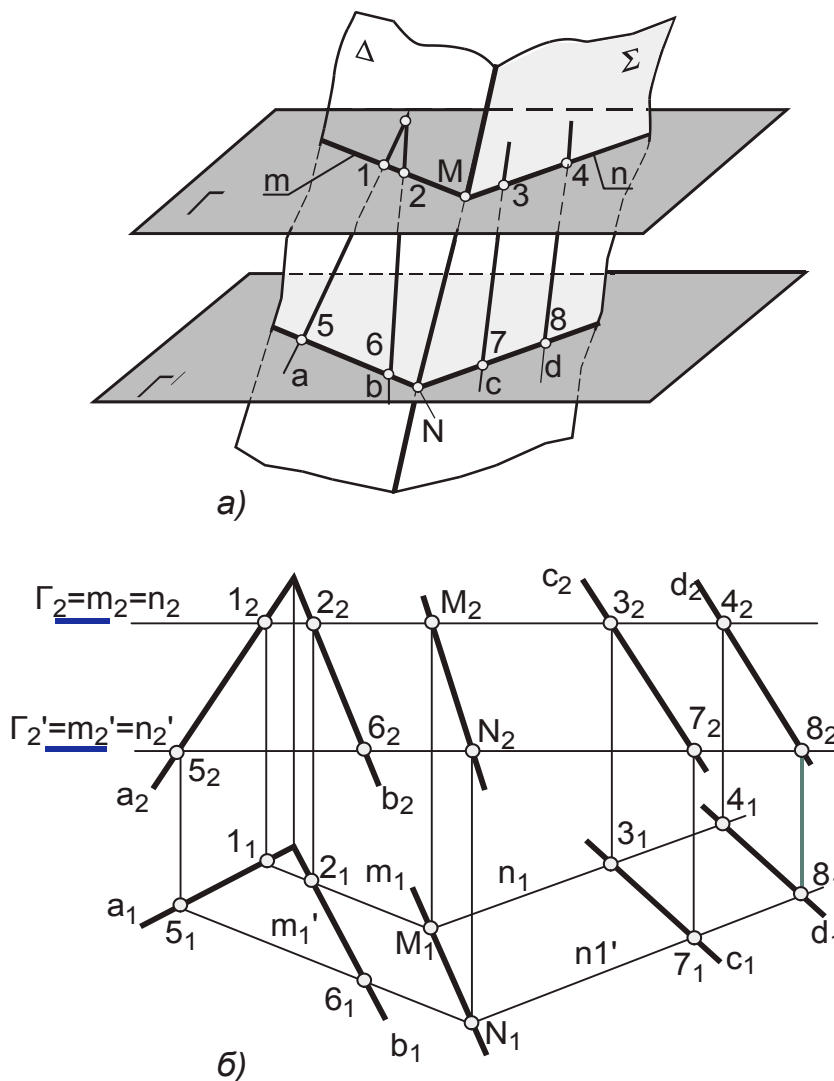


Рис. 117

ABC. Остается лишь найти линию (1–2) пересечения плоскости  $\Gamma$  со вторым многоугольником DEFK. Точка М пересечения линий (AB) и (1–2) является искомой. Аналогично определяется вторая точка N линии пересечения.

Легко заметить, что в этом случае решение задачи сводится к последовательному решению двух первых позиционных задач (см выше в данном

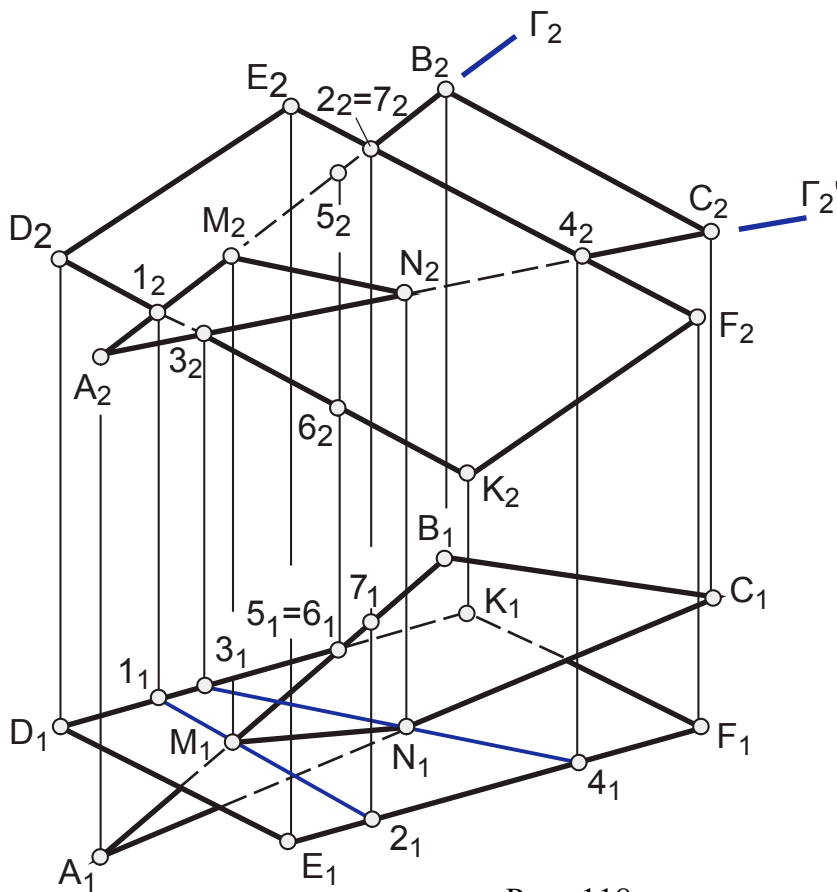


Рис. 118

разделе). Видимость проекций многоугольников  $ABC$  и  $DEFK$  на  $\Pi_2$  определена с помощью фронтально конкурирующих точек 2 и 7, на  $\Pi_1$  – с помощью горизонтально конкурирующих точек 5 и 6.

**Задача 2.** Построение линии пересечения многогранника с плоскостью.

Линия пересечения многогранника плоскостью (см. рис. 119) является плоской ломаной линией, вершины которой – точки пересечения ребер, а стороны – линии пересечения граней многогранника с плоскостью. В соответствии с этим искомая линия может быть определена двумя частными способами, вытекающими из основного:

1) построением линий пересечения граней многогранника с плоскостью, т. е. многократным решением второй позиционной задачи;

2) построением точек пересечения ребер многогранника с плоскостью, т. е. многократным решением первой позиционной задачи.

Второй способ, являясь частным случаем первого (см. предыдущую задачу), графически более прост. Кроме того, вершины ломаной являются опорными точками линии пересечения, и их желательно получить непосредственно построением. Поэтому второй способ построения линии пересечения многогранника с плоскостью является предпочтительным.

Графическое решение задачи на построение линии пересечения пирамиды  $SABC$  с плоскостью общего положения  $\Delta$  ( $a \parallel b$ ) показано на рис. 120.

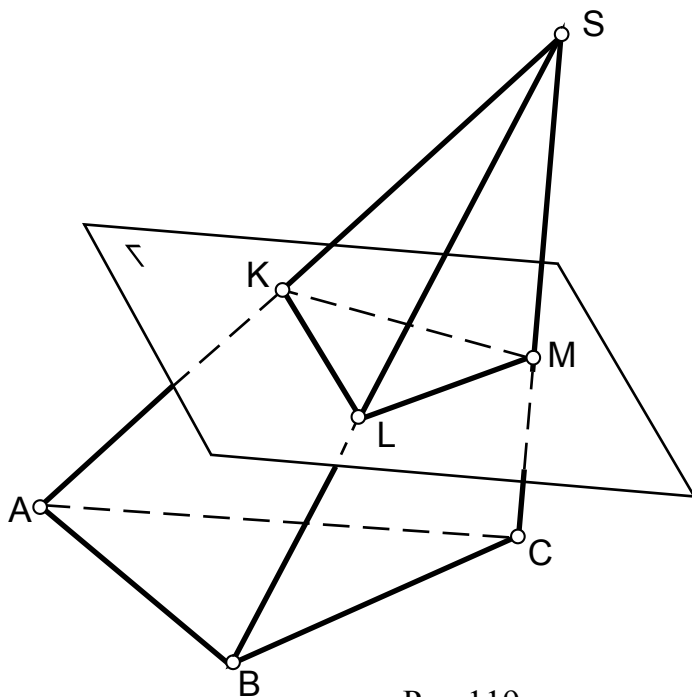


Рис. 119

Построение вершин  $K$ ,  $L$  и  $M$  ломаной выполнено по алгоритму первой

позиционной задачи. Например, алгоритм для определения точки К имеет вид:

- 1)  $\Sigma \supset (SA), \Sigma \perp P_2$ ;
- 2)  $(1,2) = \Delta \cap \Sigma$ ;
- 3)  $K = (1, 2) \cap (SA) = \Delta \cap (SA)$ .

Точки L и M определены аналогично. Полученные проекции вершин соединены прямыми с учетом их видимости относительно  $P_1$  и  $P_2$ .

**Задача 3.** Построение линии пересечения кривой поверхности с плоскостью.

Линия (см. рис. 121) пересечения кривой поверхности  $\Phi$  с плоскостью  $\Delta$  представляет собой плоскую кривую. Построение опорных (A, B, C и D) и промежуточных (3 и 4) точек кривой  $l$  выполняется в соответствии со схемой, данной в начале п. 2.3 данного параграфа. В качестве вспомогательных поверхностей выбирают плоскости, положение которых в пространстве определяется условиями, также изложенными ранее.

**3.1.** Построение линии пересечения конуса вращения плоскостью общего положения  $\Theta(a \cap b)$  изображено на рис.122.

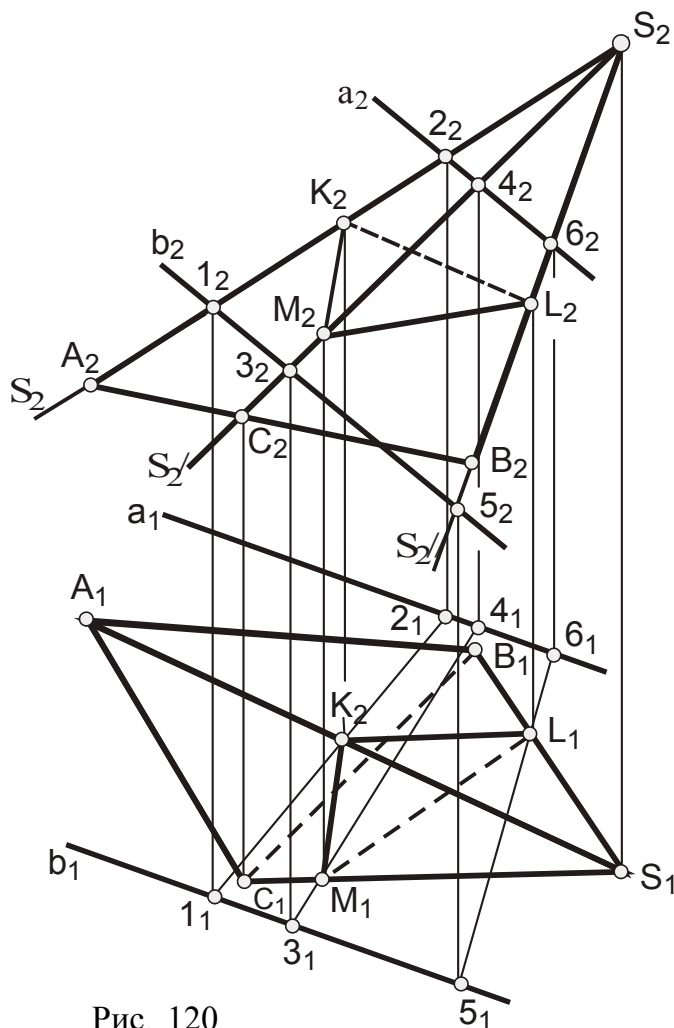


Рис. 120

### План решения:

#### А. Определение опорных точек

1. Для определения высшей А и низшей В точек кривой пересечения в качестве вспомогательной выбрана плоскость  $\Sigma$  – общая плоскость симметрии конуса и плоскости  $\Theta(a \cap b)$ . Построение этих точек на чертеже выполнено в соответствии с алгоритмом:

а) проведена горизонтально проецирующая плоскость  $\Sigma$ , проходящая через ось конуса и перпендикулярная плоскости  $\Theta(a \cap b); \Sigma \perp h, h \in \Theta$ ;

б) определены образующие ( $S1'$ ) и ( $S2'$ ) и линия (3–4) пересечения плоскости  $\Sigma$  соответственно с поверхностью конуса и плоскостью  $\Theta(a \cap b)$ ;

в) отмечены точки А и В пересечения полученных линий.

2. Для определения очерковых точек С и D (точек смены видимости кривой относительно  $P_2$ ) в качестве вспомогательной выбрана фронтальная плоскость уровня  $\Delta$ , проходящая через ось конуса и пересекающая его по очерковым относительно  $P_2$  образующим ( $S7$ ) и ( $S8$ ), а плоскость  $\Theta(a \cap b)$  – по фронту  $f(5-6)$ .

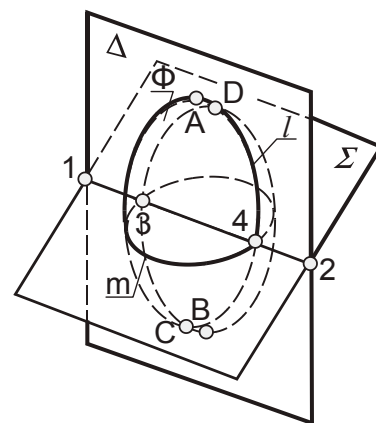


Рис. 121

Построение этих точек ясно из чертежа:  $f \cap S7 = C$  и  $f \cap S8 = D$ .

### Б. Определение промежуточных точек

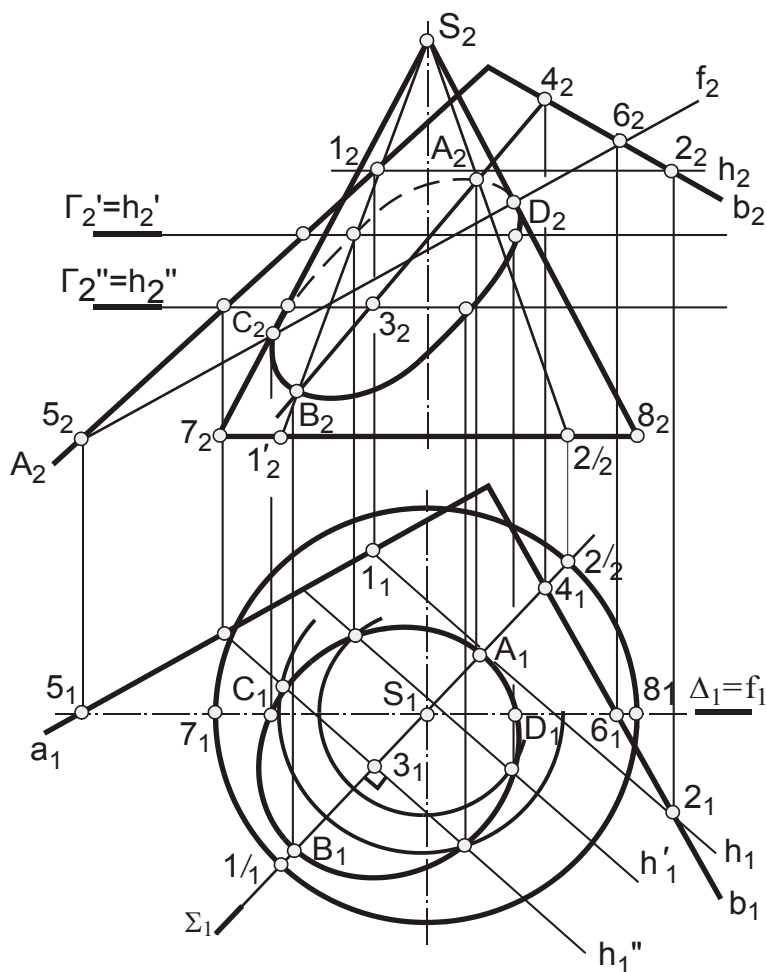


Рис. 122

помощью плоскостей  $\Sigma$  и  $\Sigma'$ . Очерковые относительно  $\Pi_2$  (точки  $C$  и  $D$ ) – с помощью плоскости  $\Delta$ . Высшая и низшая (точки  $E$  и  $F$ ) – с помощью плоскостей  $\Theta$  и  $\Theta'$ . Положение образующих  $m$  и  $n$ , через которые проведены плоскости  $\Theta$  и  $\Theta'$ , определено из условия, что касательные к кривой в точках  $E$  и  $F$  являются горизонталями плоскости  $\Gamma(a \cap b)$ . Касательные  $t$  и  $t'$  к основанию

Для построения промежуточных точек использованы горизонтальные плоскости уровня  $\Gamma'$ ,  $\Gamma''$ , пересекающие конус по окружностям, а плоскость  $\Theta(a \cap b)$  – по горизонталям, и т. д. в соответствии со схемой.

3.2. Построение линии пересечения наклонного эллиптического цилиндра с плоскостью общего положения  $\Gamma(a \cap b)$  представлено на рис.123.

Определение опорных и промежуточных точек выполнено по однотипному алгоритму. В качестве вспомогательных выбраны фронтальные плоскости уровня, пересекающие цилиндр по тем образующим, на которых лежат искомые точки.

Очерковые относительно  $\Pi_1$  (точки  $A$  и  $B$ ) найдены с

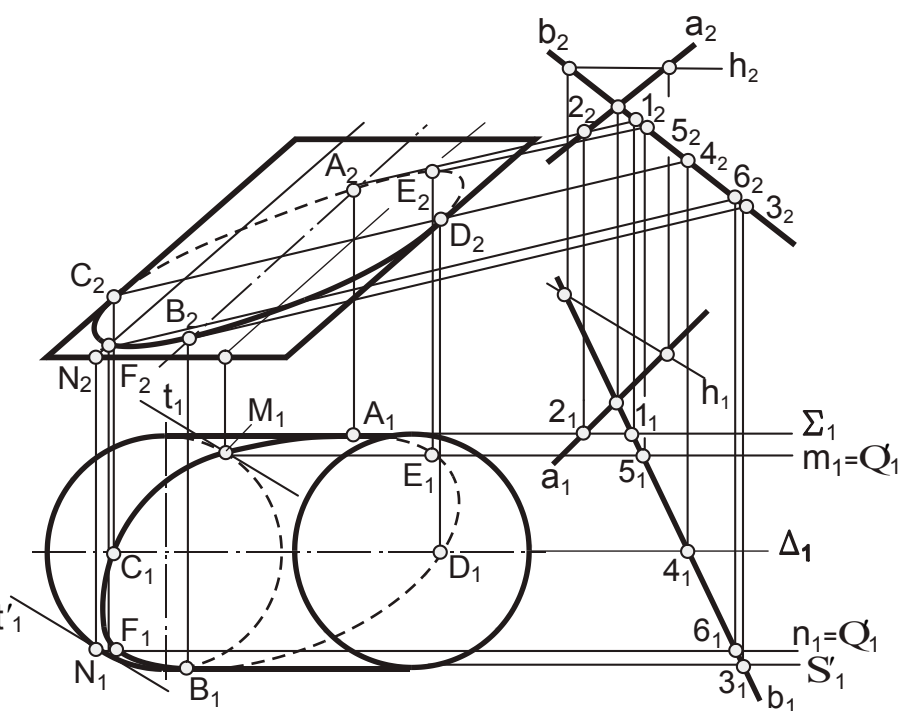


Рис. 123

цилиндра, проведенные параллельно произвольной горизонтали  $h$  плоскости  $\Gamma$ , определяют искомые образующие.

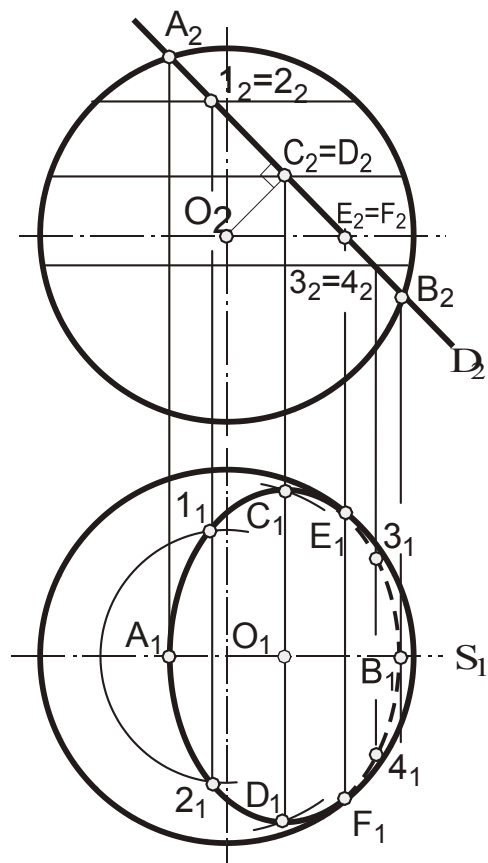


Рис. 124

**3.3. Пример построения линии пересечения сферы с проецирующей плоскостью** приведен на рис. 124. Построение выполнено в соответствии с общей схемой. Решение можно выполнить на основании принадлежности точек линии пересечения поверхности сферы (по заданной фронтальной проекции линии пересечения определить ее горизонтальную проекцию). Точки  $C$  и  $D$  располагаются в плоскости общей симметрии плоскости  $\Delta$  и сферы и поэтому являются экстремальными. Эти же точки определяют большую ось эллипса, представляющего горизонтальную проекцию линии пересечения.

**3.4. Построение линии пересечения конуса вращения с плоскостью общего положения**  $\Gamma(a \cap b)$  с использованием способа замены плоскостей проекций показано на рис. 125.

Система  $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$  заменена системой  $\frac{\Pi_4}{\Pi_1}$ , в которой плоскость  $\Gamma$  является проецирующей.  $\Pi_4 \perp h \subset \Gamma$ ;  $\Pi_4 \perp \Gamma$ .

В системе  $\Pi_4/\Pi_1$  выполнено построение экстремальных  $A$  и  $B$  и промежуточных точек линии пересечения. Обратным преобразованием построены

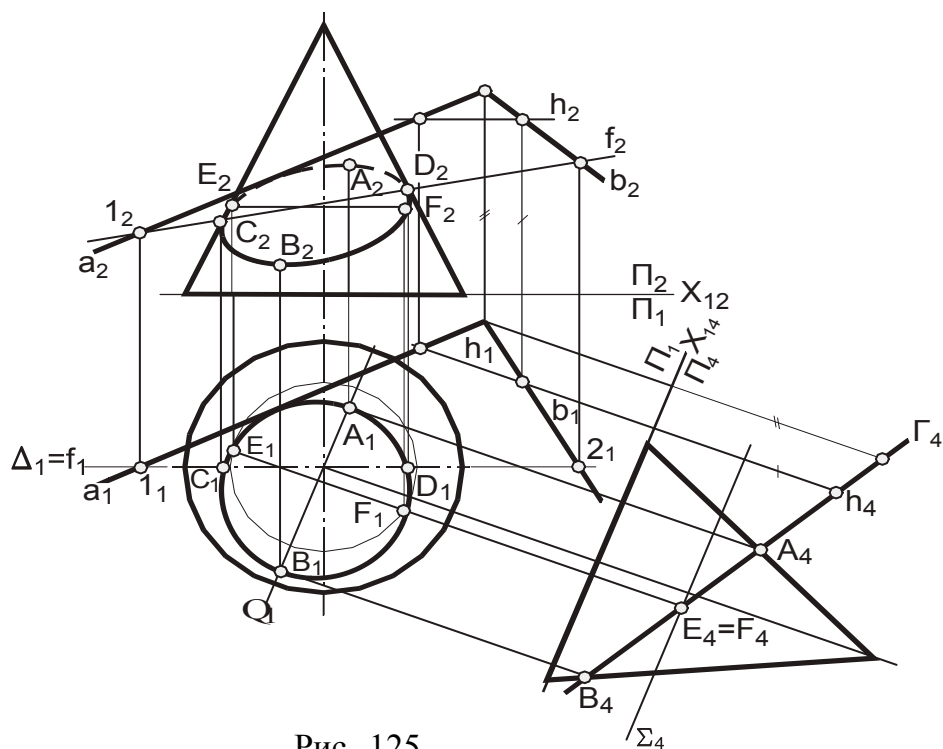


Рис. 125

проекции этих точек на плоскости  $\Pi_2$ . Очерковые точки С и D определены так же,

как показано в задаче, данной на рис.122.

Вид линии, которая должна получиться при пересечении кривой поверхности с плоскостью, во многих случаях можно предусмотреть.

### **Плоские сечения некоторых поверхностей вращения**

1. Сфера пересекается с плоскостью всегда по окружности.

2. Цилиндр вращения пересекается с плоскостью  $\Sigma$ , образующей с его осью угол  $\alpha \neq 90^\circ$ , по эллипсу. В частном случае, если угол  $\alpha = 90^\circ$  – по окружности, если плоскость параллельна оси цилиндра – по двум прямым.

3. При пересечении конуса второго порядка с плоскостями могут быть получены все виды кривых второго порядка: эллипс, парабола и гипербола. Эти линии называются коническими сечениями.

а) Если плоскость  $\Sigma$  пересекает все образующие конуса вращения, то в общем случае в сечении получается замкнутая кривая второго порядка, не имеющая бесконечно удаленных точек, – эллипс (рис. 122,125,126а). В частном случае, когда плоскость займет положение  $\Sigma'$ , перпендикулярное оси конуса вращения, – окружность. Если плоскость  $\Sigma''$  проходит через вершину конуса, то эллипс вырождается в точку.

б) Если плоскость  $\Sigma$  параллельна одной образующей конуса  $l$  (см. рис.126б), то в сечении получается кривая второго порядка, имеющая одну бесконечно удаленную точку, – парабола. В частном случае, когда плоскость  $\Sigma$ , перемещаясь параллельно самой себе, займет положение  $\Sigma'$  (коснется конуса по образующей  $l$ ), парабола вырождается в двойную прямую.

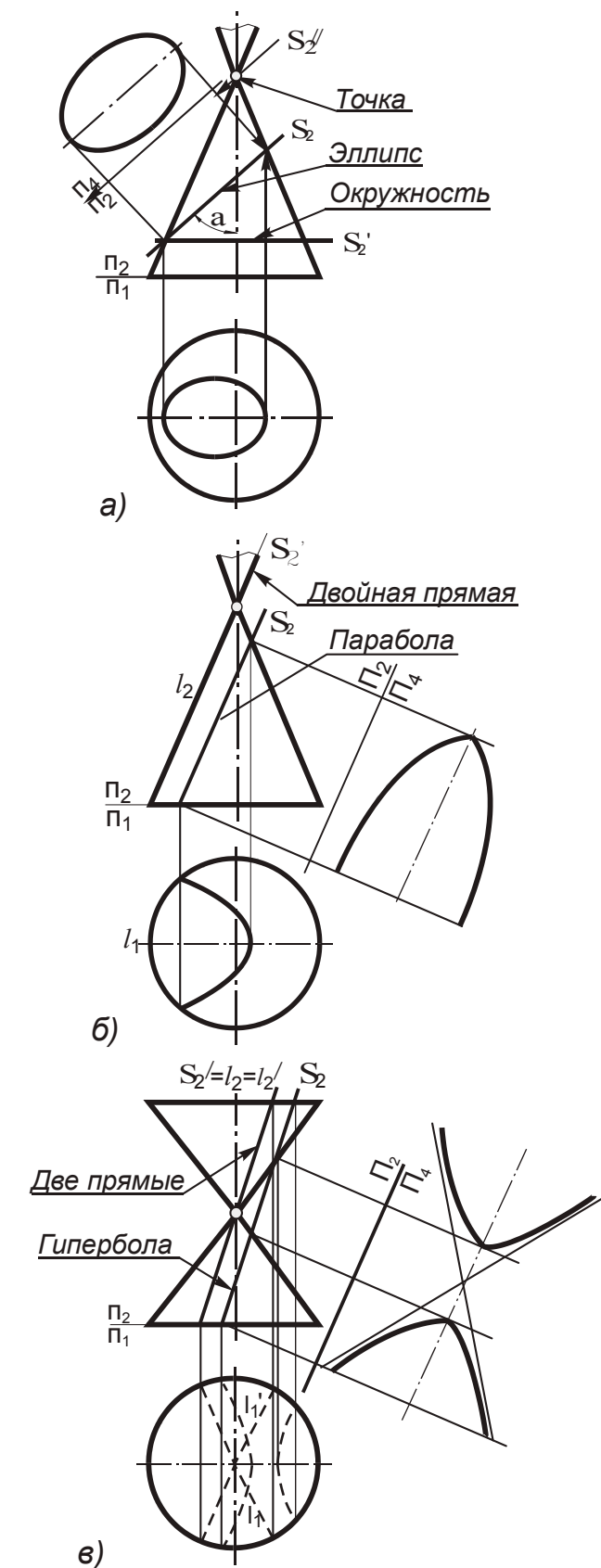


Рис. 126

в) Если плоскость  $\Sigma$  параллельна двум образующим  $l$  и  $l'$  конуса (рис. 126в), то в сечении получается кривая второго порядка, имеющая две бесконечно удаленные

точки, – гипербола. В частном случае, когда плоскость  $\Sigma$ , перемещаясь параллельно самой себе, займет положение  $\Sigma'$  (пройдет через вершину конуса), гипербола вырождается в пару пересекающихся прямых.

4. Любая плоскость пересекает гиперboloид вращения по коническому сечению такого же вида, по которому она пересекает асимптотический конус.

5. Тор пересекается плоскостями, перпендикулярными оси вращения или проходящими через нее по двум окружностям (см. рис. 57 – плоскости  $\Delta$  и  $\Gamma$ ). Плоскость  $\Sigma$ , касающаяся поверхности в двух точках, пересекает ее тоже по двум окружностям.

**Задача 4.** Построение линии пересечения двух многогранников (рис. 127).

В зависимости от взаимного расположения многогранников, возможны два вида их пересечения – врезка и проникание.

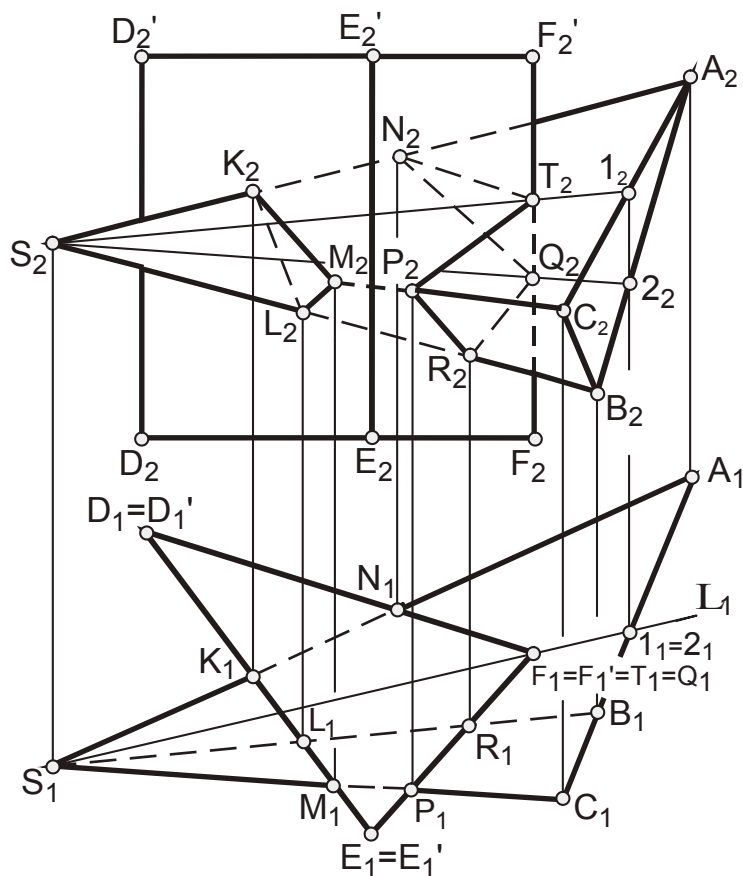


Рис. 127

**Врезкой** называется такой вид пересечения многогранников, при котором в пересечении принимает участие часть ребер каждого из них; при этом линия пересечения представляет собой одну замкнутую пространственную ломаную.

**Прониканием** называют такой вид пересечения многогранников, при котором в пересечении принимают участие все ребра одного из них и только часть ребер второго; при этом линия пересечения распадается на две замкнутые ломаные. В некоторых случаях одна из них или обе могут быть плоскими многоугольниками. При проникании возможны случаи, когда получающиеся в пересечении две замкнутые ломаные линии имеют одну или две общие точки.

Однако во всех случаях вершинами ломаной будут точки пересечения ребер первого многогранника с гранями второго и ребер второго многогранника – с гранями первого, а сторонами – отрезки прямых, по которым пересекаются грани обоих многогранников. Решение задачи заключается в нахождении вершин или сторон ломаной. В первом случае задача сводится к многократному построению точки пересечения прямой (ребра) с плоскостью, во втором – к многократному построению линии пересечения двух плоскостей.

Таким образом, оба приема построения линии пересечения двух многогранников являются применением основного способа построения линии

пересечения поверхностей (см. задачи 1 и 2 п. 2.3) и осуществляются по схеме, данной в начале п. 2.3. В большинстве случаев при решении задачи определяют вершины ломаной (опорные точки линии пересечения), а затем соединяют – отрезками прямых те пары вершин, которые принадлежат одной и той же грани первого многогранника и одновременно одной и той же грани второго.

### **Примечание.**

Выше уже указывалось, что проекции линии пересечения могут располагаться только в пределах наложения очерков одноименных проекций пересекающихся поверхностей. Поэтому, приступая к решению задачи, желательно выявить у обоих многогранников такие ребра, которые заведомо не участвуют в пересечении.

Алгоритм построения вершин ломаной аналогичен алгоритму задачи 2 п.2.3. В задаче на построение линии пересечения пирамиды  $SABC$  и призмы  $DEFD'E'F'$ , данной на рис. 127, построение вершин  $K, L, M, N, P, R$  (точек пересечения ребер пирамиды с поверхностью призмы) выполнено без применения вспомогательных плоскостей, на основании решения первой вспомогательной позиционной задачи (п. 2.1 данного параграфа).

Построение вершин  $T$  и  $Q$  ломаной (точек пересечения ребра  $FF'$  призмы с поверхностью пирамиды) выполнено по алгоритму:

- 1)  $\Lambda \supset (FF')$  и  $\Lambda \supset S$ ;  $\Lambda \perp \Pi_1$ ;
- 2)  $(S-1-2) = SABC \cap \Lambda$ ;
- 3)  $T = (S-1-2) \cap (FF') = SABC \cap (FF')$ ;
- $Q = (S-1-2) \cap (FF') = SABC \cap (FF')$ .

Проекции сторон ломаной проведены с учетом их видимости на чертеже. Видимыми относительно той или иной плоскости проекций считаются те стороны ломаной, которые являются линией пересечения двух видимых относительно этой плоскости проекций граней многогранников. Полученные вершины соединены в соответствии с приведенным выше правилом; линия пересечения состоит из двух ломаных: треугольника  $KLM$  и пространственной ломаной  $NQRPT$ .

**Задача 5.** Построение линии пересечения многогранной и кривой поверхностей.

Линия пересечения многогранной и кривой поверхностей является совокупностью нескольких плоских кривых, каждая из которых – результат пересечения кривой поверхности с одной из граней многогранника (см. рис. 128). Эти плоские кривые попарно пересекаются в точках пересечения ребер многогранника с кривой поверхностью. В случае проникания эта совокупность плоских кривых распадается на две части или более. Построение каждой из этих линий выполняется в соответствии с указаниями, данными в начале п.2.3. Алгоритмы построения опорных и промежуточных точек аналогичны задаче 3 п.2.3 (см. рис.122,125), задаче 3 п. 2.2 (см. рис. 111) данного параграфа.

На рис. 128 показано построение на комплексном чертеже линии пересечения поверхностей пирамиды  $SMNPQR$  и конуса вращения.

### **План решения:**

#### ***А. Определение опорных точек***

а) Очерковые относительно  $\Pi_2$  точки  $A, B, C$  и  $D$  определены с помощью фронтальной плоскости уровня  $\Sigma$ , пересекающей конус по образующим. Эта плоскость пересекает грань  $SMR$  пирамиды и проходит через ребро  $SP$  и т. д.

б) Так как плоскость  $\Sigma$  является общей плоскостью симметрии обеих поверхностей, точки А и D являются высшими, а С и В – низшими.

в) Так как  $\Sigma$  проходит через ребро SP пирамиды, точки А и В являются точками

пересечения этого ребра с поверхностью конуса (в них пересекаются плоские кривые AFB и AEB, принадлежащие смежным граням пирамиды).

г) Очерковые относительно  $\Pi_1$  точки Е, F, К и L определены с помощью горизонтальной плоскости уровня  $\Gamma$ , пересекающей конус по соответствующим контурным образующим, а пирамиду – по пятиугольнику 3–4–5–6–7 и т. д. по схеме. Горизонтальные проекции  $E_1$   $F_1$   $K_1$   $L_1$  этих точек являются точками смены видимости проекций каждой плоской кривой на  $\Pi_1$ . Видимой на  $\Pi_1$  будет проекция той части кривой, которая расположена выше плоскости  $\Gamma$ .

### **Б. Построение промежуточных точек**

При построении промежуточных точек в качестве вспомогательных применялись фронтально проецирующие

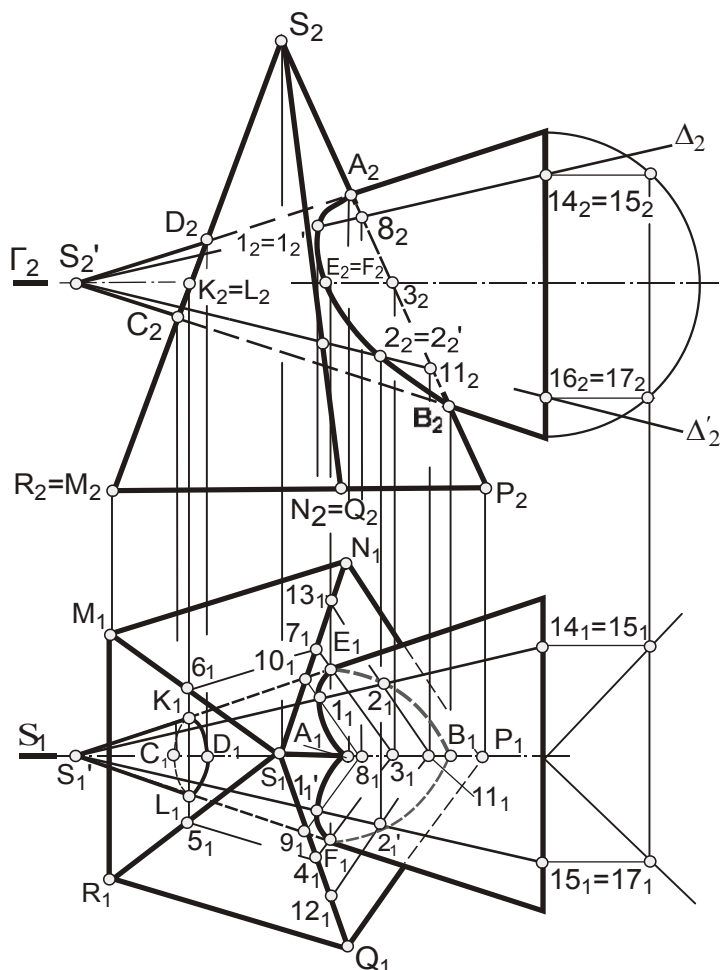


Рис. 128

плоскости, проходящие через вершину  $S'$  конуса. На чертеже показано построение точек 1, 1' и 2, 2' с помощью фронтально проецирующих плоскостей и  $\Delta$  и  $\Delta'$ , пересекающих соответственно конус по образующим ( $S'$ –14), ( $S'$ –15) и ( $S'$ –16), ( $S'$ –17), а грани SNP и SPQ пирамиды – по прямым (8 - 9), (8 - 10) и (11 - 12), (11 - 13).

Из чертежа видно, что совокупность плоских кривых пересечения распалась на две части: плоскую кривую CDLK (эллипс) и совокупность двух плоских кривых AEB и AFB (частей эллипсов). Такой случай называется проницанием. Так как общая плоскость симметрии  $\Sigma$  параллельна  $\Pi_2$ , фронтальные проекции кривых AEB и AFB совпали, а так как грань SMR пирамиды – фронтально проецирующая плоскость, проекция кривой CLDK на  $\Pi_2$  выродилась в прямую.

### **Задача 6. Построение линии пересечения двух кривых поверхностей.**

Линия пересечения двух кривых поверхностей (рис. 129) в общем случае (случай врезки) представляет собой пространственную кривую, которая может распадаться на две части или более (случай проницания). Точки этой линии (опорные и промежуточные) определяются при помощи основного способа построения линии пересечения поверхностей, изложенного в начале п.2.3, по схеме, приведенной там же.

На рис. 129 показано построение линии пересечения конуса вращения и части сферы. Очерковые точки А и В определены с помощью фронтальной плоскости  $\Lambda$ . Их фронтальные проекции  $A_2$  и  $B_2$  являются точками смены видимости фронтальной проекции линии пересечения.

Высшая и низшая точки С и D определены с помощью горизонтально проецирующей плоскости  $\Sigma$ , которая является общей плоскостью симметрии обеих

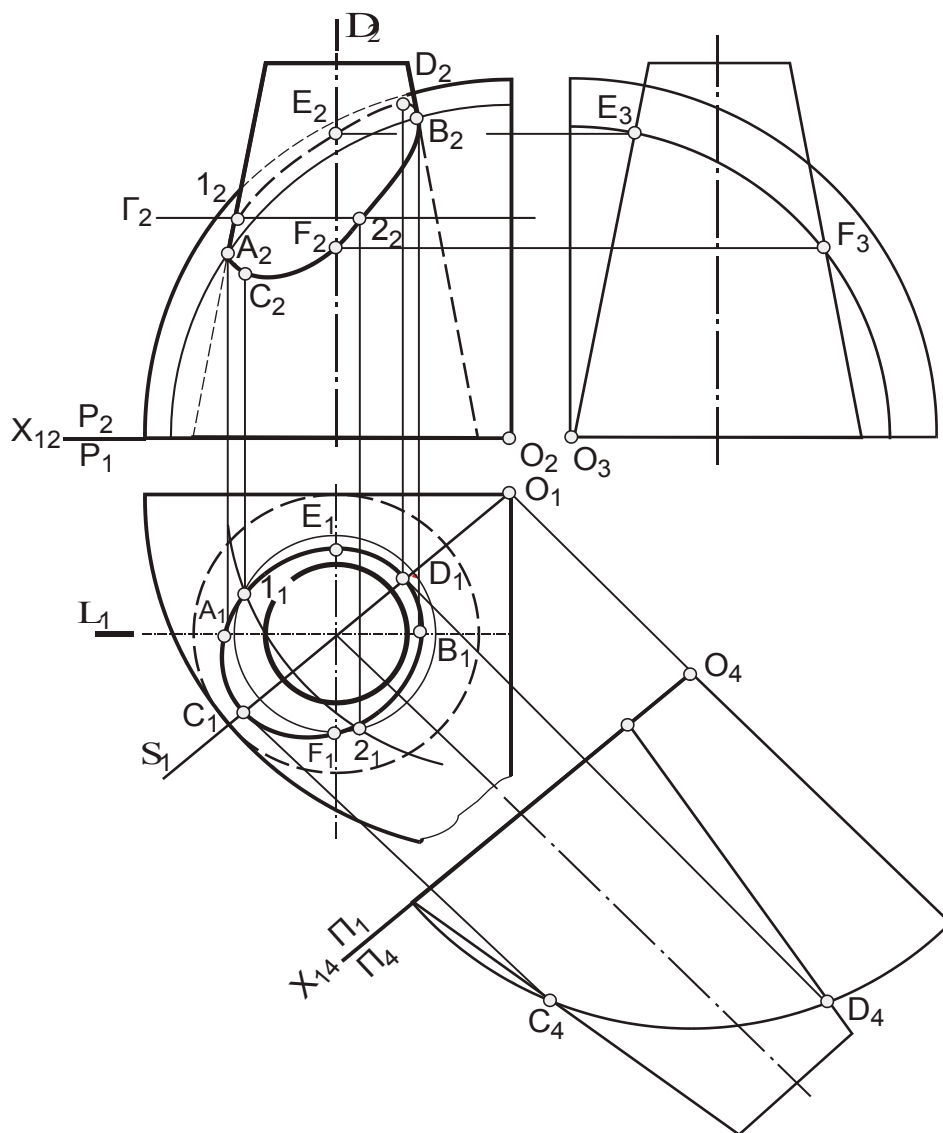


Рис. 129

поверхностей и проходит через ось конуса и центр сферы. Для упрощения построений использован способ замены плоскостей проекций. Заменена плоскость  $\Pi_2$  на  $\Pi_4$ , причем  $\Pi_4 \parallel \Sigma$ .

Очерковые точки относительно  $\Pi_3$  (Е и F) определены с помощью профильной плоскости  $\Delta$ . Промежуточные точки построены с помощью горизонтальных плоскостей. На рис. 129 показаны точки 1 и 2, найденные с помощью плоскости  $\Gamma$ .

### *Способ вспомогательных сфер*

В некоторых случаях при построении линии пересечения поверхностей целесообразно в качестве вспомогательных поверхностей использовать не

плоскости, а сферы. Их применение основано на свойстве соосных поверхностей вращения пересекаться по окружностям. Соосными называются поверхности вращения, имеющие общую ось (рис. 130).

Меридианы  $m$  и  $n$  соосных поверхностей вращения, расположенные в одной осевой плоскости ( $\Sigma$ ), пересекаются в некоторых точках (1 и 2 на рис.130а). Эти точки при вращении меридианов ( $m$  и  $n$ ) описывают окружности (параллели), одновременно принадлежащие каждой из образованных поверхностей вращения

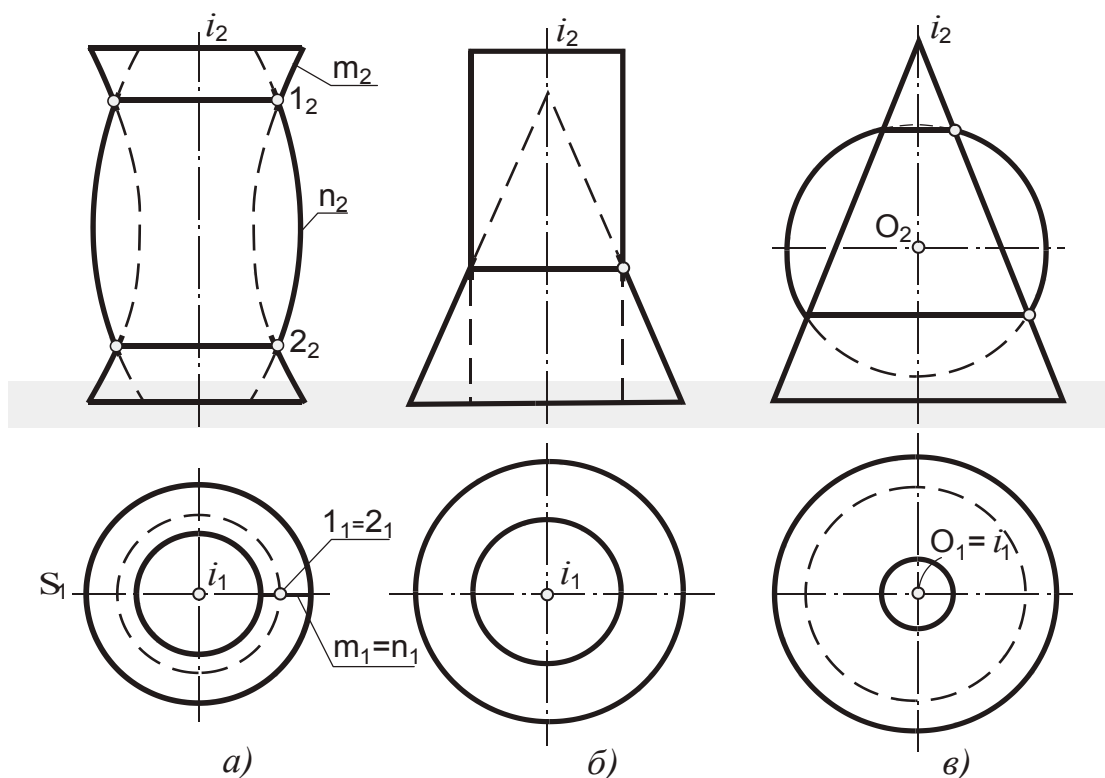


Рис.130

и, следовательно, являющиеся линиями их пересечения. Количество окружностей равно числу точек пересечения описывающих эти поверхности меридианов, расположенных в одной осевой плоскости и по одну сторону от оси вращения. Например, соосные поверхности вращения (см. рис.130а) пересекаются по двум окружностям, так как их меридианы  $m$  и  $n$  имеют две общие точки 1 и 2. Если одной из двух соосных поверхностей вращения является сфера (см. рис.130в), то центр сферы располагается на оси другой поверхности вращения (сфера имеет бесчисленное множество осей вращения, и все они проходят через ее центр). Сфера с центром в точке  $O$  пересечения осей двух поверхностей вращения будет соосна с каждой из этих поверхностей и пересечет их по окружностям  $l$  и  $m$  (рис. 131а,б). Точки 1 и 2 пересечения этих окружностей являются общими для обеих поверхностей, т. е. принадлежат линии их пересечения. Построение этих точек на чертеже (см. рис.131а) выполняется весьма просто, потому что общая плоскость симметрии  $\Sigma$  данных поверхностей параллельна фронтальной плоскости проекций, и окружности  $l$  и  $m$  спроецируются на  $\Pi_2$  в виде прямолинейных отрезков  $l_2$  и  $m_2$ . Точка  $1_2 = 2_2$  их пересечения является фронтальной проекцией точек 1 и 2.

Таким образом, если оси поверхностей вращения пересекаются и принадлежат

плоскости, параллельной одной из плоскостей проекций, то для построения линии их пересечения могут быть использованы сферы с различными радиусами, центр которых находится в точке пересечения осей данных поверхностей. При этом

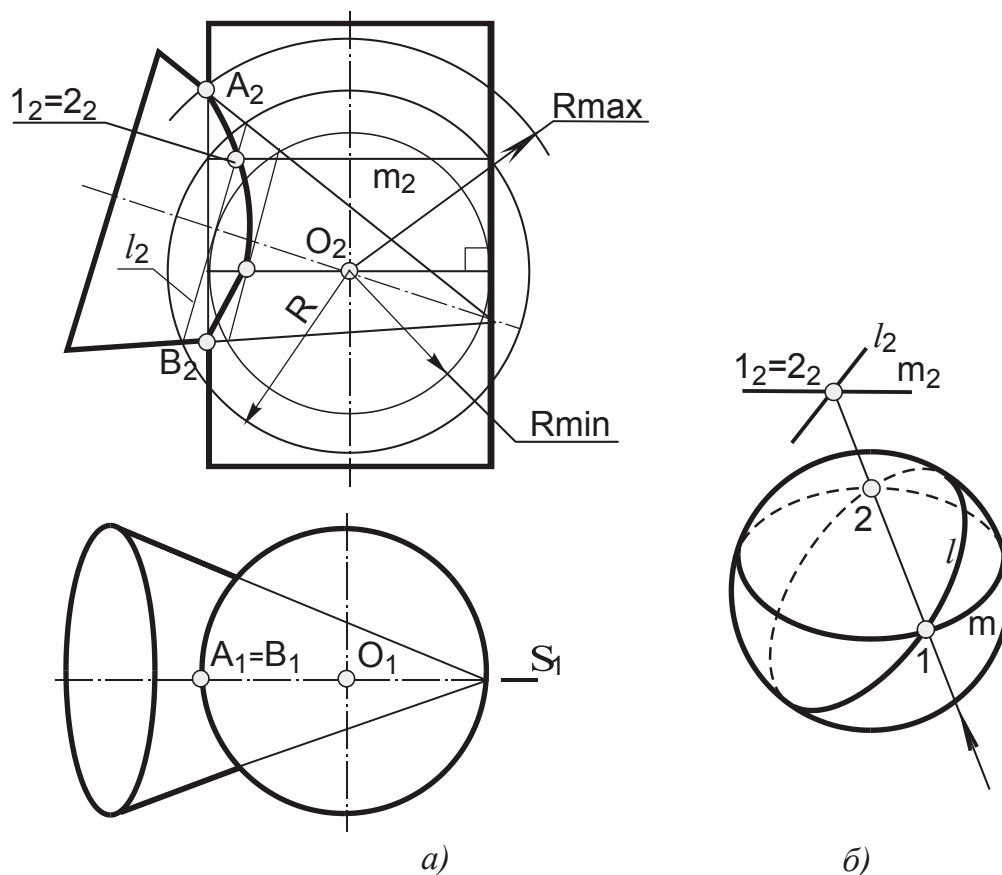


Рис.131

минимальный радиус  $R_{min}$  равен радиусу наибольшей из сфер, вписанных в эти поверхности, а максимальный  $R_{max}$  – длине отрезка, выражающего расстояние от проекции центра сферы до наиболее удаленной точки пересечения очерковых образующих (см. рис. 131а). Этот способ построения линии пересечения поверхностей называется **способом концентрических сфер**.

Поверхность, имеющая семейство круговых сечений, может быть пересечена сферой по каждому из них. Например, тор (рис.132а) пересекается плоскостями  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$ ,...,проходящими через ось вращения  $i$  по окружностям  $l$ ,  $l'$ ...; данный на рис. 132б

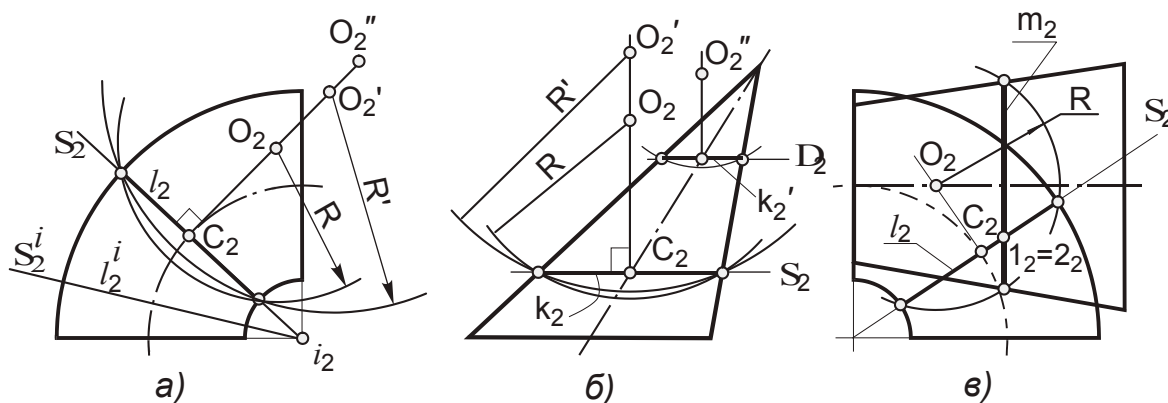


Рис. 132

эллиптический конус – плоскостями  $\Sigma, \Sigma', \dots$ , параллельными основанию, – по окружностям  $k, k', \dots$ . Каждая из этих окружностей может быть получена при пересечении данной поверхности со сферой, центр которой расположен на перпендикуляре, восстановленном из центра этой окружности к ее плоскости (рис.132б). Такие сферы могут быть использованы при построении линии пересечения двух

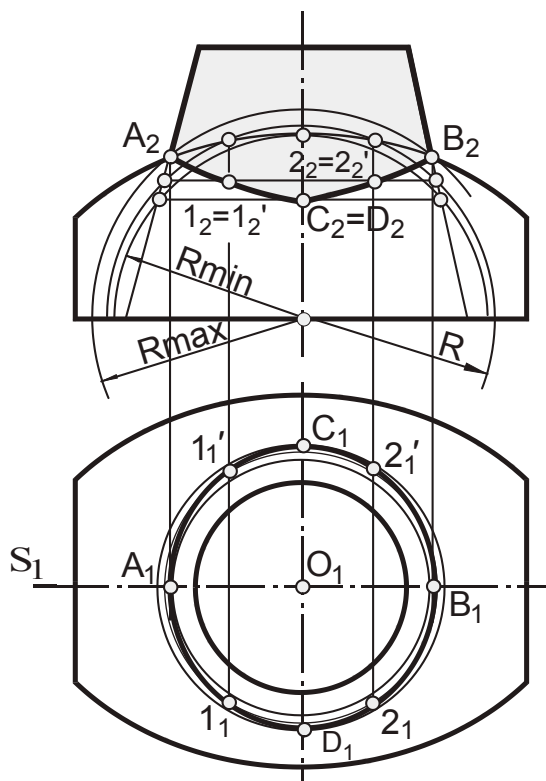


Рис.133

поверхностей, имеющих круговые сечения и общую плоскость симметрии  $\Sigma$ , параллельную одной из плоскостей проекций, например: конуса вращения и тора (рис.132в).

Построим круговое сечение  $l$  тора плоскостью  $\Sigma$ . Центр сферы, пересекающей одновременно тор и конус по окружностям, должен находиться, очевидно, в точке  $O$  пересечения перпендикуляра, восстановленного из центра  $C$  окружности  $l$ , к плоскости кругового сечения  $l$ , и оси конуса. Проведем сферу с центром в точке  $O$  такого радиуса  $R$ , чтобы она пересекла тор по уже построенной окружности  $l$ . Эта сфера пересечет конус по окружности  $m$ . Точки 1 и 2 пересечения этих окружностей принадлежат одновременно обеим поверхностям. Аналогично можно найти другие центры  $O', O'', \dots$  и построить достаточное количество точек, принадлежащих линии пересечения. Этот способ называется **способом эксцентрических сфер**.

Построение линии пересечения поверхностей тора и конуса вращения способом концентрических сфер показано на рис. 133.

Очерковые относительно  $\Pi_2$  точки  $A$  и  $B$  (они же высшие) определены с помощью общей плоскости симметрии  $\Sigma \parallel \Pi_2$ . Применение вспомогательных плоскостей для построения других точек не дает графически простого решения.

Так как оси заданных поверхностей вращения пересекаются и параллельны  $\Pi_2$  (принадлежат общей плоскости симметрии  $\Sigma$ ), в качестве вспомогательных поверхностей могут быть выбраны сферы с общим центром в точке пересечения осей заданных поверхностей.

Низшие точки  $C$  и  $D$  (они же – самая близкая и самая удаленная относительно  $\Pi_2$ ) определены с помощью сферы минимального радиуса, вписанной в тор. Промежуточные – с помощью сфер с радиусами, меньшими  $/R_{max}/$  и большими  $/R_{min}/$ .

Построение линии пересечения поверхностей конуса вращения и части тора способом эксцентрических сфер показано на рис.134. Очерковая относительно  $\Pi_2$  точка  $M$  определена с помощью фронтальной плоскости  $T$ . Точки  $E$  и  $F$ , принадлежащие горизонтальному очерку конус определены с помощью горизонтальной плоскости уровня  $\Theta$ .

Применение вспомогательных плоскостей для определения остальных точек

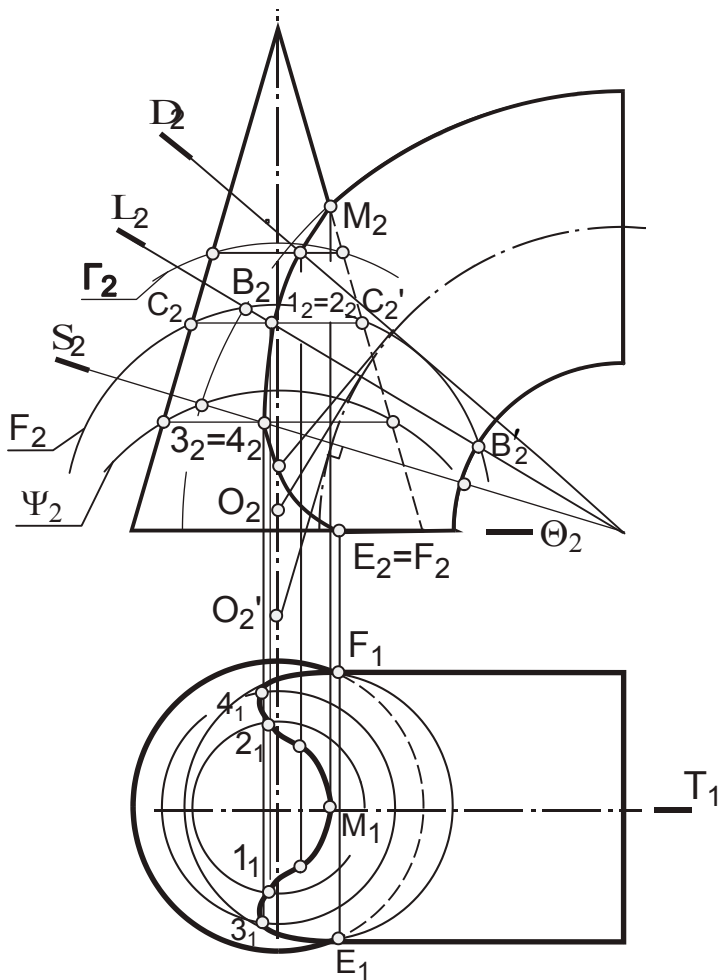


Рис.134

здесь, как и в предыдущем примере, не дает графически простого решения. Так как оси заданных поверхностей не пересекаются, то не могут быть применены в качестве вспомогательных поверхностей и концентрические сферы. Но заданные поверхности имеют общую плоскость симметрии  $T$ , семейства окружностей, и значит могут быть построены сферы, пересекающие одновременно обе поверхности по этим окружностям. Такие сферы с центрами  $(O, O', \dots)$ , расположенными в различных точках оси конуса, и использованы в качестве вспомогательных поверхностей для дальнейшего решения задачи.

Для нахождения центров вспомогательных сфер предварительно построены окружности сечения тора плоскостями  $\Delta, \Lambda, \Sigma$ . Искомые центры находятся в точках (например,  $O'$ ) пересечения перпендикуляров к плоскостям этих окружностей, восставленных

из их центров, с осью конуса вращения. Дальнейшие построения понятны из чертежа.

### Особые случаи пересечения поверхностей второго порядка

Линия пересечения двух поверхностей второго порядка в общем случае представляет собой алгебраическую кривую четвертого порядка. В частных случаях она может распадаться на линии низших порядков, сумма порядков которых равна четырем:

а) на четыре прямые –  $1 + 1 + 1 + 1$  (рис. 135). Общие образующие  $m, m', n, n'$ , по которым пересекаются два цилиндра с параллельными осями, являются частями распавшейся кривой;

б) на две прямые и кривую второго порядка -  $1 + 1 + 2$  (рис. 136);

в) на прямую и кривую третьего порядка -  $1 + 3$ ; (рис. 137)

г) на две кривые второго порядка –  $2 + 2$  (рис. 138, 139, 140).

Признаки распада кривой четвертого порядка на две кривые второго порядка сформулированным в следующих теоремах:

#### Теорема 1 .

Если две поверхности второго порядка пересекаются по одной плоской кривой

(1–5–2– 6 на рис. 138), то они пересекаются еще по одной кривой, которая тоже будет плоской (3–5– 4– 6 на рис. 138).

**Примечание.**

Плоская кривая, принадлежащая поверхности второго порядка, является кривой второго порядка.

**Теорема 2.**

Если две поверхности второго порядка имеют касание в двух точках (1 и 2 на рис.139а), то линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки касания.

Сфера, имеющая двойное касание с поверхностью второго порядка (рис.139б,47а), может быть использована для нахождения круговых сечений тех поверхностей второго порядка, которые их имеют.

Пусть требуется найти круговые сечения эллиптического цилиндра (см. рис. 139б).

Проведем сферу с центром на оси цилиндра и диаметром, равным длине отрезка  $|1-2|$  – большой оси эллипса. Эта сфера будет касаться двух образующих цилиндра в точках 1 и 2. Линия пересечения со сферой распадается на две окружности, расположенные в

профильно проецирующих плоскостях  $\Sigma$  и  $\Sigma'$ . Полученные окружности определяют

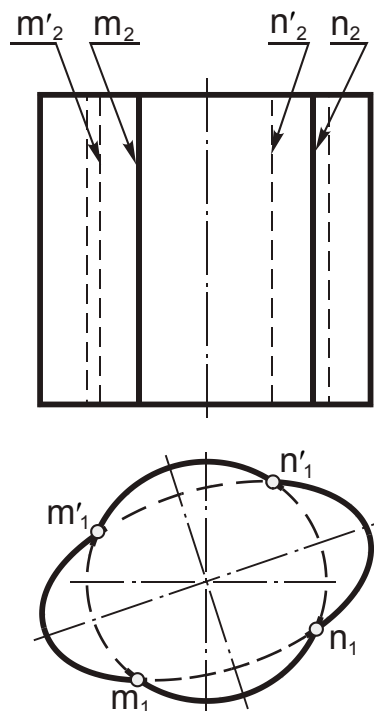


Рис.135

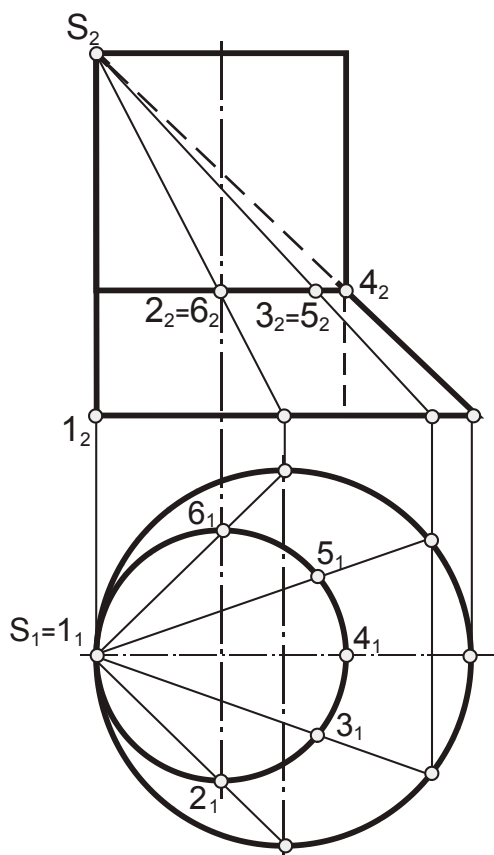


Рис. 136

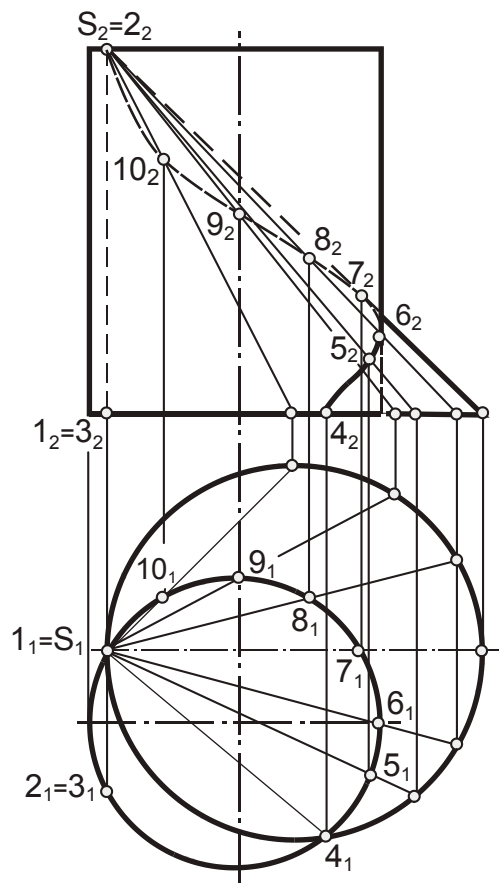


Рис. 137

два семейства круговых сечений эллиптического цилиндра. На рис. 47а (см. разд. 3.3.2) показано построение круговых сечений эллиптического конуса.

**Теорема 3 (теорема Монжа).** Если две поверхности второго порядка описаны

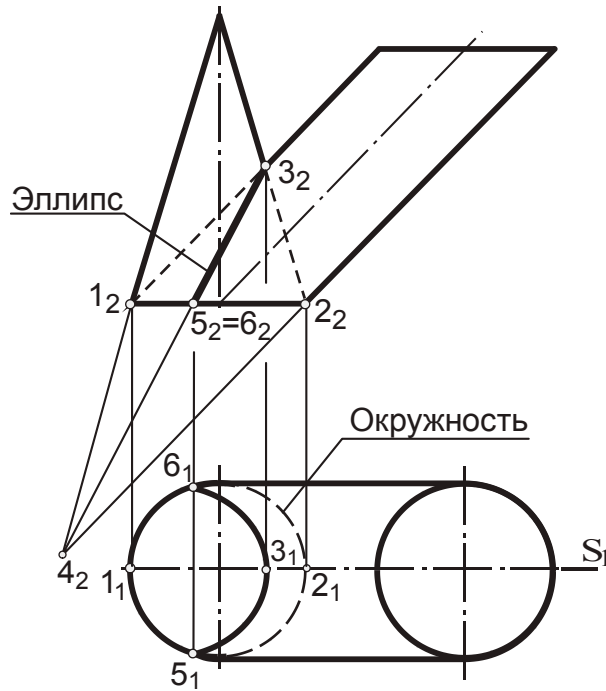


Рис. 138

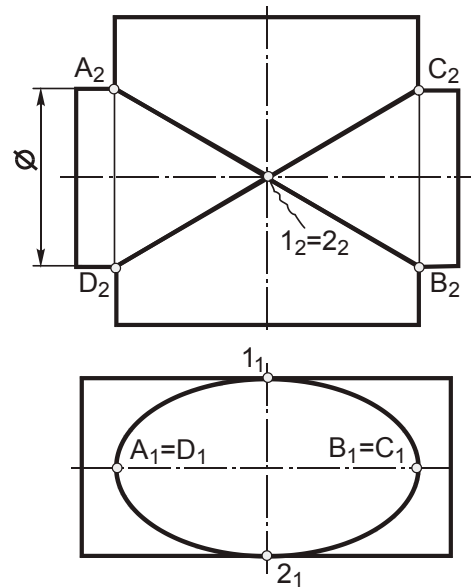


Рис. 139а

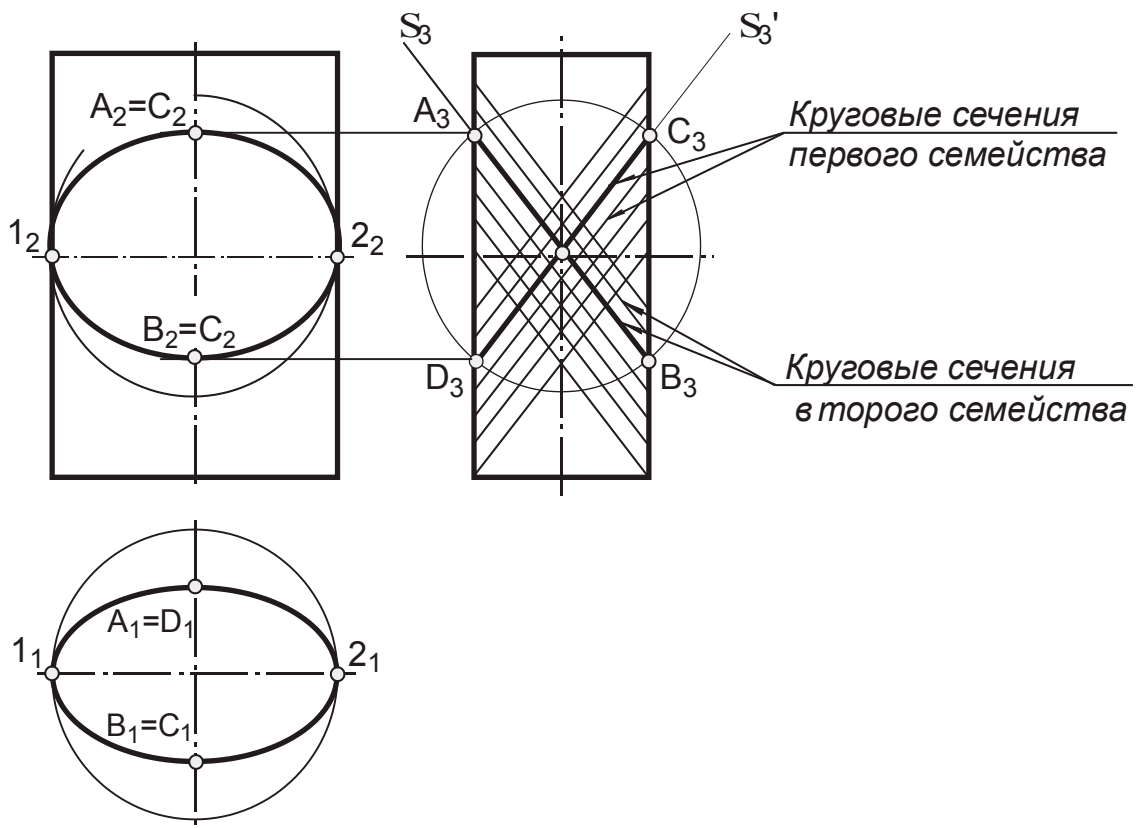


Рис. 139б

около третьей или вписаны в нее (рис. 140), то линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания (прямая 5–6 ).

Теорема Монжа является частным случаем теоремы 2. Построение проекций указанных выше кривых второго порядка (см. рис. 138, 139, 140) ясно из чертежей.

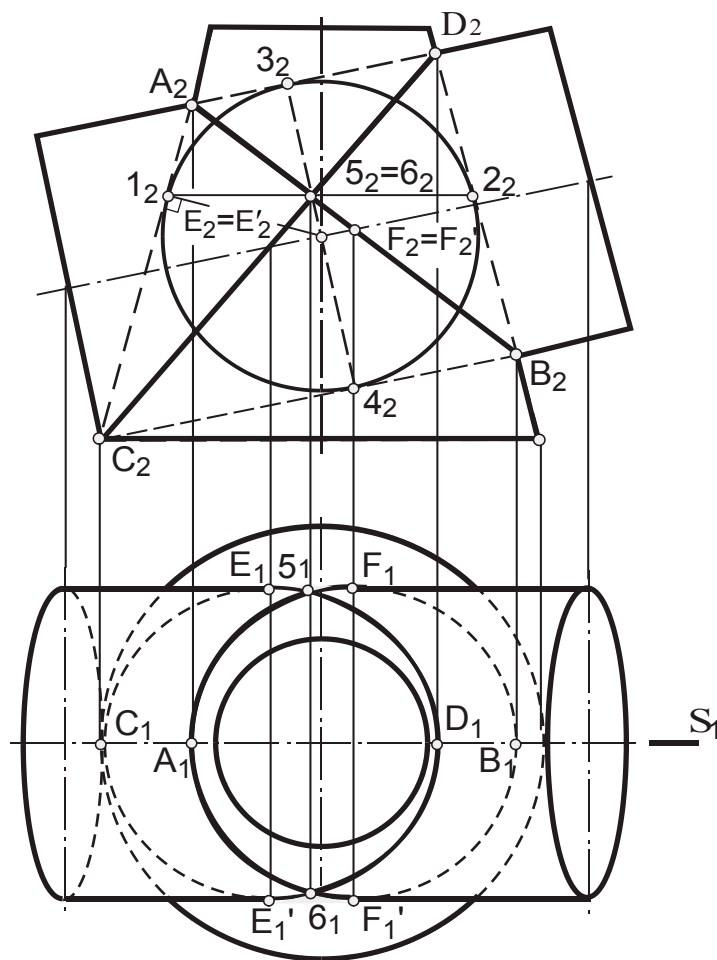


Рис. 140

## Глава 5. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

**Метрическими** называются задачи, связанные с измерением расстояний и углов. В них определяются действительные величины и форма геометрических фигур, расстояния между ними и другие характеристики по их метрически искаженным проекциям. Решение метрических задач основано на том, что геометрическая фигура, принадлежащая плоскости, параллельной плоскости проекций, проецируется на нее в конгруэнтную ей фигуру (см. аксиомы параллельного проецирования).

Поэтому при решении метрических задач широко используются способы преобразования комплексного чертежа, а также теоретические положения, изложенные в теме «Взаимно перпендикулярные прямые и плоскости».

В данной главе рассматриваются три группы метрических задач. К первой относятся задачи, в которых требуется найти расстояние между двумя геометрическими фигурами; ко второй – задачи на определение действительных величин плоских фигур и углов; к третьей группе принадлежат задачи, связанные с построением в плоскости общего положения геометрических фигур по заданным размерам.

## 5.1. ЗАДАЧИ НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ФИГУРАМИ

Искомое расстояние во всех задачах этой группы измеряется длиной отрезка, заключенного между заданными геометрическими фигурами и перпендикулярного к одной из них (задачи 1 и 4) или одновременно к обеим (задачи 2, 3 и 5). Этот отрезок проецируется в конгруэнтный ему отрезок на плоскость проекций, которая будет перпендикулярна одной (задачи 1, 3 и 4) или обеим (задачи 2 и 5) геометрическим фигурам, между которыми определяется расстояние. Отсюда

вытекает общая схема решения задач этой группы:

1. Одним из способов преобразования комплексного чертежа привести обе заданные геометрические фигуры (или одну из них) в положение, перпендикулярное какой-либо плоскости проекций.

2. Построить проекцию искомого отрезка на эту плоскость.

На основании этой схемы составляется алгоритм решения каждой конкретной задачи этой группы.

Выбирая способ преобразования комплексного чертежа при составлении алгоритма, следует исходить из требований компактности чертежа, четкости и простоты графических операций.

### Примеры.

**Задача 1.** Определение расстояния от точки  $M$  до прямой  $l$  общего положения (рис. 141).

Искомое расстояние измеряется длиной отрезка  $[MN]$  перпендикуляра, опущенного из точки  $M$  на прямую  $l$ . Отрезок  $[MN]$  спроецируется в

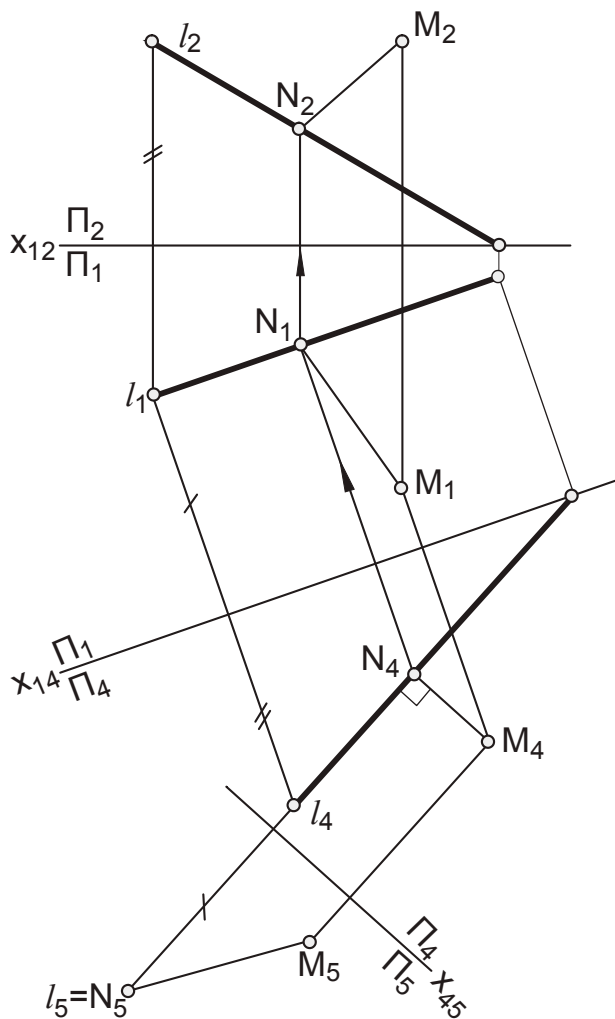


Рис.141

конгруэнтный ему отрезок на плоскость проекций, перпендикулярную прямой  $l$ . Пользуясь схемой, составляем алгоритм решения:

1. Преобразовать прямую  $l$  в проецирующую прямую способом замены плоскостей проекций.

2. Построить проекцию отрезка  $[MN]$  на плоскость  $\Pi_5 \perp l$ , длина которого определяет искомое расстояние.

### Построение.

Для преобразования прямой  $l$  общего положения в проецирующую выполнены две последовательные замены плоскостей проекций: вначале прямая  $l$  преобразована в линию уровня, затем линия уровня преобразована в проецирующую прямую.

Построены проекций  $M_4$  и  $M_5$  точки  $M$  в системе  $\frac{P_4}{P_5}$ . Отрезок  $[M_5N_5]$  является искомым:  $[M_5N_5] \cong [MN]$  и  $|M_5N_5| = |MN|$ .

На рис. 141 показано построение проекций  $[M_4N_4]$ ,  $[M_1N_1]$  и  $[M_2M_2]$  отрезка  $[MN]$  обратным преобразованием.

**Задача 2.** Определение расстояния между параллельными прямыми.

**Задача 3.** Определение расстояния между скрещивающимися прямыми.

**Задача 4.** Определение расстояния от точки до плоскости.

**Задача 5.** Определение расстояния между параллельными плоскостями.

Указания к решению: в задаче 2 заданные прямые необходимо преобразовать в проецирующие; в задаче 3 одну из заданных прямых нужно преобразовать в проецирующую; в задаче 4 заданную плоскость необходимо преобразовать в проецирующую; в задаче 5 заданные плоскости нужно преобразовать в проецирующие.

**Примечания:** 1. Решение задач 2, 3, 4, 5 приведено в работе [1]. Решите их самостоятельно. 2. Задачи 1–5 можно также решать по следующей схеме: вначале определить метрически искаженные проекции искомого отрезка, пользуясь теоретическими положениями темы «Взаимно перпендикулярные прямые и плоскости», а затем способом прямоугольного треугольника определить его действительную величину.

## 5.2. ЗАДАЧИ НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН ПЛОСКИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР И УГЛОВ МЕЖДУ НИМИ

Общей схемой решения задач этой группы является приведение заданной плоской фигуры или плоскости угла в положение, параллельное одной из плоскостей проекций.

При выборе способа преобразования комплексного чертежа следует стремиться к простоте графических операций, их четкости и наименьшему количеству. В этом смысле способ вращения вокруг линии уровня является наиболее целесообразным для решения большинства задач данной группы, так как дает решение путем одного преобразования комплексного чертежа.

**Примеры.**

**Задача 1.** Определение действительной величины плоской фигуры. Решение задачи дано на рис. 70, 78, 81 гл. 3.

**Задача 2.** Определение угла, образованного двумя пересекающимися прямыми. Задача решается аналогично предыдущей.

**Задача 3.** Определение величины угла, образованного прямой и плоскостью.

**Задача 4.** Определение величины угла между двумя плоскостями.

Указания к решению: в задаче 3 плоскость необходимо преобразовать в плоскость уровня, прямую – в линию уровня путем трех последовательных замен плоскостей проекций (существуют и другие пути решения); в задаче 4 заданные плоскости необходимо преобразовать в проецирующие.

**Примечание.**

Решение задач 3 и 4 приведено в работе [1]. Решите их самостоятельно.

### 5.3. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ В ПЛОСКОСТИ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР ПО ЗАДАНЫМ РАЗМЕРАМ

Общей схемой решения задач этой группы является:

- 1) преобразование заданной плоскости общего положения в плоскость уровня;
- 2) решение в плоскости уровня заданной метрической задачи;
- 3) перенесение решения на исходные проекции обратным преобразованием.

Наиболее целесообразным при решении задач оказывается применение способа замены плоскостей проекций и вращения вокруг линии уровня.

#### Пример.

Вписать окружность в треугольник ABC (рис. 142).

#### Алгоритм:

1. Преобразовать треугольник ABC в плоскость уровня способом замены плоскостей проекций.
2. В плоскости уровня построить вписанную в треугольник окружность.
3. Обратным преобразованием построить проекции окружности в исходной системе плоскостей проекций.

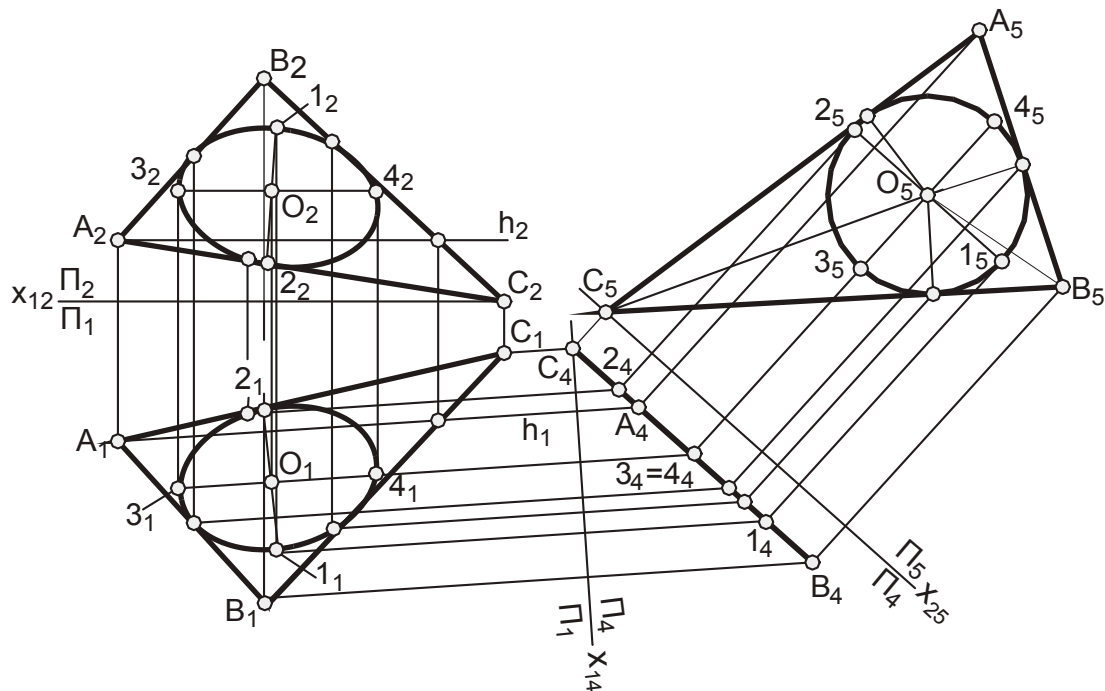


Рис.142

#### Построения.

Для преобразования плоскости треугольника ABC в плоскость уровня выполнены две последовательные замены плоскостей проекций: вначале плоскость треугольника ABC преобразована в проецирующую, затем проецирующая плоскость преобразована в плоскость уровня. Построены проекции вписанной окружности в системе плоскостей проекций  $\frac{\Pi_4}{\Pi_5}$ . Проекция окружности в системе плоскостей

проекций  $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$ , являющиеся эллипсами, построены по сопряженным диаметрам 1–2 и 3–4. На чертеже отмечены также точки касания окружности и сторон треугольника ABC.

## Глава 6. КОМПЛЕКСНЫЕ ЗАДАЧИ

**Комплексными** называются задачи, в которых на искомый элемент наложены два условия и более. Их решение выполняется по следующей общей схеме:

1) вводятся вспомогательные геометрические фигуры (множества), каждая из которых, в отдельности удовлетворяет одному из условий, наложенных на искомый элемент;

2) определяется искомый элемент как результат пересечения введенных в задачу вспомогательных множеств.

При решении конкретной комплексной задачи первый пункт приведенной выше общей схемы необходимо расшифровать, т. е. точно указать, сколько и какие именно вспомогательные множества (по виду и положению) должны быть введены для определения искомого элемента. Этот вопрос может быть решен только после проведения анализа условий задачи.

**Анализ** является первым этапом решения задачи. Он преследует следующие цели:

а) изучить заданные геометрические фигуры и представить их пространственное расположение, определить искомый элемент;

б) установить взаимосвязь искомого элемента с каждой из заданных геометрических фигур и определить условия, которым он должен удовлетворять; каждое выявленное условие должно быть однозначным;

в) выявить геометрические фигуры, каждая из которых является множеством элементов, удовлетворяющих одному из условий, наложенных на искомое; количество множеств равно количеству условий.

Таким образом, анализ позволяет наметить содержание и последовательность пространственных операций, необходимых для определения искомого элемента, т.е. составить **алгоритм** решения задачи.

Вторым этапом решения задачи является исследование. Исследование проводится с целью выявления условий существования решения и числа решений. Выше было указано, что искомый элемент определяется как результат пересечения некоторого числа вспомогательных геометрических фигур (множеств). Поэтому при исследовании необходимо иметь в виду следующее:

1. Две алгебраические поверхности порядков  $q_1$  и  $q_2$  пересекаются в общем случае по кривой порядка  $q_1 \times q_2$ . В некоторых частных случаях эта кривая распадается на кривые более низких порядков.

2. Алгебраическая кривая порядка  $m$  пересекает произвольную плоскость в  $m$  точках.

3. Три алгебраические поверхности порядков  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$  пересекаются в общем случае в  $q_1 \times q_2 \times q_3$  точках, и, следовательно, поверхность порядка  $q$  и линии порядка  $m$  пересекаются в общем случае в  $qm$  точках.

### Примечание.

В числе указанных точек пересечения могут быть мнимые и совпавшие.

Только после составления алгоритма и исследования задачи можно приступить к третьему заключительному этапу ее решения – **построению** на комплексном чертеже, – т. е. к графической реализации алгоритма. При этом следует выполнить в установленной алгоритмом последовательности известные из предыдущих разделов курса элементарные построения, не задумываясь уже над расположением

заданных и возникающих в пространстве геометрических фигур.

Решая ту или иную задачу на комплексном чертеже, нужно выбрать такой путь, который позволит найти искомое при наименьшем количестве графических построений. Решение в этом смысле, как правило, будет и более точным. Выбор рационального пути не зависит от алгоритма решения задачи и является вопросом, связанным только с построением. При решении комплексных задач приходится пользоваться множествами [1].

### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЗАДАЧ

**Задача 1.** Из точки  $A$  опустить перпендикуляр  $n$  на прямую  $l$  общего положения (рис. 143а).

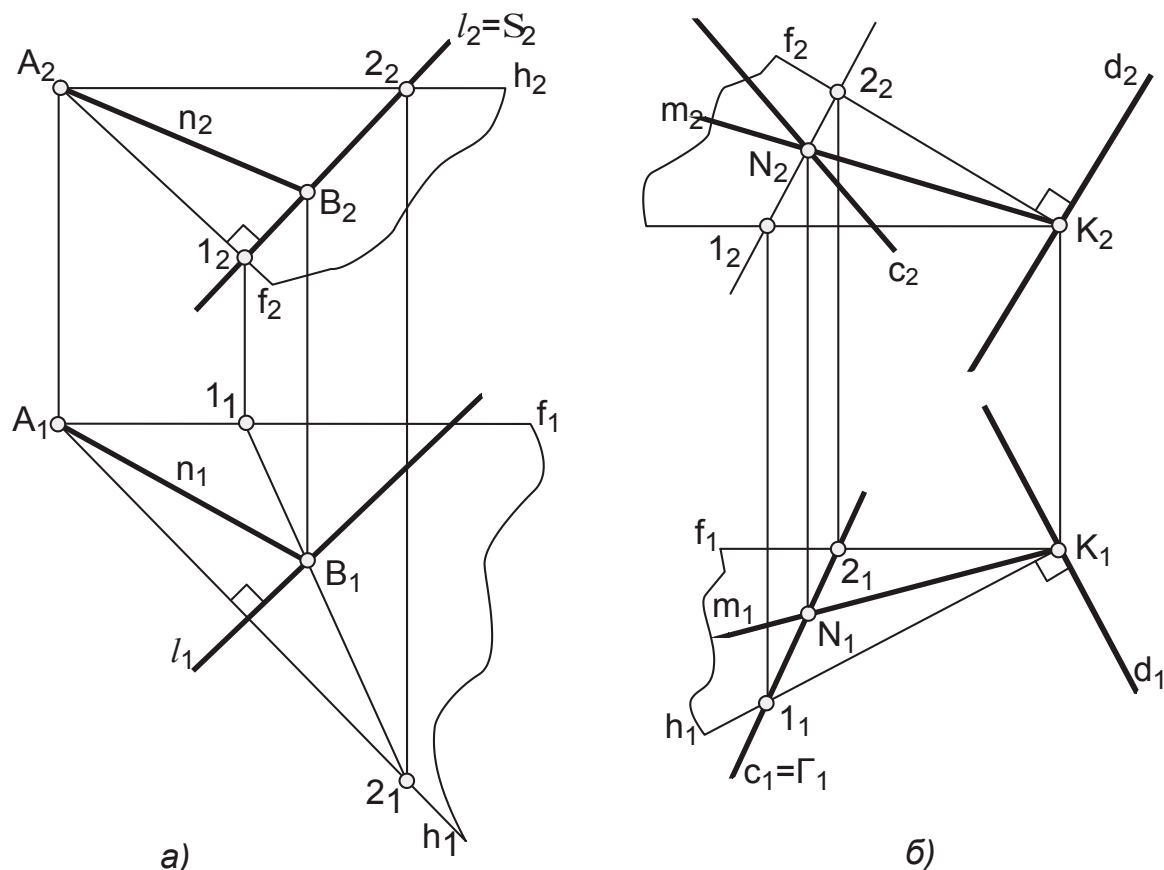


Рис. 143

#### Анализ.

Искомая прямая  $n$  должна удовлетворять двум условиям:

1. Проходить через точку  $A$  и быть перпендикулярной прямой  $l$ . Этому условию соответствует множество прямых, образующих плоскость  $\Delta$ , проходящую через точку  $A$  и перпендикулярную прямой  $l$ .
2. Проходить через точку  $A$  и пересекать прямую  $l$ . Этому условию удовлетворяет множество прямых, образующих плоскость  $\Gamma(A, l)$ .

Применение символики теории множеств позволяет записать этот анализ в следующем виде.

Искомый элемент – прямая  $n$ ;

1.  $\{n: (A \in n \perp l)\} = \Delta$ ;
2.  $\{n: (A \in n \cap l)\} = \Gamma$ .

**Алгоритм:**

- 1)  $A \in \Delta(f \cap h) \perp l \ (f \perp l \text{ и } h \perp l)$ ;
- 2)  $\Gamma(A, l)$ ;
- 3)  $n = \Delta \cap \Gamma$ .

**Исследование.**

Задача имеет единственное решение, так как две плоскости пересекаются по одной прямой (по крайней мере, в пространстве Евклида).

**Построение.**

Графическая реализация алгоритма показана на рис. 143а. Построена плоскость  $\Delta(f \cap h)$ , перпендикулярная прямой  $l$ , так как  $f \perp l$  и  $h \perp l$ . При построении прямой  $n(AB)$  пересечения плоскостей  $\Delta$  и  $\Gamma$  найдена только одна точка  $B$  искомой прямой, так как точка  $A$  принадлежит обеим плоскостям. Точка  $B$  определена как точка пересечения прямой  $l$  с плоскостью  $\Delta(f \cap h)$ .

**Задача 2.** Через точку  $K$ , принадлежащую прямой  $d$ , провести прямую  $m$ , перпендикулярную прямой  $d$  и пересекающую прямую  $c$  (рис. 143б).

**Анализ.** На прямую  $m$  наложены 2 условия:

1. Прямая  $m$  должна проходить через точку  $K$  перпендикулярно прямой  $d$ . Множество таких прямых составляют плоскость, например,  $\Sigma$ .

2. Прямая  $m$  должна проходить через точку  $K$  и пересекать прямую  $c$ . Множество таких прямых составляют плоскость, например,  $\Delta$ .

1. Искомый элемент – прямая  $m$ ;

2.  $\{m: (K \in m \perp d)\} = \Sigma$ ;

3.  $\{m: (K \in m \cap c)\} = \Delta$

**Алгоритм:**

1.  $K \in \Sigma(h \cap f) \perp d$ ;
2.  $\Delta(c, K)$ ;
3.  $\Sigma \cap \Delta = m$ .

**Исследование.**

Задача имеет единственное решение, так как искомая прямая  $m$  является результатом пересечения двух плоскостей. Построение понятно из чертежа на рис. 143б.

**Задача 3 .**

Через точку  $A$  провести прямую  $s$ , параллельную плоскости  $\Gamma(a \cap b)$  и наклоненную под углом  $\alpha$  к горизонтальной плоскости уровня  $\Delta$  (рис. 144).

**Анализ.**

На искомую прямую  $s$  наложены два условия:

1. Прямая  $s$  должна проходить через точку  $A$  и располагаться параллельно плоскости  $\Gamma$ . Этому условию удовлетворяет множество прямых, проходящих через точку  $A$  и параллельных плоскости  $\Gamma(a \cap b)$ .

2 Прямая  $s$ , проходя через точку  $A$ , должна быть наклонена к плоскости  $\Delta$  под углом  $\alpha$ . Этому условию удовлетворяет множество прямых, проходящих через точку  $A$  и наклоненных к  $\Delta$  под углом  $\alpha$ . Любая прямая этого множества является образующей прямого кругового конуса с вершиной в точке  $A$ .

1. Искомый элемент – прямая  $s$ ;

2.  $\{s: (A \in s \parallel \Gamma)\} = \Gamma'$  – плоскость;

3.  $\{c: (A \in c \wedge \Delta = \alpha)\} = \Phi$  – конус.

**Алгоритм.**

1.  $A \in \Gamma'(a' \cap b') \parallel \Gamma$ .

2.  $\Phi(A, l^{\wedge} \Delta = \alpha)$  – конус с вершиной в точке A и образующими  $l$ .

3.  $c = \Gamma' \cap \Phi$ .

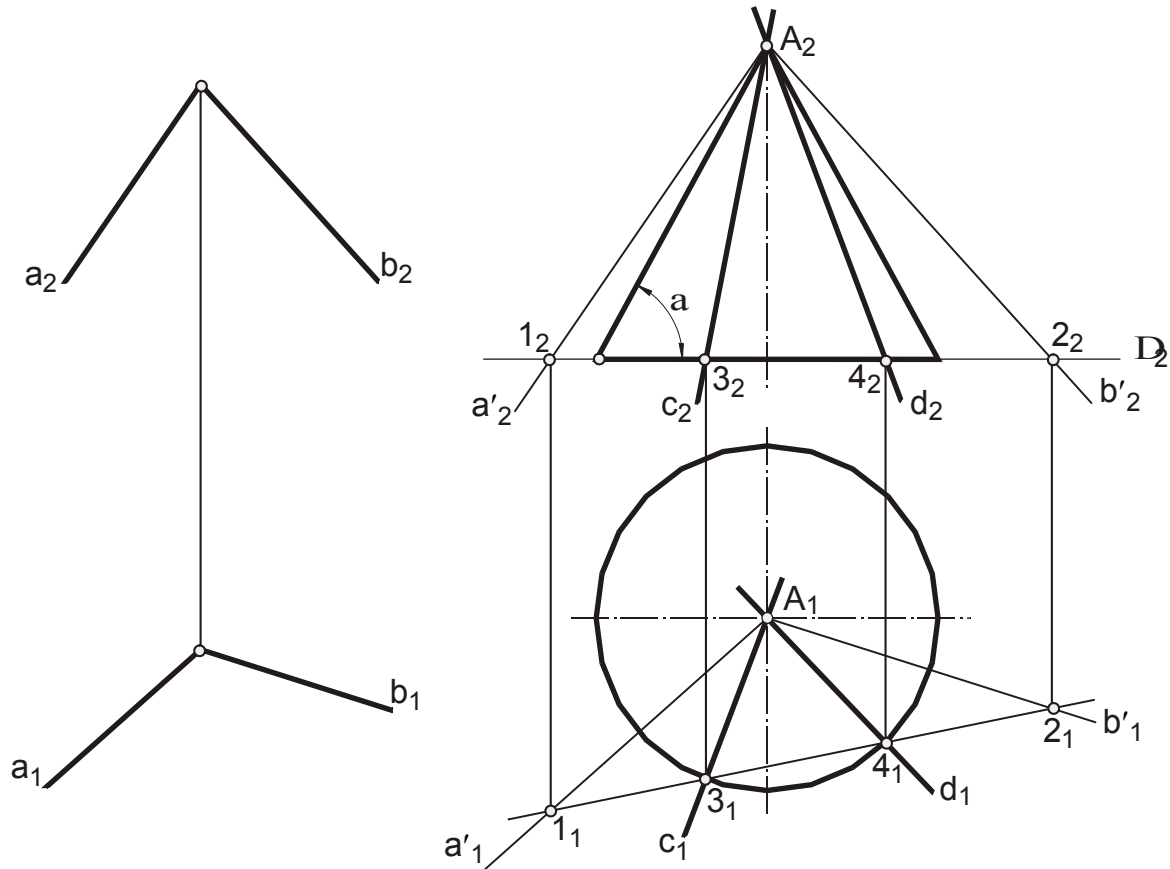


Рис. 144

**Исследование.**

Задача может иметь два решения (как показано на чертеже), одно решение, если плоскость  $\Gamma'$  будет касаться поверхности конуса, и ни одного решения, если плоскость  $\Gamma'$  пересечет конус в одной точке (в вершине).

**Построение.**

На рис. 144 показана графическая реализация алгоритма. Для построения линий пересечения плоскости  $\Gamma'$  с поверхностью конуса  $\Phi$  предварительно определена линия (1–2) пересечения плоскостей  $\Gamma'$  и  $\Delta$ , через точки пересечения которой с окружностью основания конуса (точки 3 и 4) и вершину конуса проходят искомые образующие  $c$  и  $d$ .

## Глава 7. ПОСТРОЕНИЕ РАЗВЕРТОК ПОВЕРХНОСТЕЙ

Поверхность называется развертываемой, если она путем изгибания может быть совмещена с плоскостью без образования складок и разрывов. При этом исходим из представления поверхности как гибкой, но нерастяжимой и несжимаемой пленки. Свойством развертываемости обладают многогранные поверхности и кривые линейчатые поверхности с ребром возврата: торсы, конические и цилиндрические.

Линейчатые косые и нелинейчатые поверхности этим свойством не обладают. Существуют различные способы построения их условных разверток при помощи аппроксимации.

Плоская фигура, полученная в результате совмещения поверхности с

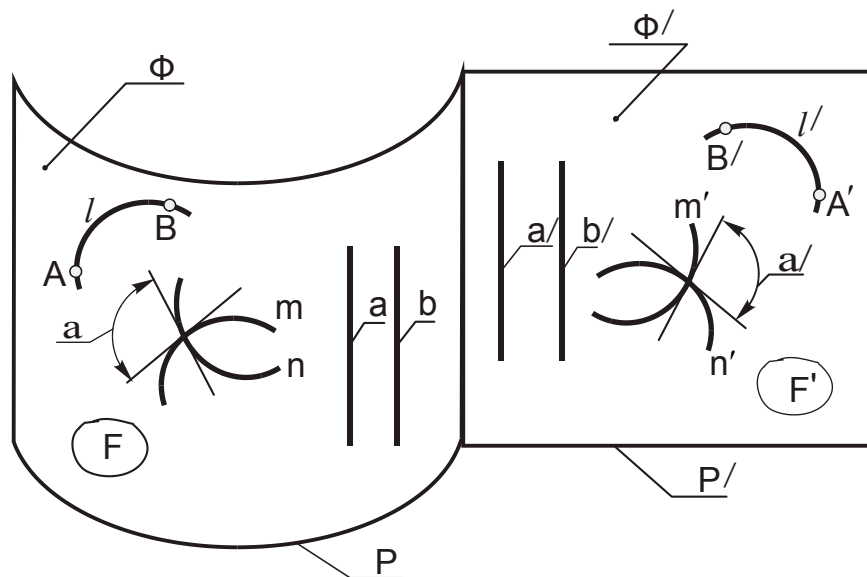


Рис. 145

плоскостью, называется разверткой. Между поверхностью и ее разверткой существует взаимно-однозначное точечное соответствие (точке А на поверхности соответствует точка А' на развертке, и наоборот), обладающее следующими свойствами (рис. 145):

- 1) длина участка АВ линии  $l$  на поверхности равна длине участка А'В' соответствующей ей линии  $l'$  на развертке;
- 2) угол  $\alpha$  между кривыми  $m$  и  $n$  на поверхности равен углу  $\alpha'$  между соответствующими им кривыми  $m'$  и  $n'$  на развертке (углом между кривыми называется угол между касательными к ним в точке пересечения);
- 3) площадь отсека  $F$  поверхности равна площади соответствующего ему отсека  $F'$  развертки.

В дифференциальной геометрии доказывается, что второе и третье свойства являются следствием первого. Первое свойство вытекает из представления поверхности как гибкой, но нерастяжимой и несжимаемой пленки.

Из рассмотренных свойств следует:

- 1) прямой линии ( $a$ ) на поверхности соответствует прямая ( $a'$ ) на развертке;
- 2) прямым, параллельным ( $a \parallel b$ ) на поверхности, соответствуют прямые, параллельные ( $a' \parallel b'$ ) на развертке.

Однако, оба указанных свойства обратной силы не имеют, т. е. не всякой прямой на развертке соответствует прямая на поверхности. Примерами этого могут служить цилиндрическая винтовая линия, параллели поверхности вращения. Если кривой линии, принадлежащей поверхности, соответствует прямая на развертке, то эта кривая линия является **геодезической** для данной поверхности.

### ПОСТРОЕНИЕ РАЗВЕРТОК МНОГОГРАННИКОВ

Развертка многогранника представляет собой плоскую фигуру, полученную при совмещении всех его граней с плоскостью. Следовательно, построение

развертки многогранника сводится к построению истинных величин его граней. Выполнение этой операции связано с определением натуральных величин его ребер, которые являются сторонами многоугольников – граней, а иногда и некоторых других элементов. Ребра многогранника условно разделяются на боковые и стороны основания.

### ***Построение развертки пирамиды***

Боковые грани любой пирамиды являются треугольниками. Для построения развертки пирамиды (рис. 146) необходимо предварительно определить натуральные величины боковых ребер и сторон основания.

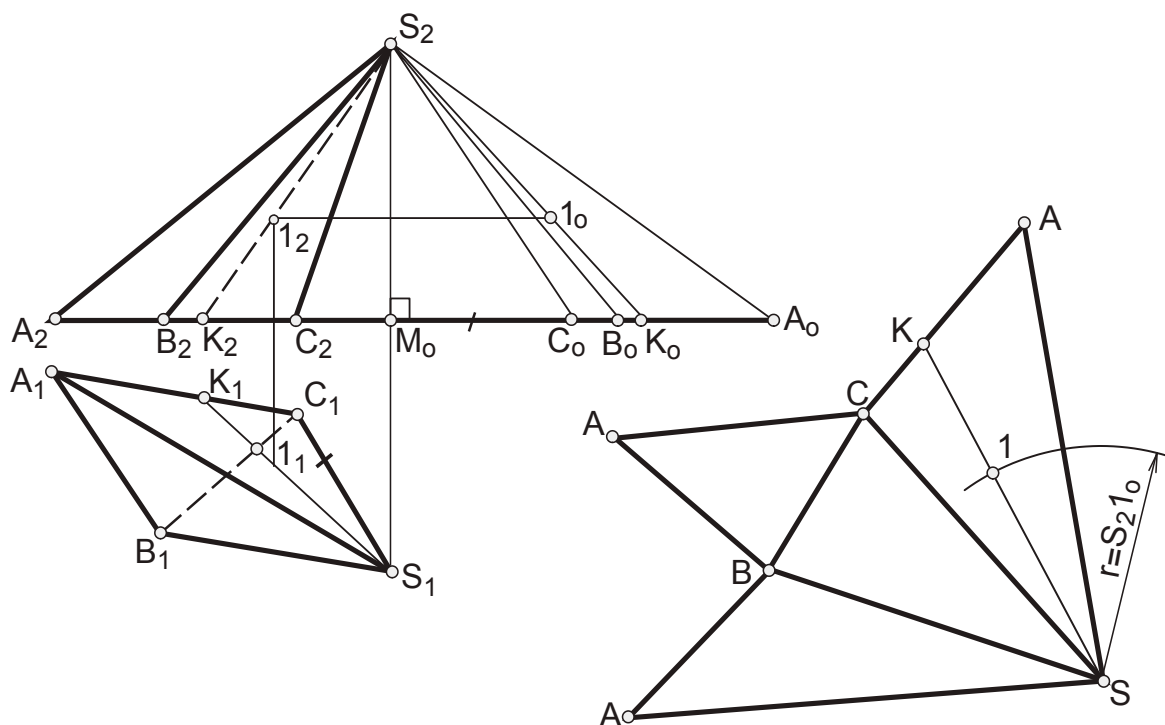


Рис. 146

У изображенной на рисунке пирамиды стороны основания являются горизонталями и проецируются на плоскость  $\Pi_1$  в истинную величину. Длины боковых ребер определены построением прямоугольных треугольников  $S_2M_0C_0$ ,  $S_2M_0B_0$  и  $S_2M_0A_0$ , у которых одним катетом является высота пирамиды ( $S_2M_0$  – разность высот точки  $S$  и точек  $A, B, C$ ), а другим – горизонтальная проекция соответствующего ребра.

$$(|M_0C_0|=|S_1C_1|; |M_0B_0|=|S_1B_1|; |M_0A_0|=|S_1A_1|; |M_0K_0|=|S_1K_1|).$$

Натуральные величины ребер пирамиды могут быть определены способом вращения вокруг оси, проходящей через вершину  $S$  и перпендикулярной плоскости  $\Pi_1$ . Следующая операция состоит в построении каждой боковой грани как треугольника по трем сторонам. В результате получается развертка боковой поверхности пирамиды в виде ряда примыкающих друг к другу треугольников с общей вершиной  $S$ . Присоединив к полученной фигуре основание  $\triangle ABC$ , получим полную развертку пирамиды. Построение на развертке точки 1, принадлежащей поверхности пирамиды, понятно из чертежа.

### ***Построение развертки призмы***

Наклонная призма изображена на рис. 147. Призма расположена так, что ее

боковые ребра параллельны плоскости  $\Pi_2$  и проецируются на нее в натуральную величину. Стороны оснований являются горизонталями и проецируются на плоскость  $\Pi_1$  без искажения.

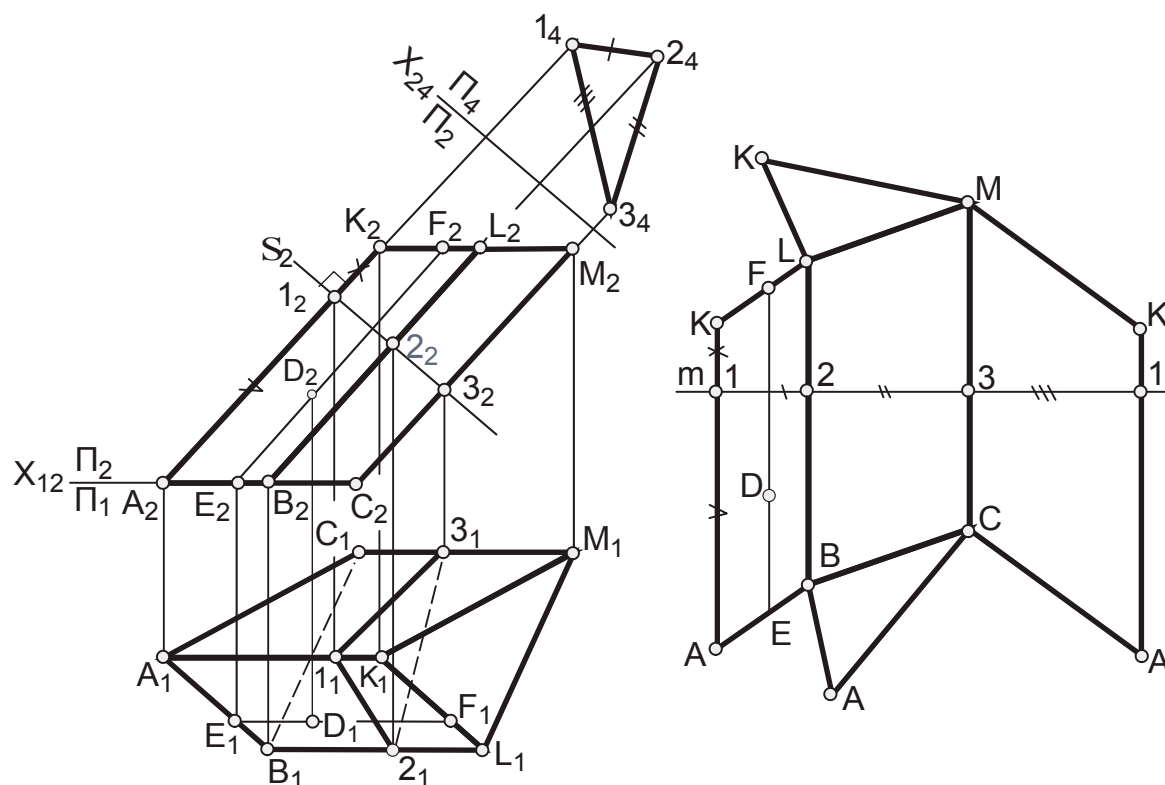


Рис.147

Таким образом, длины сторон каждой грани известны, однако этого еще недостаточно для построения истинной формы боковых граней.

Боковые грани наклонной призмы являются параллелограммами, которые не могут быть построены по четырем сторонам. Для построения параллелограмма необходимо помимо длины сторон знать еще его высоту. Для определения высот граней пересечем призму плоскостью  $\Sigma(\Sigma_2)$ , перпендикулярной к ребрам, и определим истинную величину сечения способом замены плоскостей проекций. Стороны этого нормального сечения и будут высотами соответствующих граней. Теперь приступаем к построению развертки. На свободном месте чертежа проводим горизонтальную прямую  $m$  и откладываем на ней отрезки  $|1-2|=|1_4-2_4|$ ,  $|2-3|=|2_4-3_4|$  и  $|3-1|=|3_4-1_4|$ .

Через точки 1, 2, 3, 1 проводим перпендикуляры к прямой  $m$  и откладываем на них величины боковых ребер так, чтобы  $|A1|=|A_21_2|$  и  $|1K|=|1_2K_2|$ ,  $|B2|=|B_22_2|$  и  $|2L|=|2_2L_2|$  и т. п. Соединив концы построенных отрезков, получим развертку боковой поверхности призмы. Присоединив к ней оба основания, получим полную развертку призмы. Построение на развертке точки  $D$ , принадлежащей поверхности призмы, понятно из чертежа.

### ПОСТРОЕНИЕ РАЗВЕРТОК КРИВЫХ РАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Построение точных разверток кривых развертывающихся поверхностей сложно и, как правило, не вызывается практической необходимостью. Поэтому обычно строят приближенные развертки поверхностей, вполне пригодные для практических

целей. Основным способом построения приближенных разверток разветывающихся поверхностей (кроме цилиндрических) является способ триангуляции поверхности.

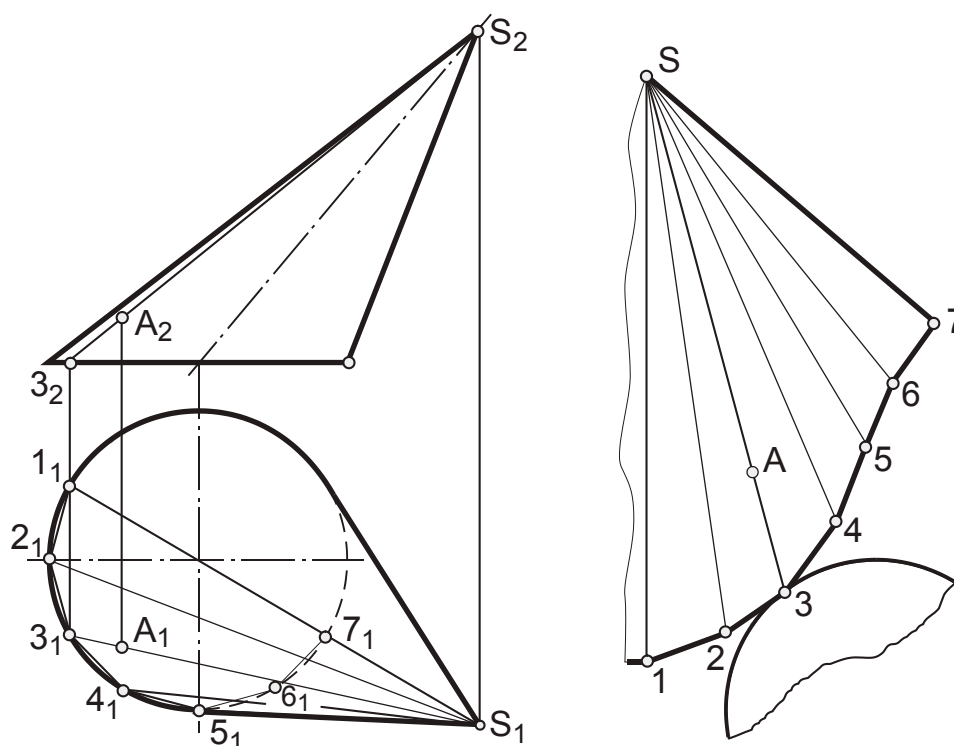


Рис. 148

Способ триангуляции состоит в том, что кривая поверхность заменяется многогранной поверхностью, состоящей из треугольных граней. Рассмотрим применение способа триангуляции к построению развертки эллиптического конуса, изображенного на чертеже (рис. 148).

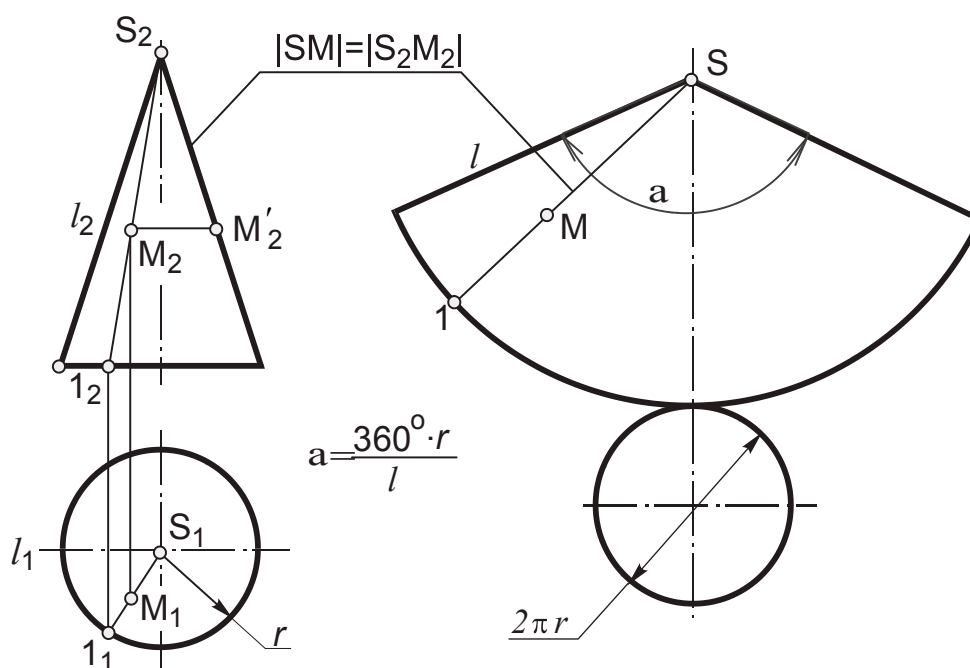


Рис. 149

Триангуляция конической поверхности осуществляется вписыванием в нее пирамидальной поверхности, которая определяется ломаной 1–2–3–4, ..., вписанной

в направляющую кривую конуса, и вершиной S. Развертка этой n-угольной пирамиды и принимается за развертку конуса. Все построения на чертеже (см. рис.148) выполняются аналогично построениям на чертеже (см. рис. 146).

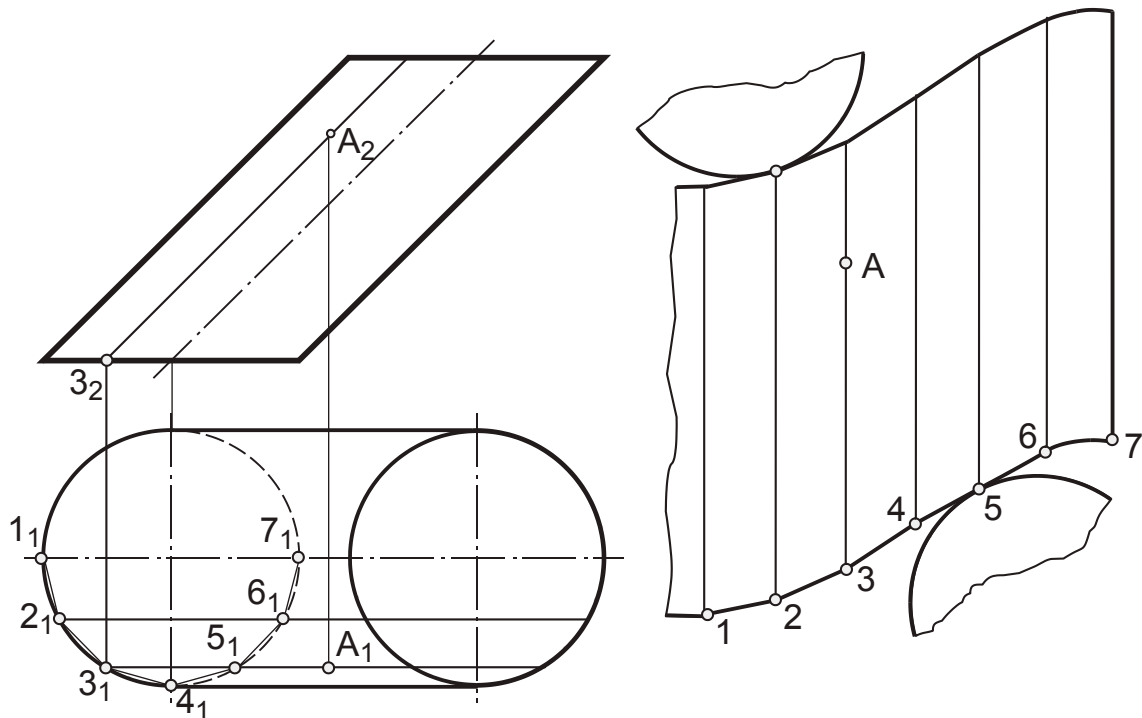


Рис. 150

Ломаная линия 1–2–3–4, ..., получающаяся на развертке пирамиды, заменяется плавной кривой, проходящей через те же точки.

Развертка прямого кругового конуса, образующая которого равна  $l$  и радиус основания  $r$ , имеет форму кругового сектора с радиусом равным  $l$  и центральным углом  $\alpha = 360^\circ \frac{r}{l}$  (рис. 149).

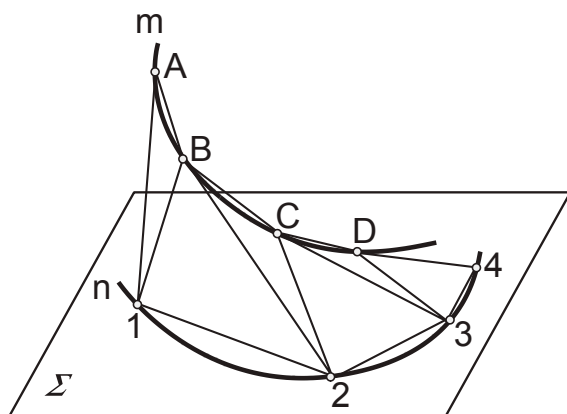


Рис. 151

При построении разверток цилиндрических поверхностей способ триангуляции, как правило, не применяется. Цилиндрическая поверхность заменяется (аппроксимируется) вписанной в нее призматической поверхностью, которая определяется ломаной 1–2–3–4, ..., вписанной в направляющую кривую цилиндра, и направлением образующих. Развертка этой n-угольной призмы и принимается за развертку цилиндра (рис. 150).

Все построения выполняются, как на рис. 147. Ломаная линия 1–2–3–4, ..., получающаяся на развертке призмы, заменяется плавной кривой, проходящей через те же точки.

Развертка боковой поверхности прямого кругового цилиндра представляет собой прямоугольник со сторонами, соответственно равными  $2\pi r$  и  $h$ , где  $r$  - радиус окружности основания цилиндра, а  $h$  - его высота. Развертка торса выполняется

способом триангуляции. Отсек торса, изображенный на рис.151, ограничен ребром возврата  $m$ , линией  $n$ , пересечения его с плоскостью  $\Sigma$  и отрезками образующих  $A_1$  и  $D_4$ .

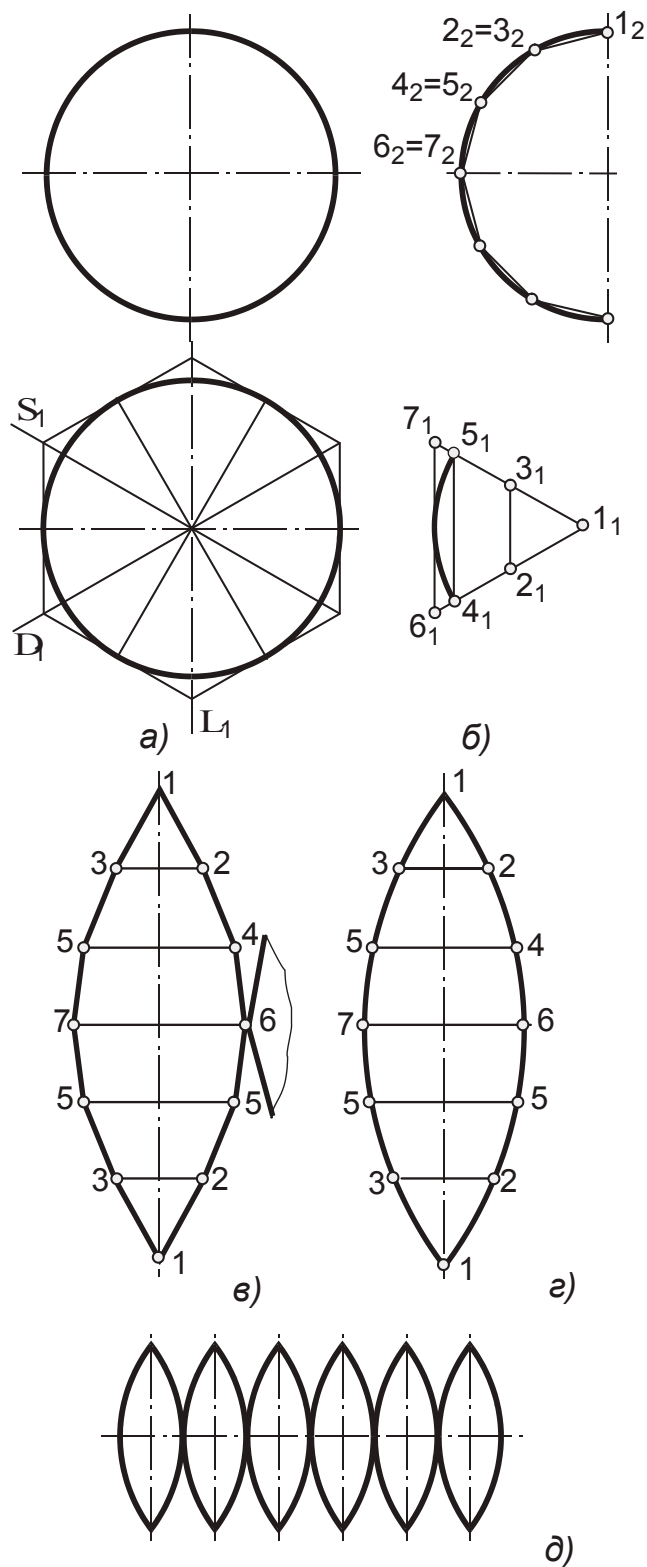


Рис. 152

Триангуляция отсека торса осуществляется следующим образом. Впишем в кривую  $m$  ломаную линию  $ABCD$ , достаточно хорошо передающую ее форму. Через вершины  $A, B, C, D$  проведем образующие поверхности торса (прямые, касательные к ребру возврата  $m$ ) и отметим точки  $1, 2, 3, 4$  их пересечения с кривой  $n$ . Соединив точки прямыми так, как показано на чертеже, получим многогранную поверхность, состоящую из треугольников. Развертка этой многогранной поверхности принимается за развертку отсека торса.

### ПОСТРОЕНИЕ УСЛОВНЫХ РАЗВЕРТОК НЕРАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Развертку неразвертывающейся поверхности построить нельзя. Для построения условной развертки такой поверхности применяют метод аппроксимации, который заключается в следующем.

Данная неразвертывающаяся поверхность  $\Phi$  разбивается на некоторые отсеки. Каждый из этих отсеков заменяется отсеком кривой развертывающейся поверхности. Совокупность всех отсеков развертывающихся поверхностей называется обводом  $\Phi'$  поверхности  $\Phi$ .

С помощью триангуляции обвод  $\Phi'$  заменяется обводом  $\Phi''$  гранных поверхностей. Развертка гранных поверхностей, образующих обвод  $\Phi''$ , принимается за условную развертку поверхности  $\Phi$ . При свертывании такой развертки, кроме изгибания, необходимо произвести частичное растяжение или сжатие отдельных ее

участков.

Рассмотрим применение этого способа на примере построения условной развертки сферы.

Разделим поверхность сферы (рис. 152а) на некоторое число (например, шесть) одинаковых отсеков при помощи осевых плоскостей  $\Sigma$ ,  $\Delta$ ,  $\Lambda$ .

Поверхность каждого отсека сферы заменим отсеком описанной цилиндрической поверхности. В результате поверхность сферы заменяется обводом (составной поверхностью), составленным из отсеков прямых круговых цилиндров.

Поверхность каждого отсека цилиндрической поверхности заменим отсеком вписанной призматической поверхности (рис. 152б). В результате обвод, составленный из отсеков цилиндров, заменяется обводом, составленным из гранных поверхностей (отсеков прямых призм).

Строим развертку каждого отсека призматической поверхности. На чертеже (рис. 152в) показана развертка одного из них. Затем ломаная 1–3–5–7... заменяется плавной кривой, проходящей через те же точки (рис. 152г). Полученная фигура принимается за условную развертку отсека сферы. Полная развертка будет состоять из шести таких фигур (рис. 152д).

Применяя в качестве аппроксимирующих поверхностей цилиндрические, конические или торсовые поверхности, аналогично можно строить условные развертки других неразвертывающихся поверхностей.

## Глава 8. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ, КАСАТЕЛЬНЫЕ К КРИВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Прямая линия, касательная к какой-либо кривой линии, принадлежащей поверхности, является касательной и к поверхности. Через любую точку поверхности можно провести множество кривых, а, следовательно, и множество

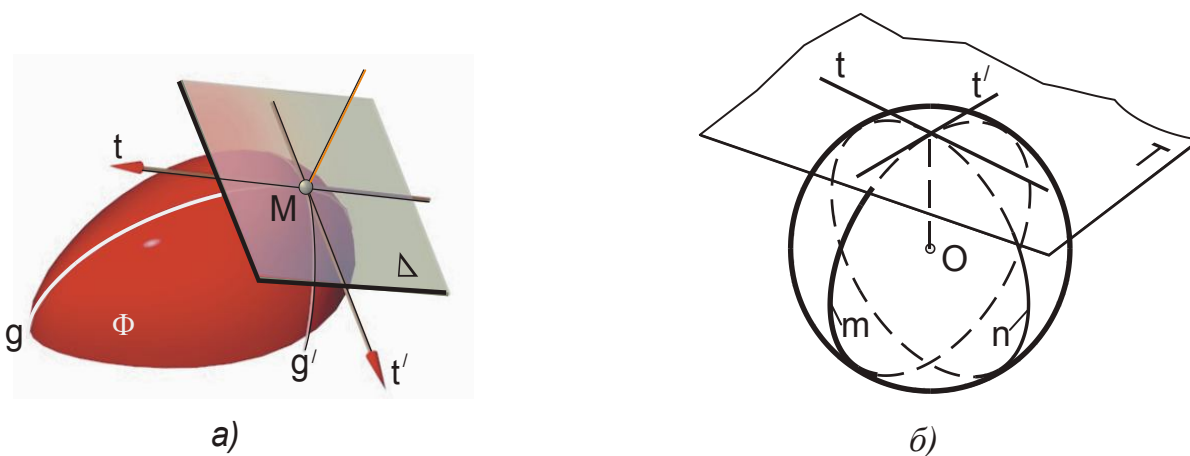


Рис. 153

касательных прямых. В дифференциальной геометрии доказывается, что все эти касательные прямые располагаются в одной плоскости, которая называется **касательной плоскостью** к поверхности в данной ее точке (рис. 153а).

Таким образом, касательная плоскость к поверхности есть множество всех касательных, проведенных к поверхности через одну и ту же точку. Положение плоскости в пространстве определяется двумя пересекающимися прямыми, поэтому для построения касательной плоскости к поверхности в заданной точке достаточно построить касательные к двум кривым линиям, проходящим через эту точку. В

качестве таких кривых выбирают наиболее простые линии поверхности. Если данная поверхность является линейчатой, то за одну из таких кривых целесообразно взять

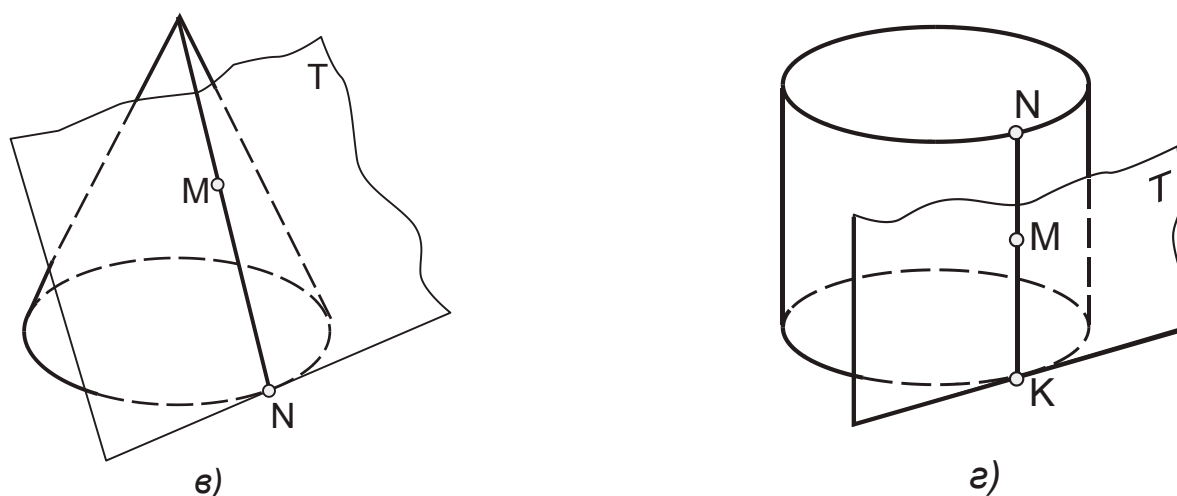


Рис. 153в,г

прямолинейную образующую (касательная к прямой линии есть сама прямая).

Перпендикуляр, восстановленный к касательной плоскости в точке ее касания с поверхностью, называется нормалью к поверхности. Касательная плоскость может иметь с поверхностью одну общую точку и располагаться по одну сторону от нее.

Такие точки поверхности называются **эллиптическими** (рис.154а). Примерами поверхностей, все точки которых эллиптические, являются сфера, эллипсоид вращения и др.

Касательная плоскость к поверхности в некоторой ее точке может пересекать поверхность (рис.154г и 153д) по прямым или кривым линиям. Такие точки поверхности называются **гиперболическими**. Примерами поверхностей, имеющих гиперболические точки, могут служить однополостный гиперболоид, тор и др. Касательная плоскость может иметь с поверхностью общую линию –

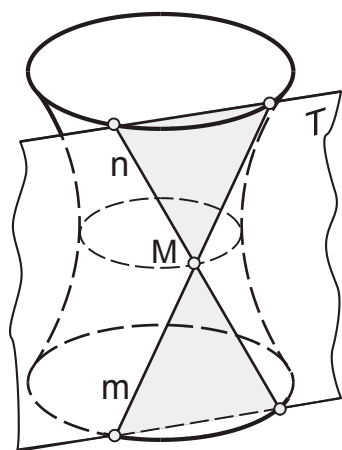


Рис. 153д

прямую или кривую (рис. 154б,г). Точки кривой поверхности, принадлежащие линии касания, называются **параболическими**.

Примерами поверхностей, все точки которых параболические, являются цилиндрические, конические поверхности и торсы.

Поверхность тора содержит все три вида точек.

На рис. 154 приведены примеры построения касательных плоскостей к некоторым кривым поверхностям.

Плоскость  $\Gamma(h \cap f)$  касается сферы в точке M

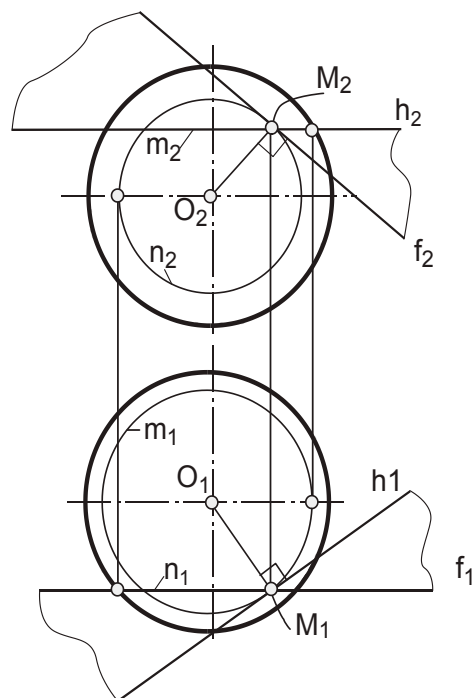


Рис. 154а

(рис. 154а); плоскость  $\Lambda(SK \cap t)$  касается конуса по прямой  $M \in [SK]$  (рис. 154б); плоскость  $\Theta(a \cap b)$  касается тора в точке  $M$  (рис. 154в); плоскость  $T \parallel \Pi_2$  касается

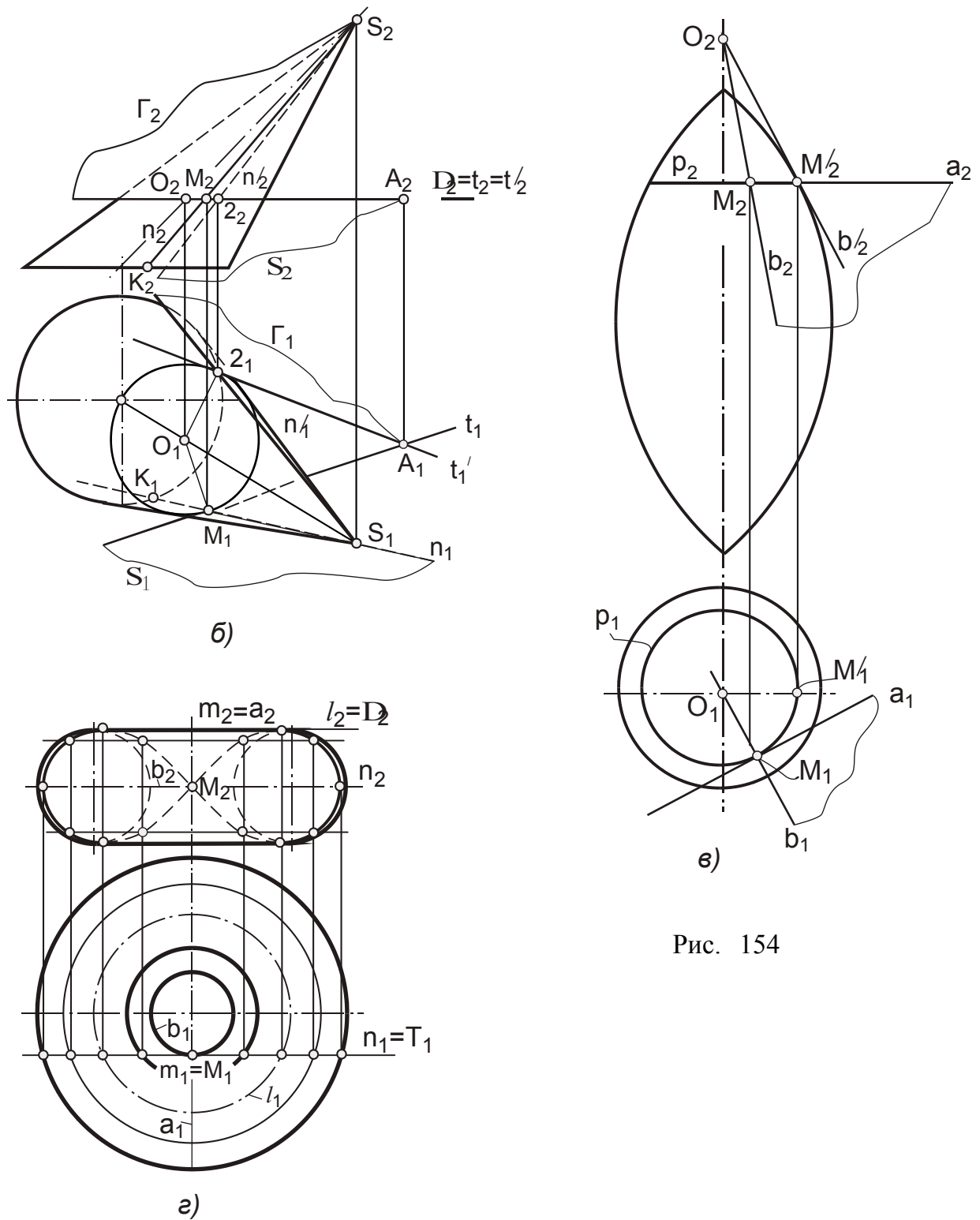


Рис. 154

тора в точке  $M$  и пересекает его по лемнискате, плоскость  $\Delta$  касается тора по окружности  $l$  (рис. 154г).

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дукмасова В.С., Краснов В.А. Методика решения задач по начертательной геометрии. – Челябинск: Издательство ЮУрГУ, 2003.
2. Сенигов Н.П., Гусятникова Т.В., Ларионова Н.В., Дукмасова В.С., Швайгер А.М. Начертательной геометрия. – Челябинск: Издательство ЮУрГУ, 2000
3. Фролов С.А., Урванцова Н.З., Скорнякова А.Е. Методическое пособие для курсов повышения квалификации преподавателей. – М.: МВТУ им. Баумана, 1989.
4. Аксенова Е.А. и др. Курс начертательной геометрии. – М.: Высшая школа, 1974.
5. Посвянский А.Д. Краткий курс начертательной геометрии. – М.: Высшая школа, 1974.
6. Посвянский А.Д., Рыжов Н.Н. Сборник задач по начертательной геометрии. – М.: Издательство технико-теоретической литературы, 1969.
7. Рудаев А.К. Сборник задач по начертательной геометрии. – М.: Издательство технико-теоретической литературы, 1967.
8. Гордон В.О., Иванов Ю.Б., Солнцева Т.Е. Сборник задач по курсу начертательной геометрии. – М.: Наука, 1967.
9. Арустамов Х.А. Сборник задач по начертательной геометрии. – М.: Машгиз, 1959.
10. Фролов С. А. Начертательная геометрия. - М.: Машиностроение, 1991.
11. Шепелев Г.В., Дукмасова В.С., Бегашева Г.Г., Калмыков Г.В. Упражнения по начертательной геометрии. – Челябинск: ЧПИ, 1998.
12. Савелон А.А. Плоские кривые: Справочное руководство. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960.
13. Бубенников А.В., Громов М.Я. Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 1985.
14. Четверухин Н.Ф. и др. Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 1963.
15. Гордон В.О. Курс начертательной геометрии – М.: Высшая школа, 1985.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                                                       |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>СИМВОЛИКА И ОБОЗНАЧЕНИЯ .....</b>                                                                                                  | <b>3</b>   |
| <b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>                                                                                                                 | <b>4</b>   |
| <b>Глава 1. Метод проецирования</b>                                                                                                   |            |
| 1.1 Центральное проецирование. Понятие о проективном пространстве.....                                                                | 6          |
| 1.2 Параллельное проецирование .....                                                                                                  | 7          |
| 1.3 Инварианты параллельного проецирования .....                                                                                      | 8          |
| 1.4 Ортогональное проецирование .....                                                                                                 | 10         |
| <b>Глава 2. Комплексные чертежи геометрических фигур</b>                                                                              |            |
| 2.1 Комплексный чертеж точки .....                                                                                                    | 12         |
| 2.2 Комплексные чертежи линий.....                                                                                                    | 14         |
| 2.2.1 Комплексные чертежи прямых линий.....                                                                                           | 14         |
| 2.2.2 Комплексные плоских и пространственных ломаных.....                                                                             | 19         |
| 2.2.3 Комплексные чертежи кривых линий.....                                                                                           | 20         |
| 2.3 Комплексные чертежи поверхностей.....                                                                                             | 23         |
| 2.3.1 Комплексные чертежи плоскостей. Плоскость общего положения.....                                                                 | 23         |
| 2.3.2 Многогранные поверхности. Многогранники.....                                                                                    | 29         |
| 2.3.3 Кривые поверхности.....                                                                                                         | 32         |
| <b>Глава 3. Способы преобразования комплексного чертежа .....</b>                                                                     | <b>54</b>  |
| 3.1 Способ замены плоскостей проекций.....                                                                                            | 54         |
| 3.2 Способ вращения.....                                                                                                              | 62         |
| <b>Глава 4. Позиционные задачи.....</b>                                                                                               | <b>70</b>  |
| 4.1 Задачи, выражающие отношения между геометрическими фигурами.....                                                                  | 70         |
| 4.1.1 Относительное положение прямых.....                                                                                             | 70         |
| 4.1.2 Относительное положение прямой и плоскости, двух плоскостей.....                                                                | 72         |
| 4.1.3 Взаимно перпендикулярные прямые и плоскости.....                                                                                | 73         |
| 4.2 Задачи, в которых определяются общие элементы (точки или линии) геометрических фигур.....                                         | 81         |
| 4.2.1 Определение общих элементов простейших геометрических фигур из условия принадлежности (вспомогательные позиционные задачи)..... | 81         |
| 4.2.2 Первая позиционная задача (построение точек пересечения линии и поверхности).....                                               | 82         |
| 4.2.3 Вторая позиционная задача (построение линии пересечения двух поверхностей).....                                                 | 90         |
| <b>Глава 5. Метрические задачи</b>                                                                                                    |            |
| 5.1 Задачи на определение расстояний между геометрическими фигурами.....                                                              | 109        |
| 5.2 Задачи на определение действительных величин плоских геометрических фигур и углов между ними .....                                | 110        |
| <b>Глава 6. Комплексные задачи .....</b>                                                                                              | <b>113</b> |
| <b>Глава 7. Построение разверток поверхностей .....</b>                                                                               | <b>116</b> |
| <b>Глава 8. Прямые и плоскости, касательные к кривой поверхности .....</b>                                                            | <b>123</b> |
| <b>Литература.....</b>                                                                                                                | <b>126</b> |