

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ГРАФИКИ

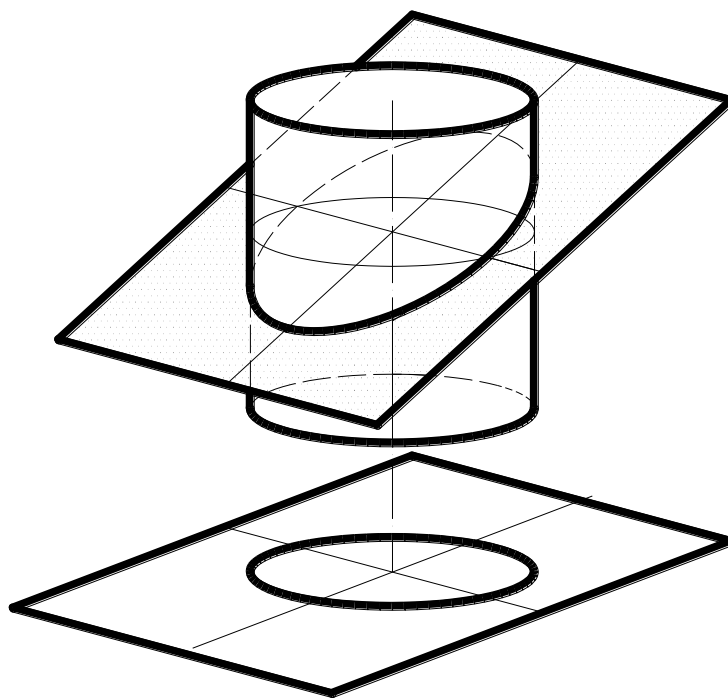
514.18(07)

НЗ65

Т.В. Беляева, Т.В. Колобаева, Т.Э. Сергеева, О.В. Шутова

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Рабочая тетрадь



Челябинск
2016

Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно- Уральский государственный университет
Кафедра графики

514.18(07)
НЗ65

Т.В. Беляева, Т.В. Колобаева, Т.Э. Сергеева, О.В. Шутова

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
Рабочая тетрадь

Тема №	Отметка о зачёте
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	

Студент _____

Группа _____

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2016

УДК 514.18(075.8)
НЗ65

*Одобрено
учебно-методической комиссией архитектурно-строительного
факультета*

*Рецензент:
К.т.н., профессор А.М. Швайгер*

НЗ65 Начертательная геометрия. Рабочая тетрадь. / Т.В. Беляева, Т.В. Колобаева, Т.Э. Сергеева, О.В. Шутова; под ред. Л.И. Хмаровой – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2016. – 84с.

Методическое пособие по начертательной геометрии разработано на основании ФГОС для студентов строительных специальностей и предназначено для решения задач на практических занятиях и для самостоятельной работы.

Методическое пособие содержит исходные условия задач, краткие теоретические обоснования, методические рекомендации, примеры решения и оформления задач.

УДК 514.18(075.8)

ОБОЗНАЧЕНИЕ И СИМВОЛИКА

1. $A, B, C, \dots$ или $1, 2, 3$ – точки
2. $a, b, c, \dots$ кривые или прямые линии
3. Γ (гамма), Δ (дельта), Σ (сигма), Π (пи) – поверхности (плоскости)
4. (AB) прямая, проходящая через точки A и B
5. $[AB]$ – отрезок прямой
6. $|AB|$ – длина отрезка AB
7. α, β, γ – углы
8. $\parallel$ – параллельность
9. $\perp$ – перпендикулярность
10. $\cap$ – пересечение
11. $=$ – совпадение, равенство
12. $\rightarrow$ – отображение (проецирование)
13. $\in$ – принадлежность
14. $\subset$ или $\supset$ – включение (является частью, подмножеством)
15. $\wedge$ – соответствует союзу “и”
16. $\Rightarrow$ – логическое следование “если ..., то...”

УКАЗАНИЯ ДЛЯ РАБОТЫ С ТЕТРАДЬЮ

1. Задачи решать непосредственно в тетради на исходных условиях карандашом с помощью чертежных инструментов.
2. В процессе решения задачи следует обозначить все элементы геометрических построений: точки, линии, плоскости.
3. Искомые геометрические фигуры (результат решения задачи) для наглядности обводить цветным карандашом.

1. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ ТОЧКИ. КООРДИНАТЫ ТОЧКИ. ОСНОВЫЙ И БЕЗОСНОВЫЙ СПОСОБЫ ИЗОБРАЖЕНИЯ.

1.1. Основы способ изображения

1. На аксонометрическом чертеже (рис.1) измерить линейкой координаты точки A и занести их в таблицу (в мм).

Коэффициенты искажения по осям X , Z принять равными 1, по оси Y коэффициент искажения принять равным 0,5.

Построить комплексный чертеж точки A (рис. 2).

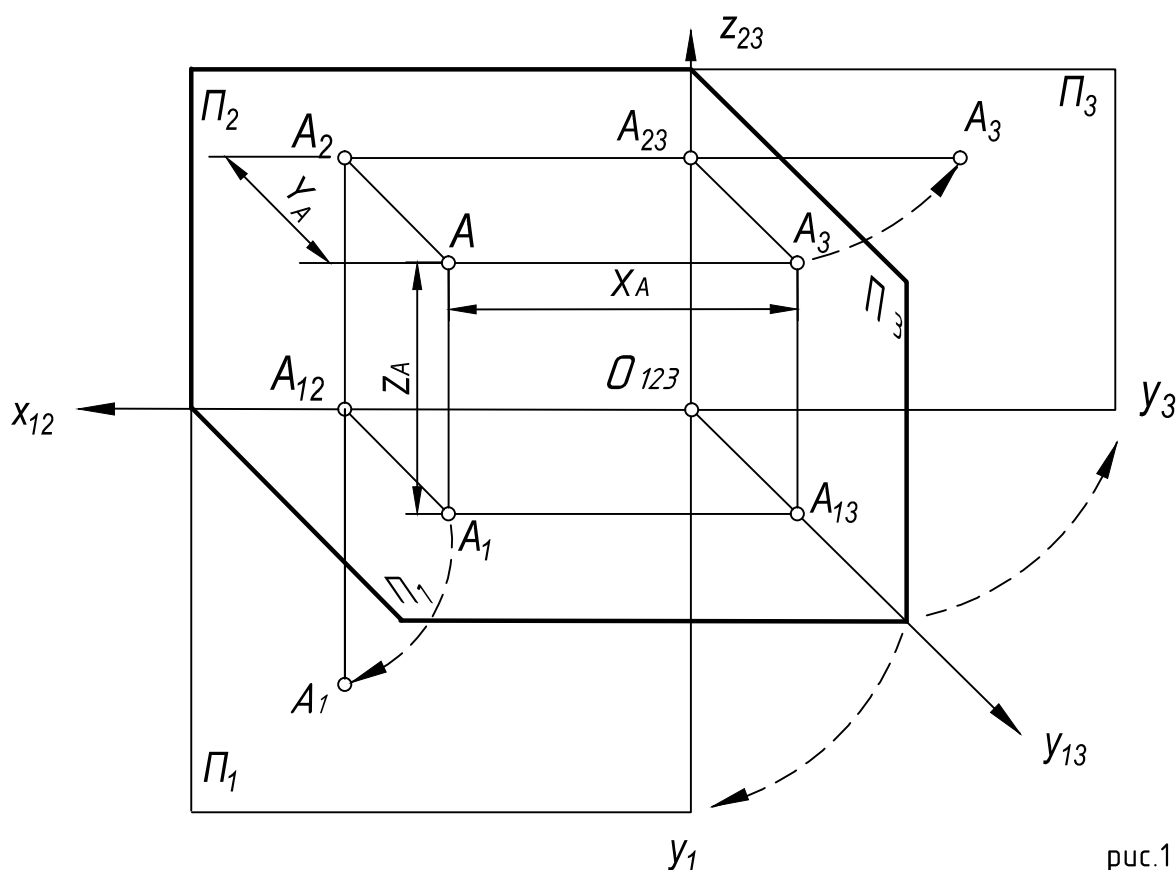


рис.1

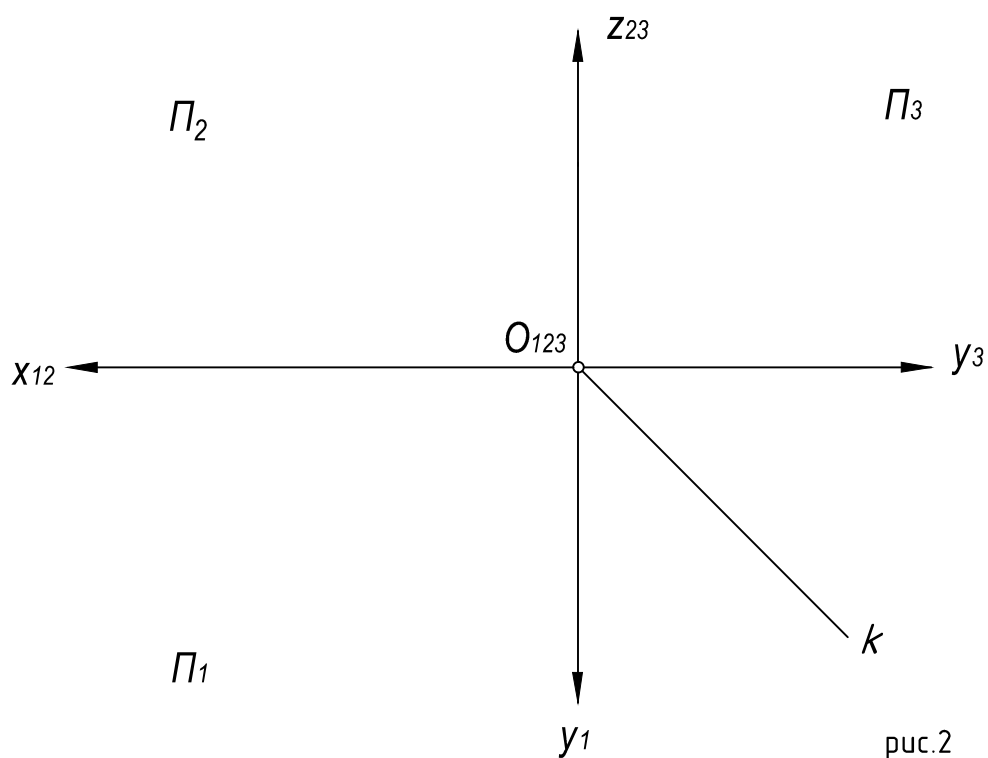
X_A (широта)– AA_3	
Y_A (глубина)– AA_2	
Z_A (высота)– AA_1	

Записать названия плоскостей проекций

Π_1 _____

Π_2 _____

Π_3 _____



Записать названия проекций точки А

A_1 _____

A_2 _____

A_3 _____

Условия связи между проекциями точки на комплексном чертеже:

1. Горизонтальная (A_1) и фронтальная (A_2) проекции точки А принадлежат одной вертикальной линии связи;
2. Фронтальная (A_2) и профильная (A_3) проекции точки А принадлежат одной горизонтальной линии связи;
3. Горизонтальная (A_1) и профильная (A_3) проекции точки А принадлежат ломаной линии связи, вершина которой принадлежит постоянной прямой к чертежу.

2. Построить комплексный чертеж точек А и В, если

$$X_A=50\text{мм}, Y_A=15\text{мм}, Z_A=10\text{мм}$$

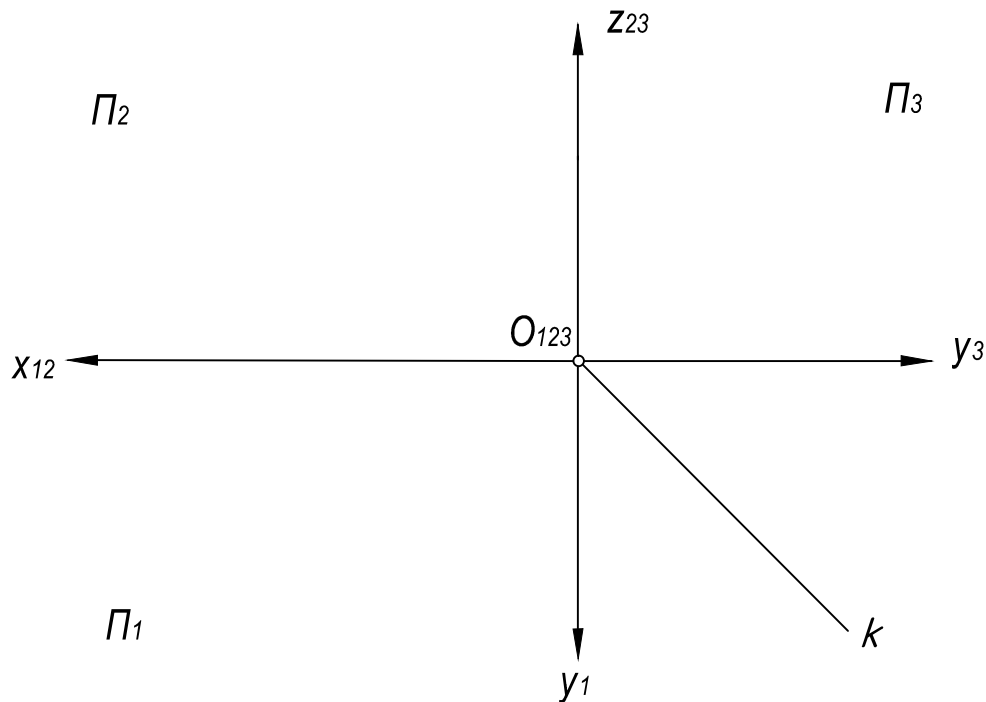
$$X_B=20\text{мм}, Y_B=30\text{мм}, Z_B=35\text{мм}$$

Отметить на чертеже и записать разность расстояний точек А и В до плоскостей проекций:

разность широт $X_A - X_B =$ _____

разность глубин $Y_A - Y_B =$ _____

разность высот $Z_A - Z_B =$ _____



1.2. Безосный способ изображения

Плоскости проекций не фиксируются в пространстве, положение осей становится неопределенным и они на чертеже не наносятся.

Комплексный чертеж приобретает вид, показанный на рис.3, и название: трехпроекционный безосный комплексный чертеж точки.

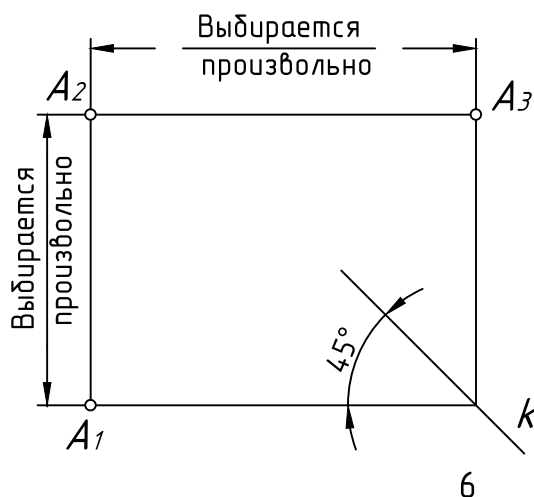


рис.3

Условия связи между проекциями точки на безосном комплексном чертеже сохраняются.

Построение третьей проекции любой точки пространства по двум заданным ее проекциям осуществляется следующим образом: например, если заданы две проекции (горизонтальная и фронтальная) точек A и B , то одна из точек, например, A , принимается за базовую и третья ее проекция строится так, как показано на рис.3. Положение третьей проекции точки B определяется по разности глубин точек $Y_B - Y_A$, которая не зависит от положения плоскостей проекций (рис.4).

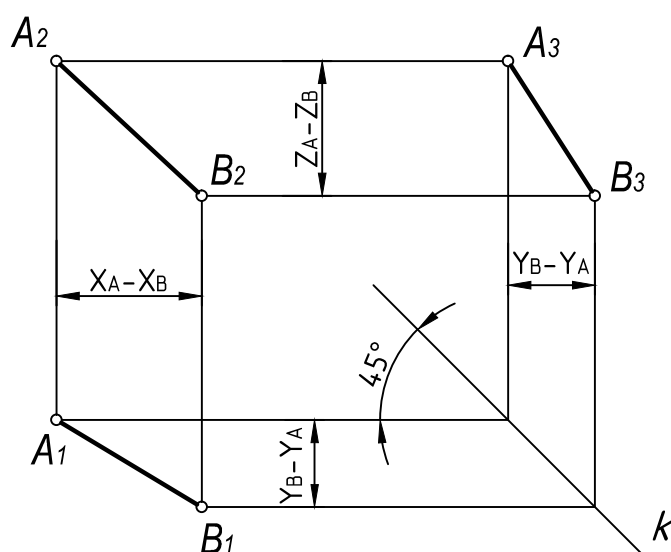


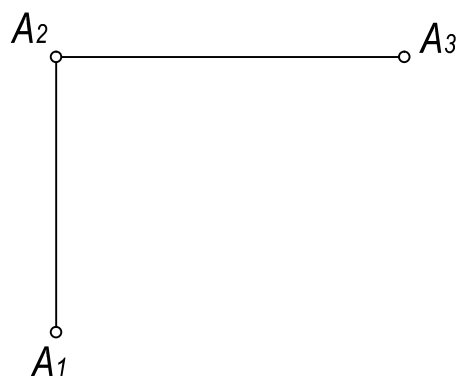
рис.4

3. Построить комплексный чертеж точки B по разности координат.

$$X_B - X_A = 20$$

$$Y_B - Y_A = 15$$

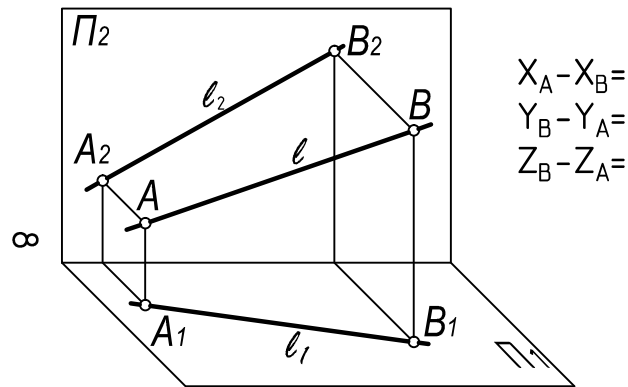
$$Z_A - Z_B = 25$$



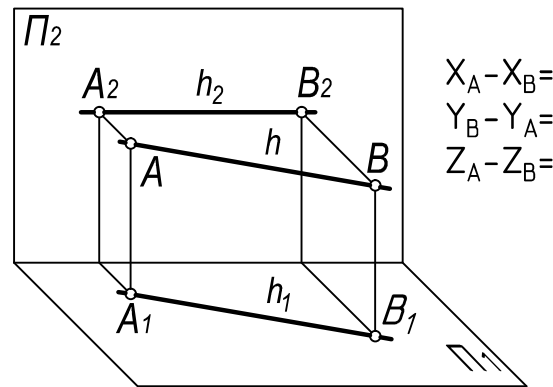
2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧЕРТЕЖИ ПРЯМЫХ ЛИНИЙ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ СПОСОБОМ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА. ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ТОЧКИ ПРЯМОЙ. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ ЛИНИЙ

4. На изображении пространственной модели прямой измерить разности координат точек A и B . Построить комплексный чертеж прямой и записать ее название. На чертежах линий уровня указать натуральные величины отрезков $|AB|$ и углы их наклона к плоскостям проекций (α, β, γ).

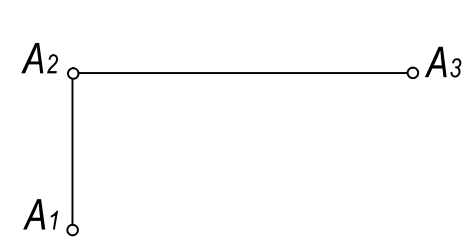
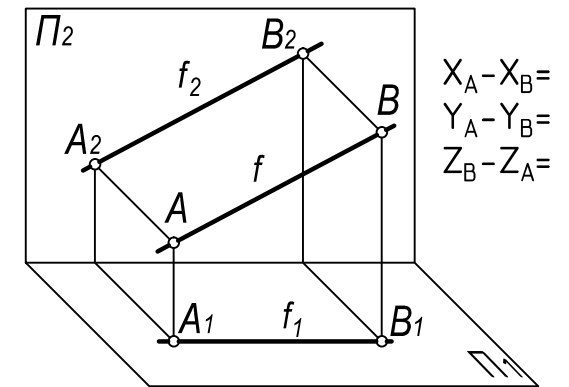
а) $\ell(A,B)$ _____



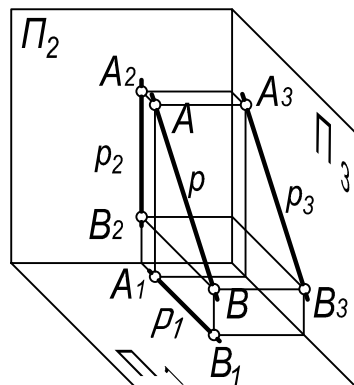
б) $h(A,B)$ _____



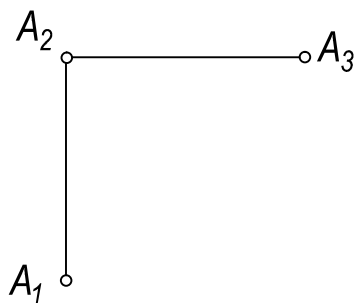
в) $f(A,B)$ _____



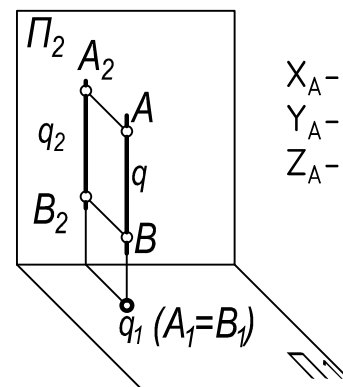
з) $p(A,B)$ _____



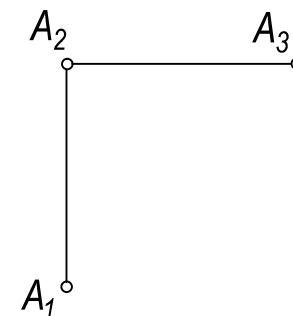
$$\begin{aligned} X_A - X_B &= \\ Y_B - Y_A &= \\ Z_A - Z_B &= \end{aligned}$$



д) $q(A,B)$ _____



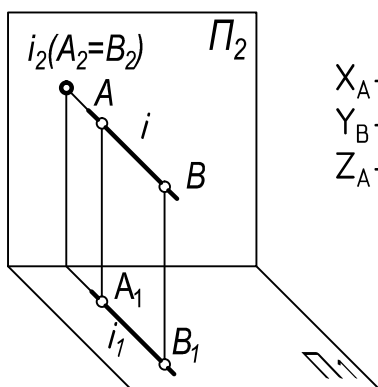
$$\begin{aligned} X_A - X_B &= \\ Y_A - Y_B &= \\ Z_A - Z_B &= \end{aligned}$$



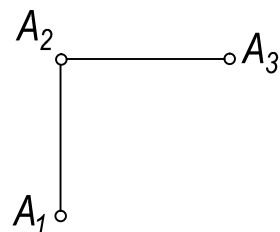
$A \cup B$ - _____

б

е) $i(A,B)$ _____

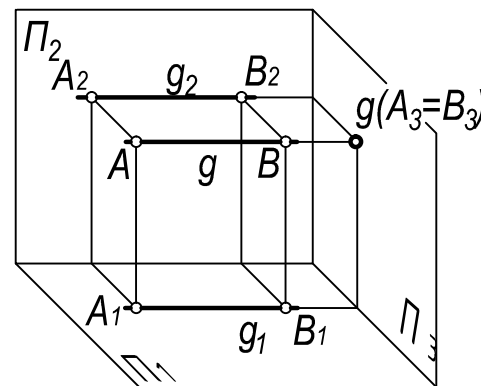


$$\begin{aligned} X_A - X_B &= \\ Y_B - Y_A &= \\ Z_A - Z_B &= \end{aligned}$$

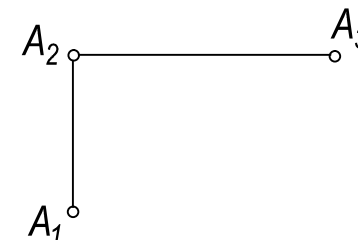


$A \cup B$ - _____

ж) $g(A,B)$ _____



$$\begin{aligned} X_A - X_B &= \\ Y_B - Y_A &= \\ Z_A - Z_B &= \end{aligned}$$



$A \cup B$ - _____

Для проецирующих прямых запишите названия конкурирующих точек.

Способ прямоугольного треугольника

Способом прямоугольного треугольника определяют истинную величину отрезка прямой и углы его наклона к плоскостям проекций.

Если от горизонтальной проекции отрезка АВ под прямым углом отложить разность высот его концов $Z_A - Z_B$, получим точку A_0 . Соединив A_0 и B_1 найдём $|AB|$ – натуральную величину отрезка и α – угол наклона АВ к плоскости проекций Π_1 (рис.5).

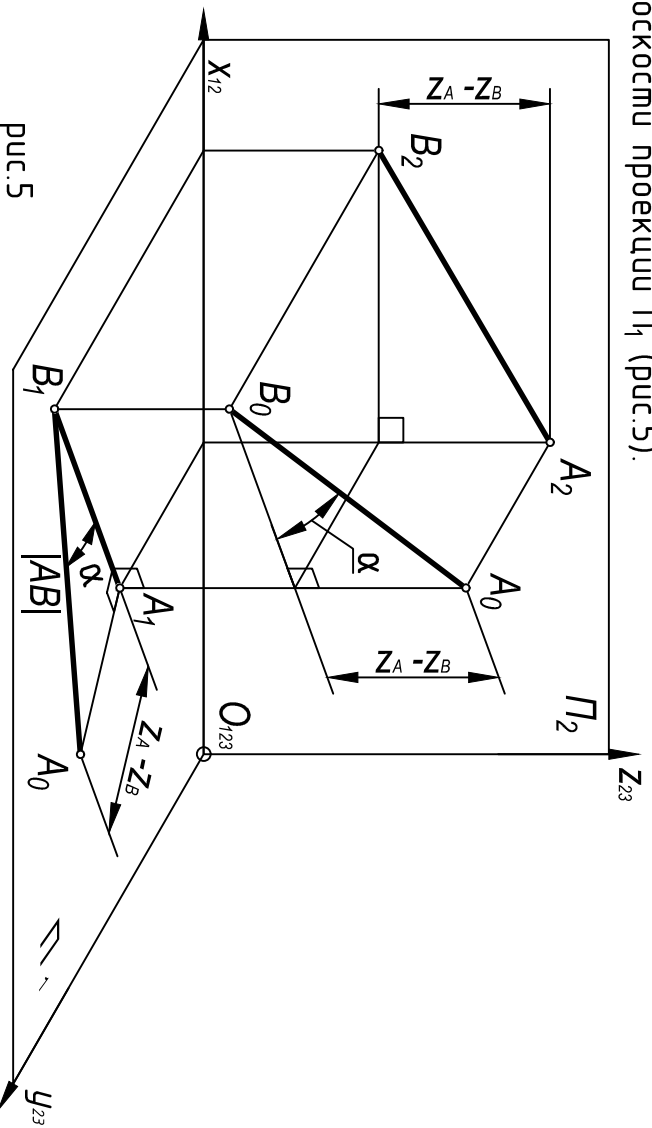


рис.5

Истинную величину отрезка АВ можно также определить по разности ординат его конечных точек (рис.6). Величину $y_B - y_A$ откладывают перпендикулярно фронтальной проекции A_2B_2 и получают длину $|AB|$ и β – угол наклона отрезка к плоскости Π_2 .

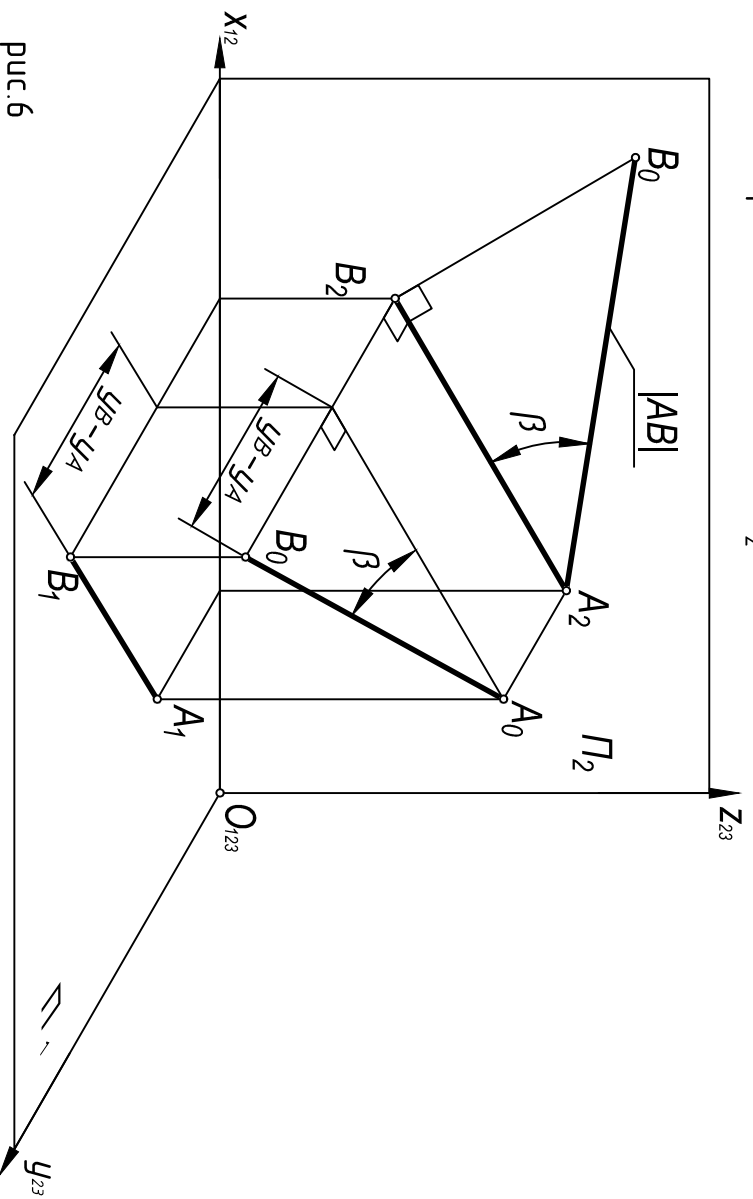
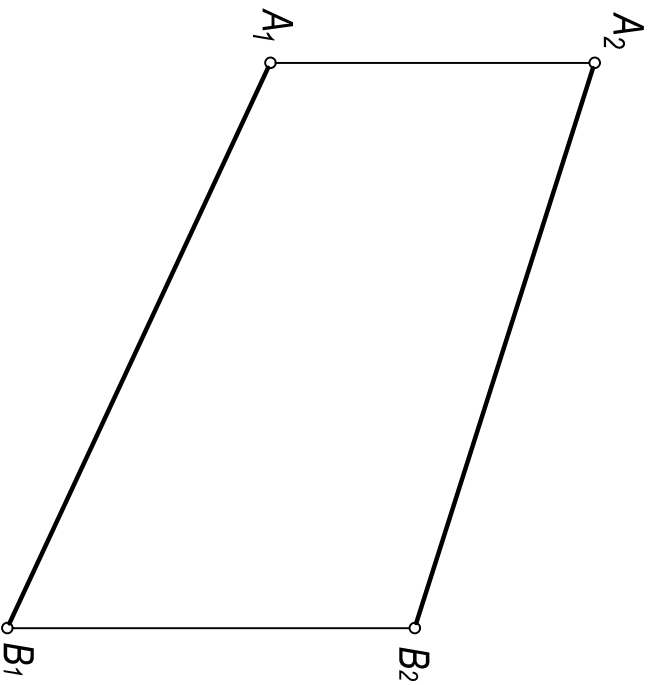
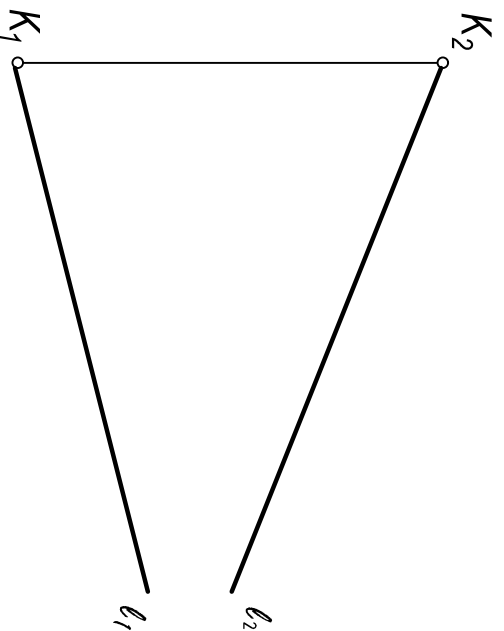


рис.6

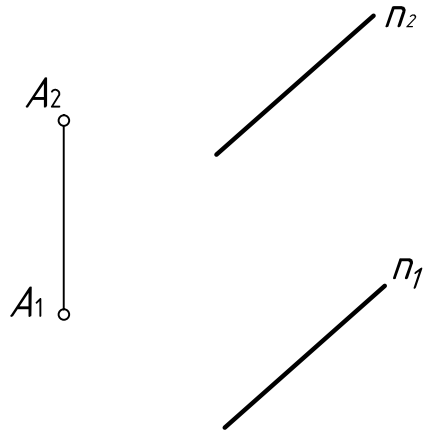
5. Определить по комплексному чертежу истинную величину отрезка $[AV]$ прямой общего положения и углы наклона к плоскостям проекций Π_1 и Π_2 .



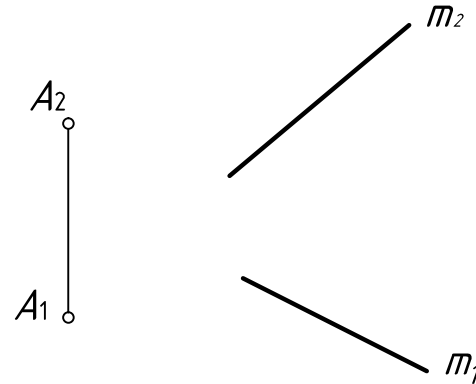
6. На прямой ℓ от точки K отложить отрезок $[KL]$ длиной 30мм.



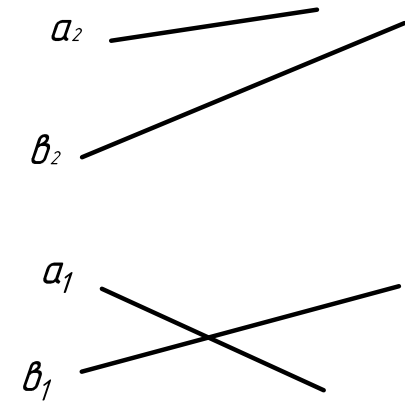
7. Через точку A провести горизонталь h и фронталь f , пересекающие прямую n .



8. Через точку A провести прямую s , параллельную прямой m .

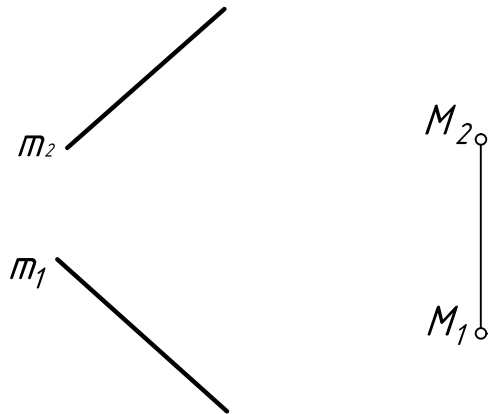


9. Построить проекции горизонтально проецирующей прямой i , пересекающей прямые a и b .



12

10. Через точку M провести фронталь f , скрещивающуюся с прямой m и расположенную под ней.

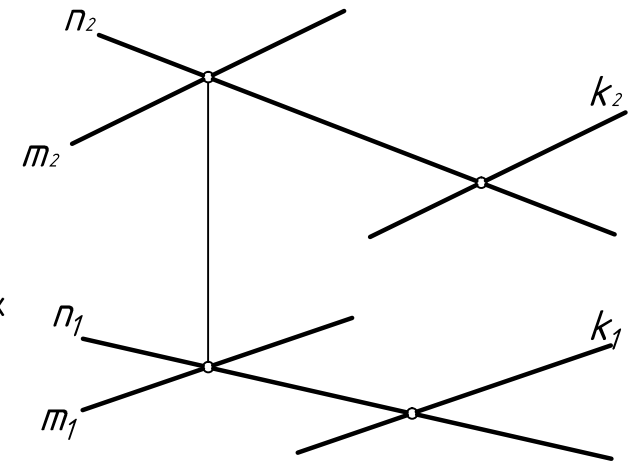


11. Определить относительное положение прямых m , n , k .

Прямые m и n _____
 Прямые k и m _____
 Прямые k и n _____

При помощи конкурирующих точек определить взаимное положение скрещивающихся прямых относительно:

Π_1 _____
 Π_2 _____

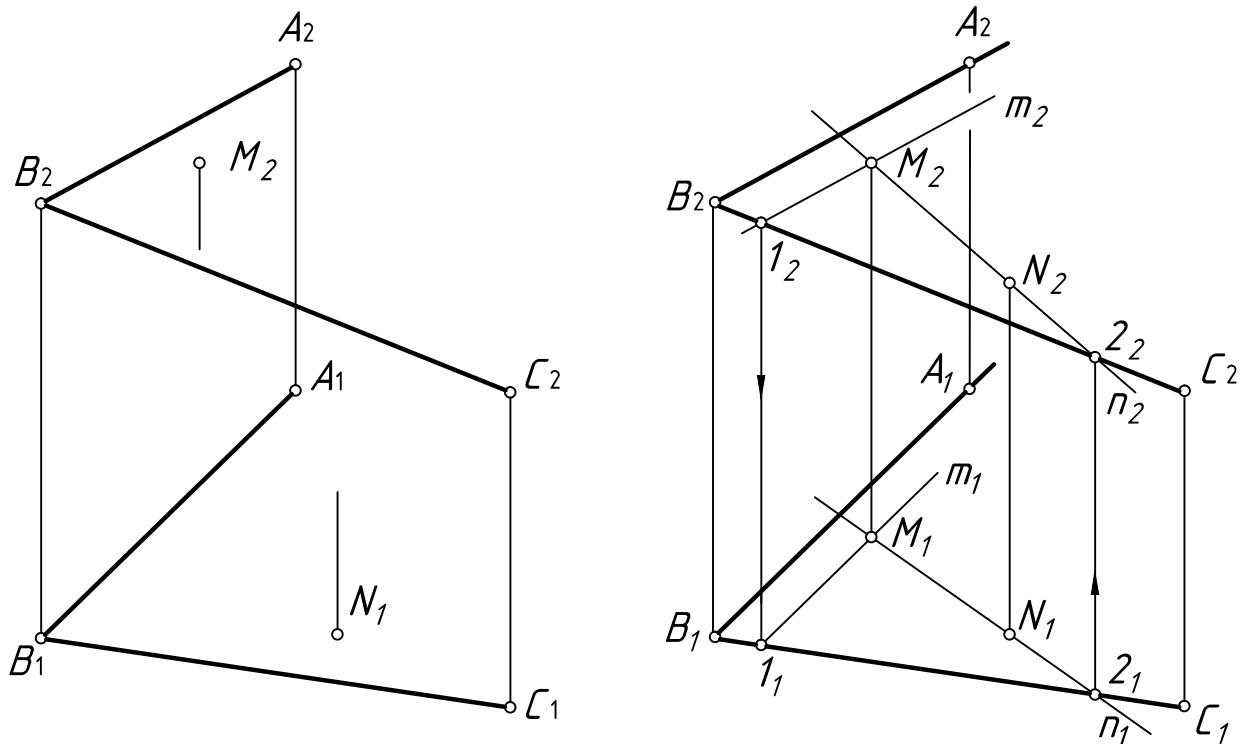


3. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧЕРТЕЖИ ПЛОСКОСТЕЙ. ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ПРЯМОЙ И ТОЧКИ ПЛОСКОСТИ. ВЗАИМНАЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ, ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ. ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

3.1. Принадлежность прямой и точки плоскости

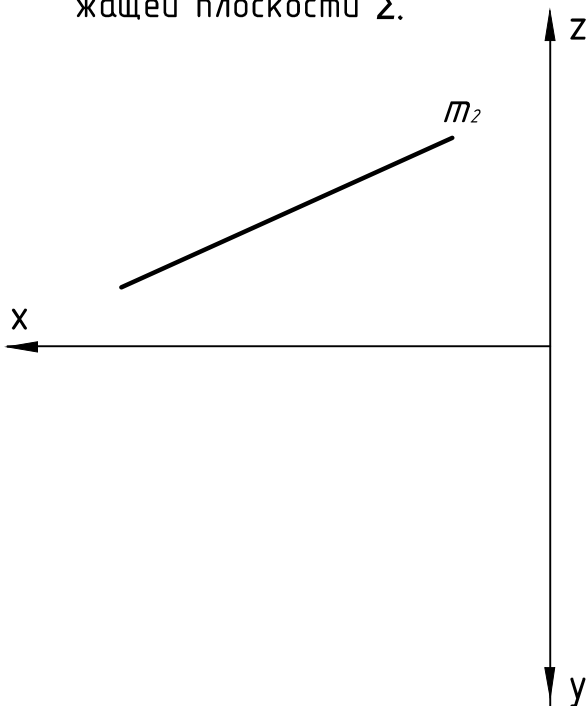
Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой линии, принадлежащей плоскости. Прямая принадлежит плоскости, если имеет с этой плоскостью две общие точки. Прямая принадлежит плоскости, если имеет с этой плоскостью общую точку и параллельна какой либо прямой, принадлежащей этой плоскости.

Пример. По заданным проекциям точек M и N построить отрезок $[MN]$, принадлежащий плоскости $\Gamma(AB \cap BC)$.

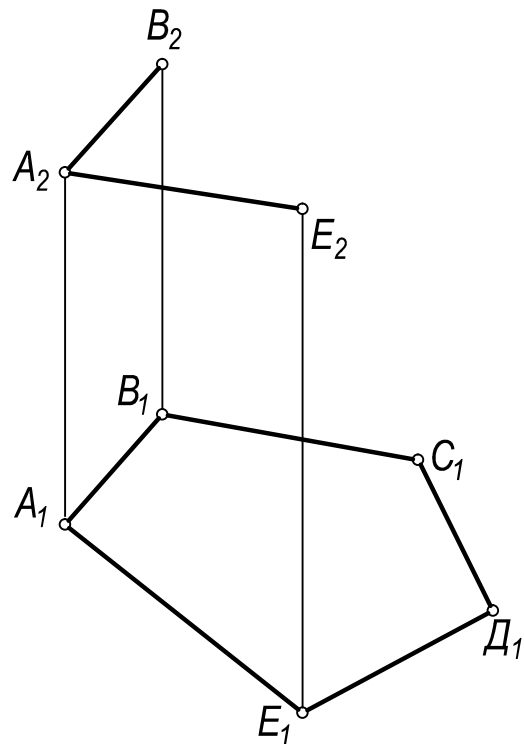


Решение: Через заданную проекцию точки M проводим фронтальную проекцию прямой m так, чтобы она принадлежала плоскости Γ . Прямая m принадлежит плоскости Γ , так как она имеет с ней общую точку 1 и параллельна отрезку AB . Горизонтальную проекцию точки M найдем по принадлежности ее прямой m , горизонтальная проекция которой определяется по линии связи. Для нахождения фронтальной проекции точки N проведем прямую n через найденную ранее горизонтальную проекцию точки M и заданную проекцию точки N до пересечения с отрезком BC . Фронтальная проекция прямой n определяется по проекциям двух принадлежащих ей точек M и 2 . Фронтальную проекцию точки N найдем по линии связи по принадлежности прямой n .

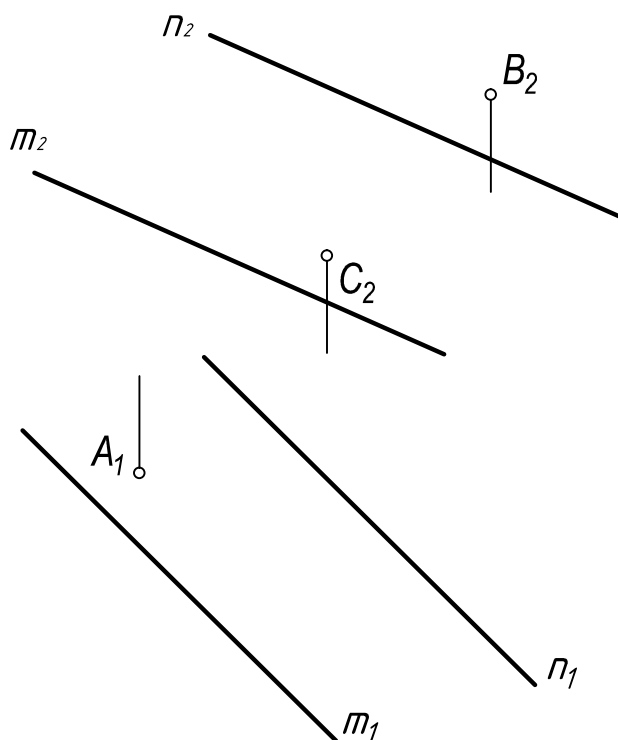
12. Построить плоскость Σ , заданную точками $A(50,35,20)$, $B(30,15,40)$, $C(10,30,0)$. Построить горизонтальную проекцию прямой m , принадлежащей плоскости Σ .



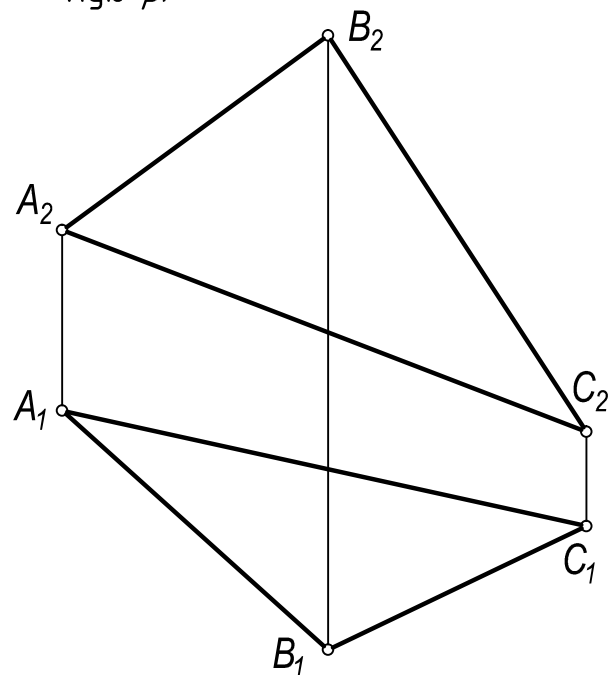
13. Достроить фронтальную проекцию плоского пятиугольника $ABCDE$



14. Достроить проекции треугольника ABC , принадлежащего плоскости $\Gamma(m \parallel n)$

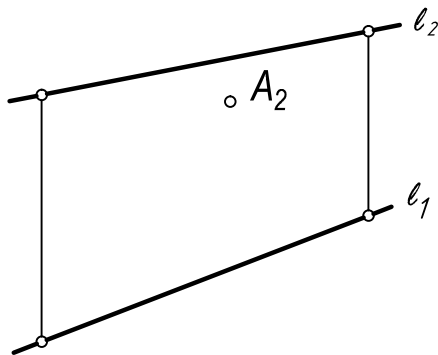
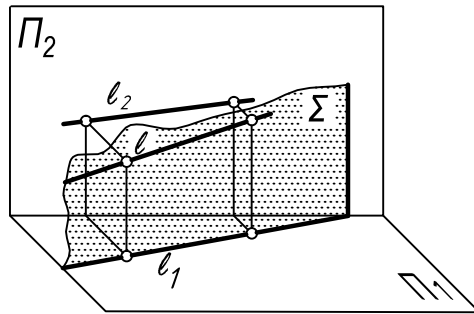


15. В плоскости $\Delta(ABC)$ построить произвольные горизонталь h , фронталь f , и профильную прямую p .

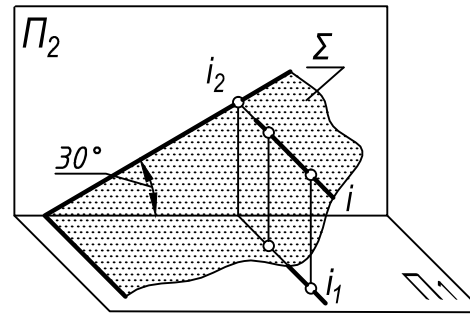


3.2. Плоскости частного положения (проецирующие и уровня)

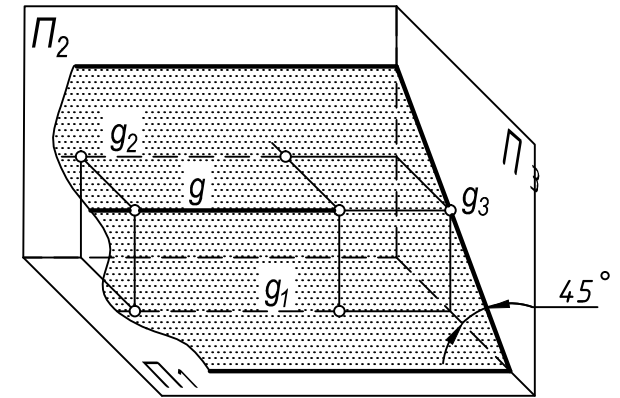
16. Через прямую ℓ провести горизонтально проецирующую плоскость Σ и построить недостающую проекцию точки A , принадлежащей плоскости Σ .



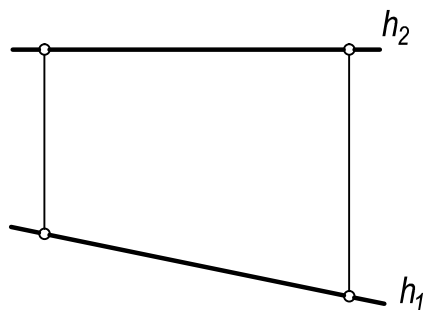
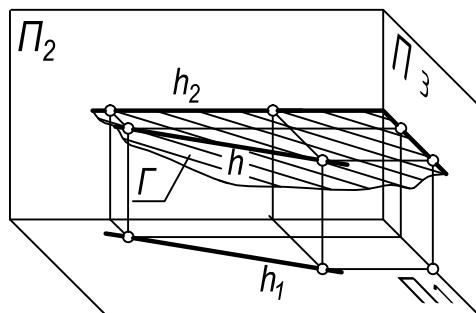
17. Через прямую i провести фронтально проецирующую плоскость Γ , расположенную под углом 30° к плоскости Π_1 .



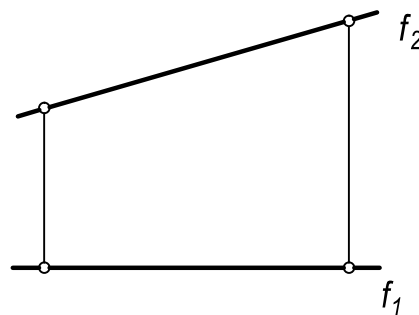
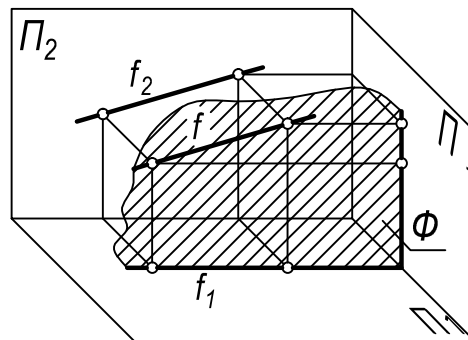
18. Через прямую g провести профильно проецирующую плоскость Φ , расположенную под углом 45° к плоскости Π_1 .



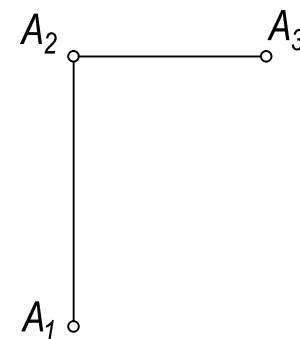
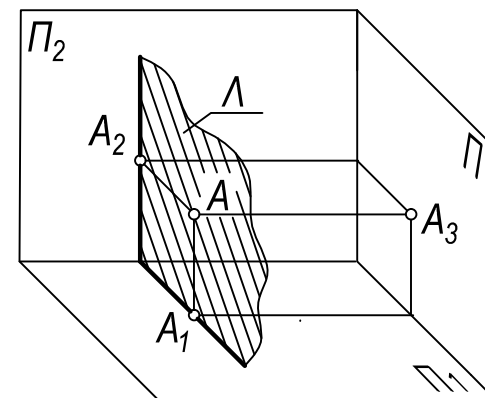
19. Через прямую h провести горизонтальную плоскость уровня Γ .



20. Через прямую f провести фронтальную плоскость уровня Φ .



21. Через точку A провести профильную плоскость уровня Λ .

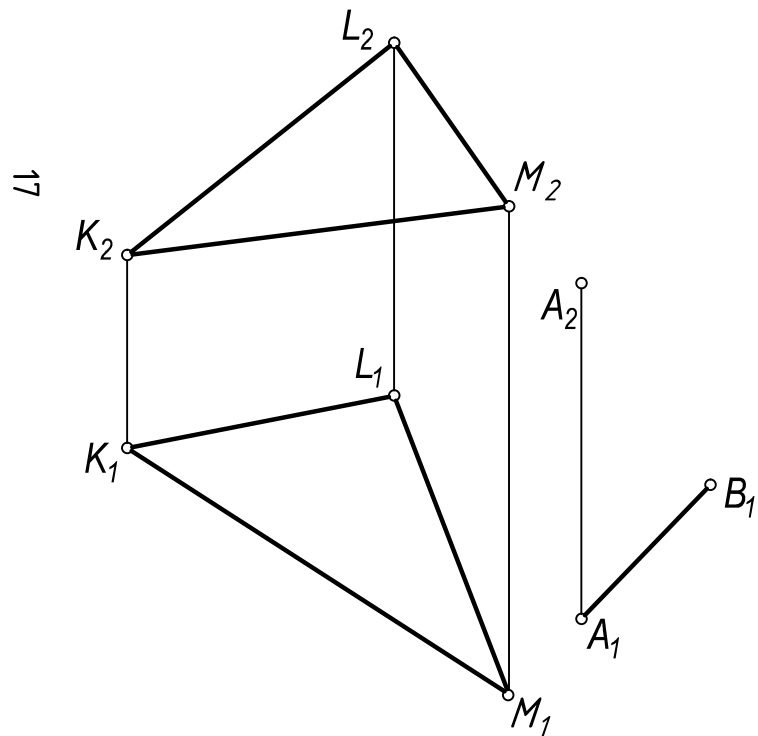


3.3. Параллельность прямой и плоскости, двух плоскостей

Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, принадлежащей данной плоскости, то она параллельна самой плоскости.

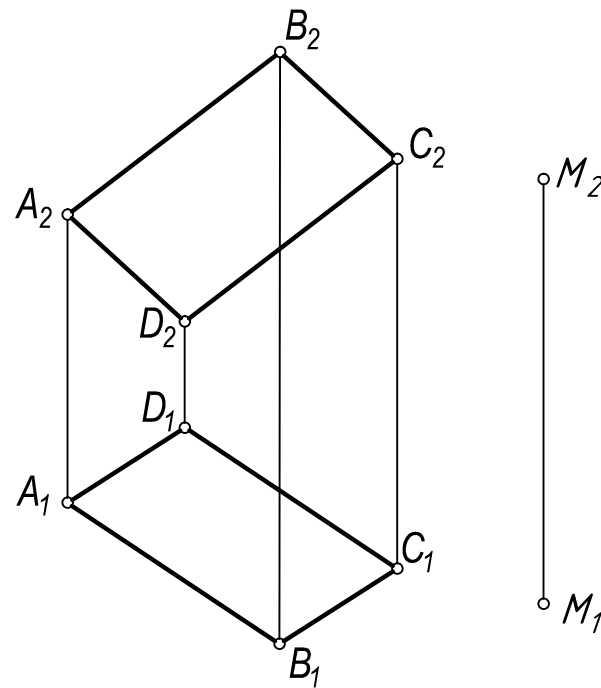
Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

22. Построить фронтальную проекцию отрезка $|AB|$ прямой, параллельной плоскости $\Delta(KLM)$.

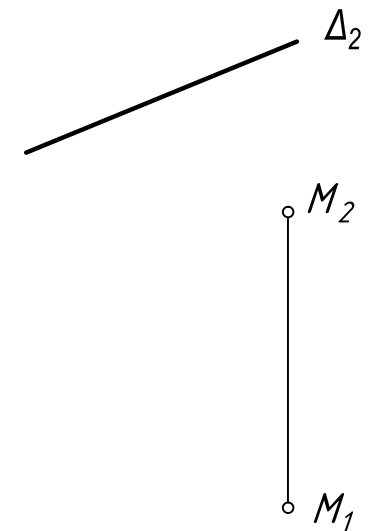


23. Через точку M провести плоскость, параллельно заданной плоскости.

а)



б)



3.4. Взаимно перпендикулярные прямые и плоскости

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, принадлежащим этой плоскости.

Прямая, перпендикулярная плоскости, перпендикулярна любой прямой, принадлежащей этой плоскости.

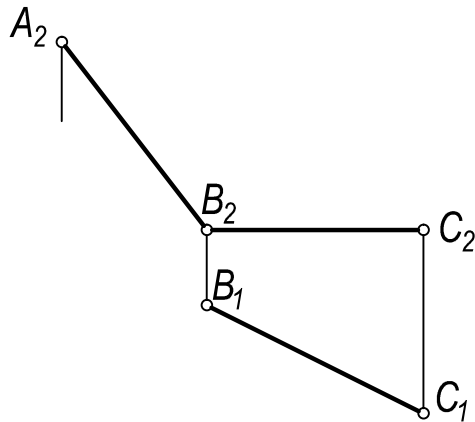
Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой плоскости.

Признаки перпендикулярности прямых и плоскостей на комплексном чертеже дополнены следующими теоремами:

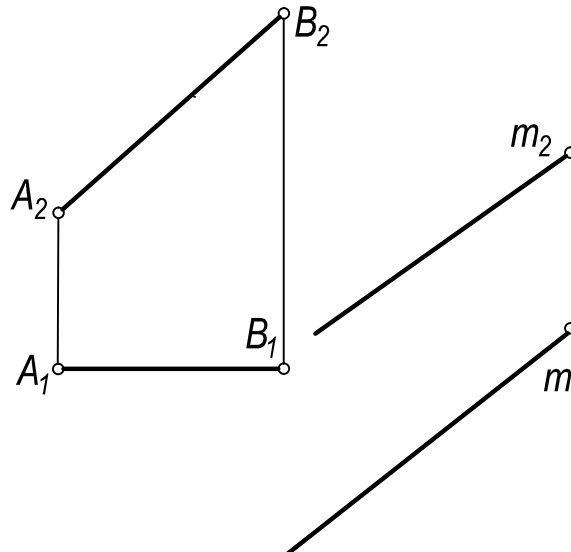
Теорема 1. Если одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, а другая является прямой общего положения, то прямой угол проецируется на эту плоскость без искажения, т.е. в прямой угол.

Теорема 2. Если прямая перпендикулярна плоскости в пространстве, то на комплексном чертеже горизонтальная проекция прямой перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали, а фронтальная проекция перпендикулярна фронтальной проекции фронтали, принадлежащей плоскости.

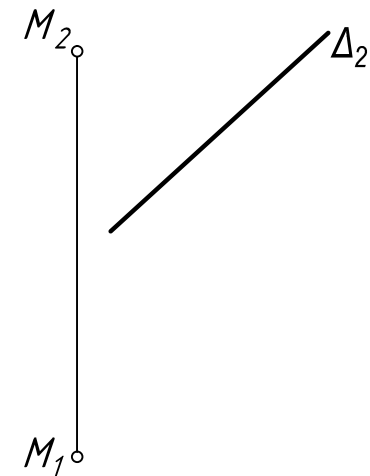
24. Построить прямоугольник $ABCD$.



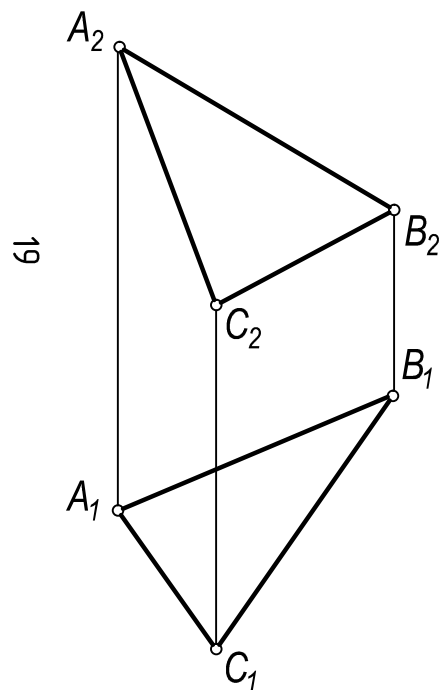
25. Построить равнобедренный треугольник ABC с основанием AB и вершиной C на прямой m .



26. Построить проекции точки M' , симметричной точке M относительно плоскости Δ .

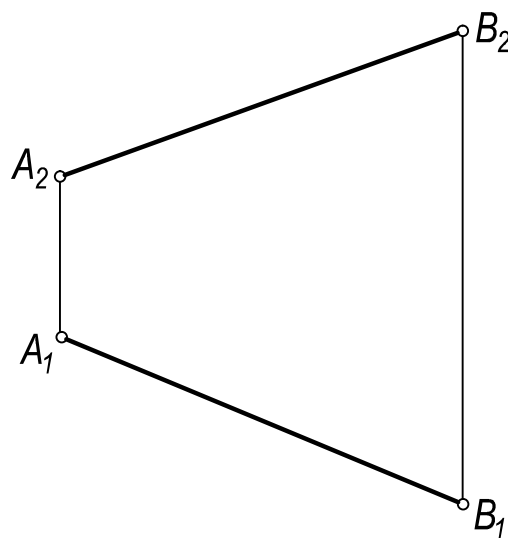
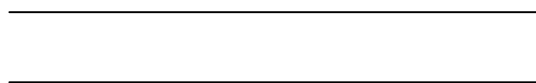


27. Из вершины B треугольника ABC восстановить перпендикуляр к его плоскости и отложить на нем отрезок длиной 30 мм.

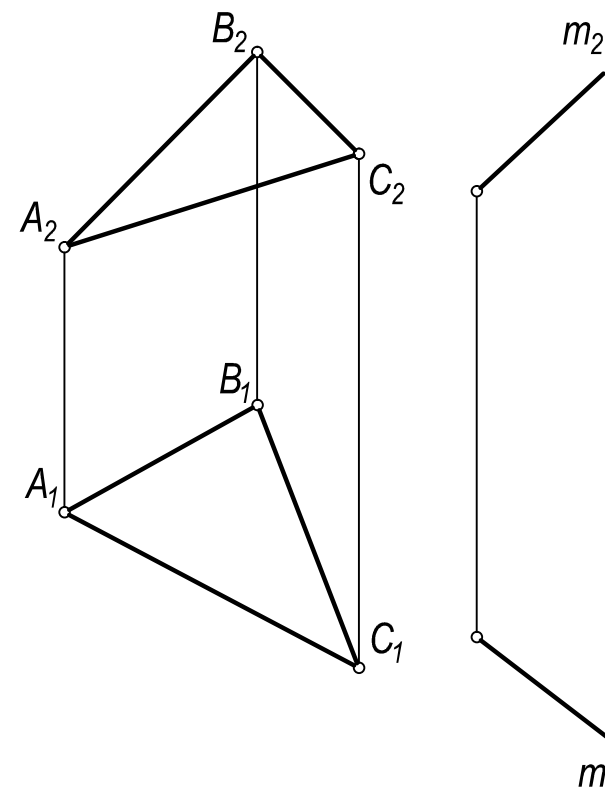


28. Построить множество точек, равноудаленных от концов отрезка $|AB|$.

Записать анализ:



29. Через прямую l провести плоскость, перпендикулярную плоскости $\Gamma(ABC)$ общего положения.

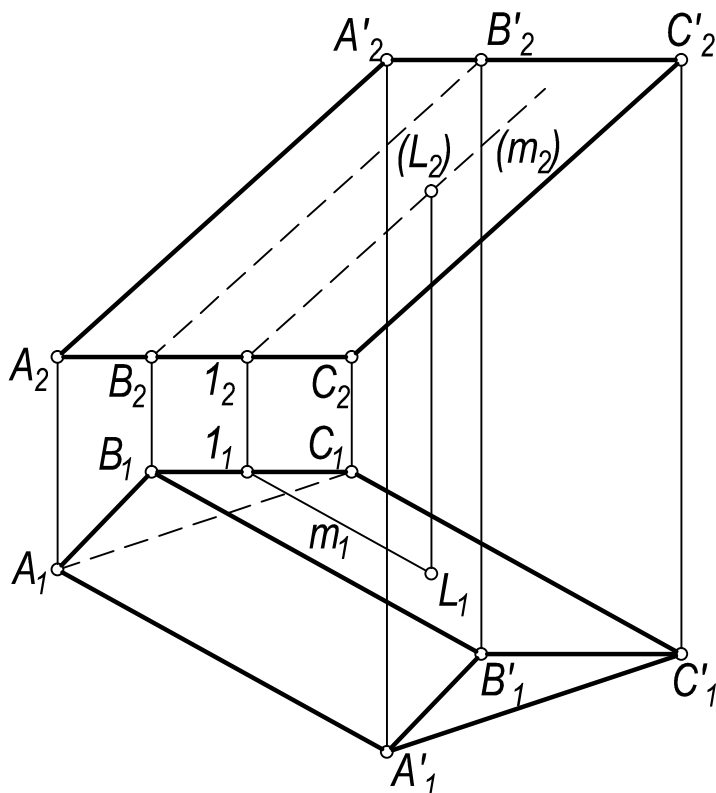
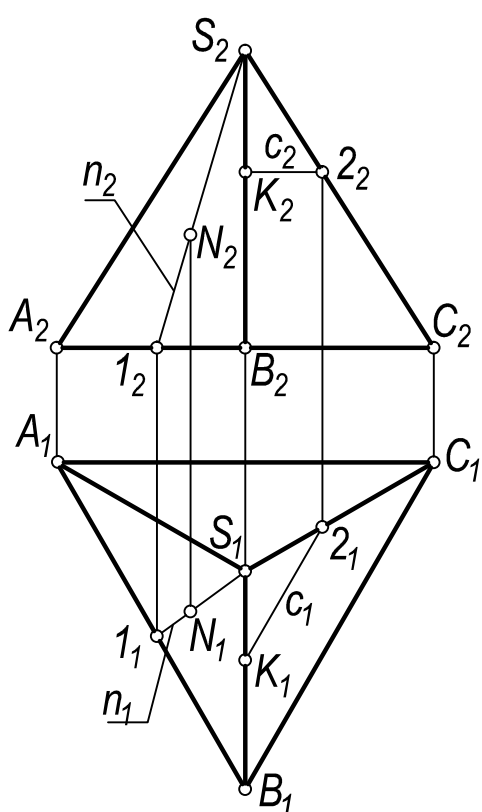


4. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧЕРТЕЖИ ГРАННЫХ И КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ. ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ЛИНИИ И ТОЧКИ ПОВЕРХНОСТИ.

4.1. Многогранники

Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит линии, принадлежащей данной поверхности.

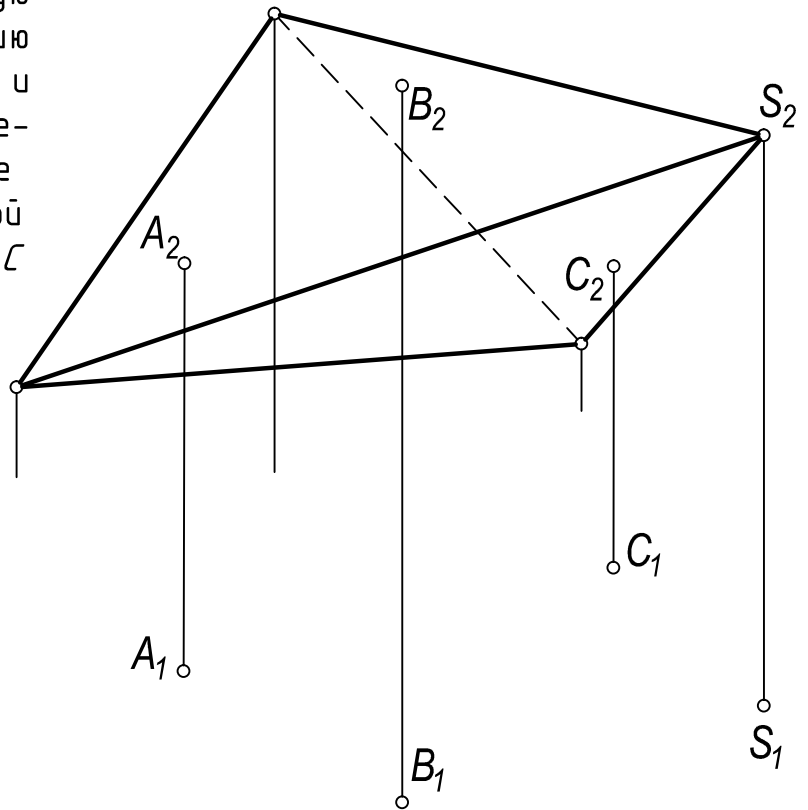
Пример. На поверхности многогранника задать произвольную точку.



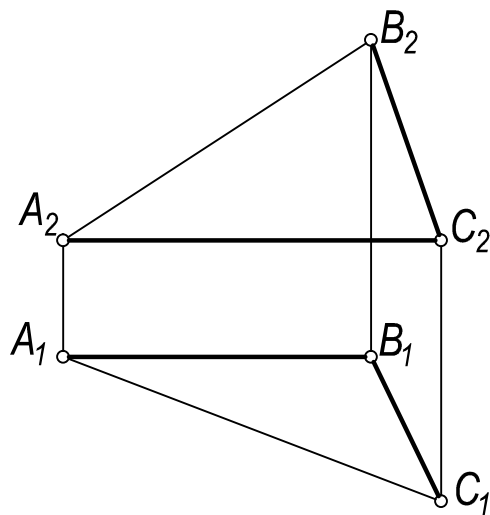
На грани ABS пирамиды задана точка N . Через точку N проходит прямая n , которая принадлежит поверхности пирамиды, т.к. имеет с ней две общие точки. На ребре SB пирамиды задана точка K , через которую проходит прямая c , принадлежащая грани BSC . Прямая c принадлежит грани, т.к. она проходит через точку K параллельно ребру BC .

На поверхности призмы на грани $BCB'C'$ задана точка L . Точка L принадлежит прямой m , принадлежащей поверхности призмы. Прямая m принадлежит поверхности призмы, т.к. она проходит через точку 1 , принадлежащую призме и параллельна ребрам призмы. Грань $BCB'C'$ на Π_2 невидима.

30. Построить недостающую горизонтальную проекцию треугольной пирамиды и определить видимость ребер, если известны четыре (видимые во фронтальной проекции) точки S , A , B , C её поверхности.



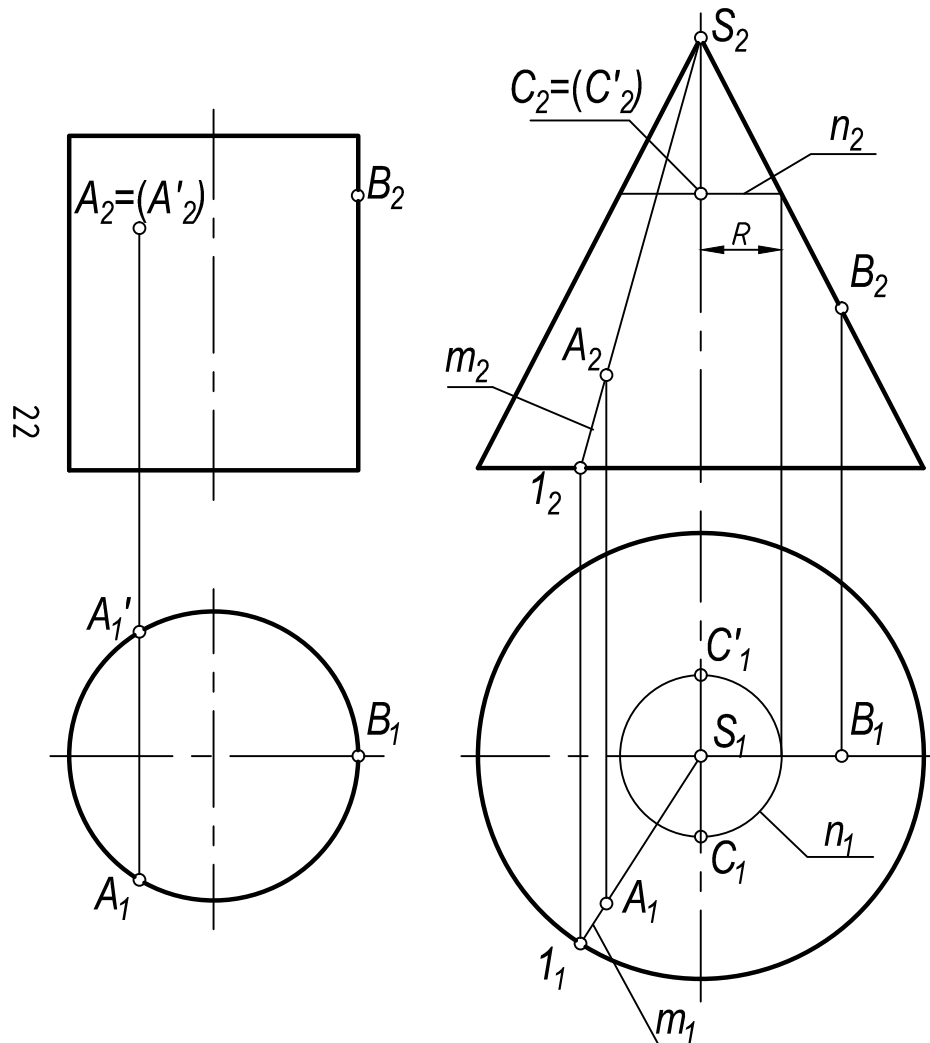
31. Построить проекции прямой треугольной призмы, нижнее основание которой, треугольник ABC – плоскость общего положения. Высота призмы равна стороне AC треугольника ABC . Определить видимость ребер.



4.2. Поверхности вращения

Линейчатые поверхности (цилиндр и конус)

Пример. На поверхности вращения построить проекции точек.



Ось цилиндра является горизонтально проецирующей прямой и горизонтальная проекция его поверхности-окружность. Горизонтальная проекция любой точки, принадлежащей поверхности цилиндра, принадлежит этой окружности. Проекции точек, принадлежащих видимой части поверхности цилиндра видимы.

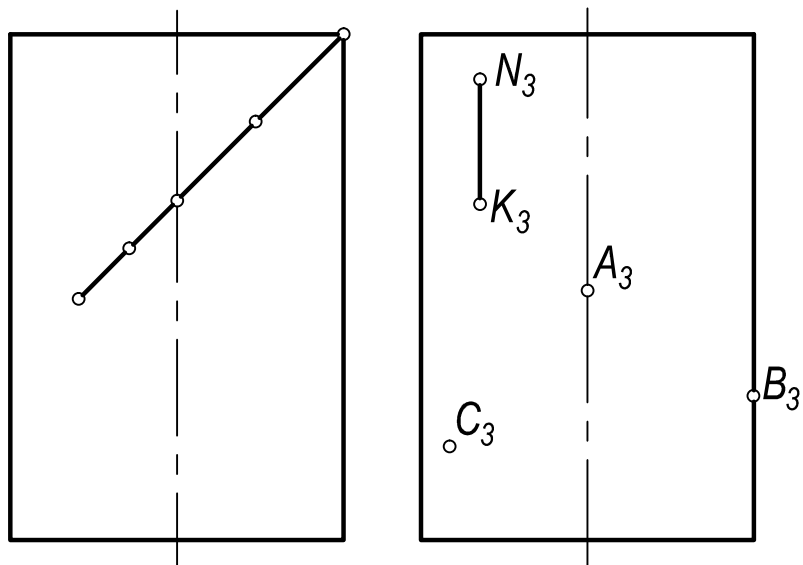
Проекции точек, заданных на поверхности конуса, определяем по принадлежности образующим или окружностям.

Точка A принадлежит образующей $m(S-1)$. Точка B принадлежит очерковой образующей, проекция которой на Π_1 совпадает с проекцией оси. Точки C и C' принадлежат окружности n радиуса R .

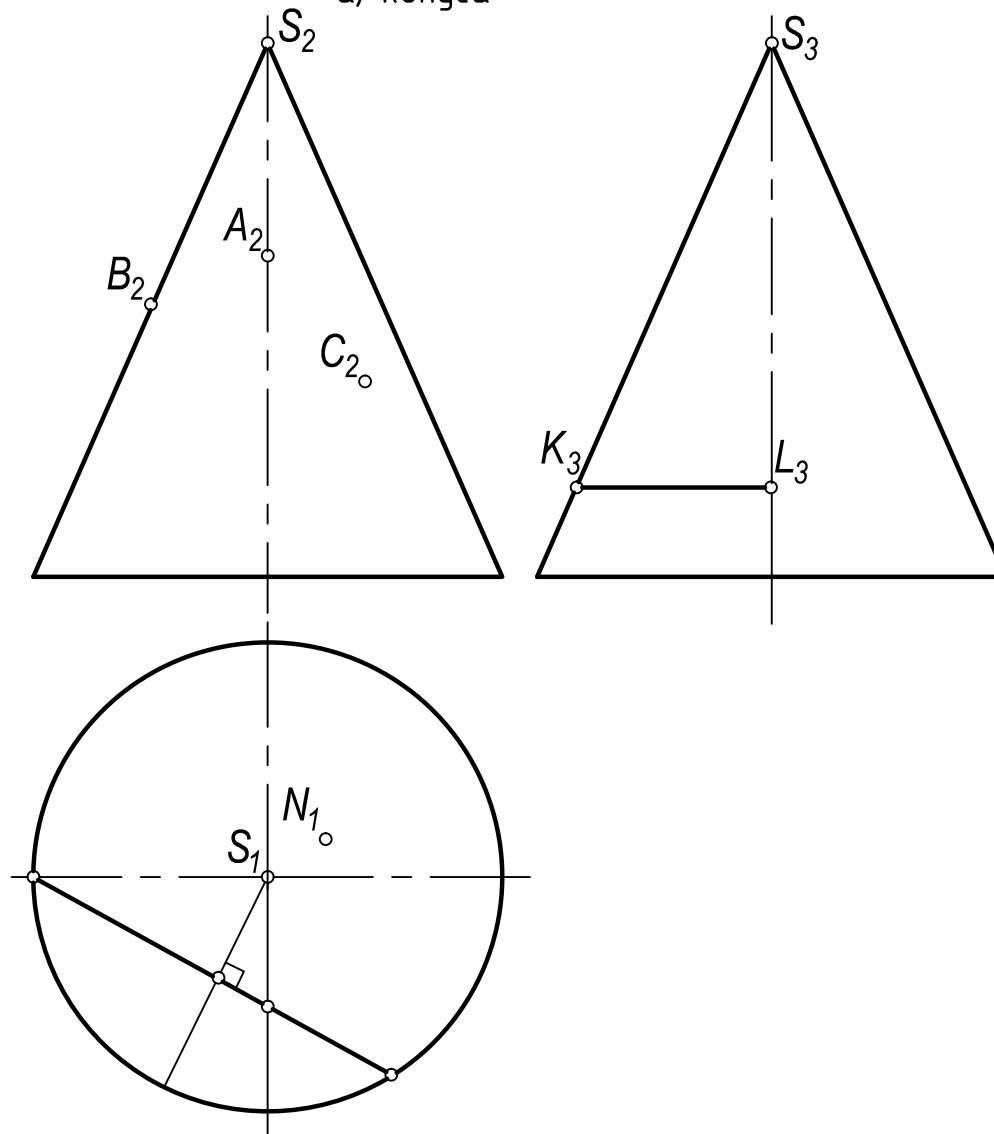
Проекции точек, принадлежащих видимой части поверхности конуса видимы.

32. Построить недостающие проекции видимых точек и линий, принадлежащих данным поверхностям.

а) цилиндра

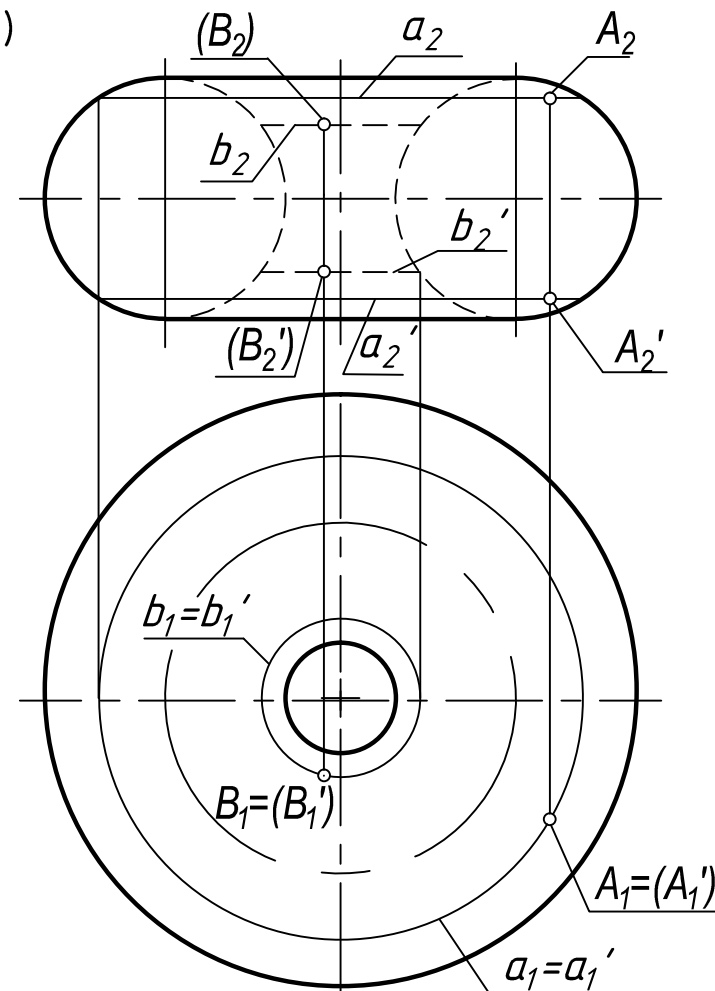
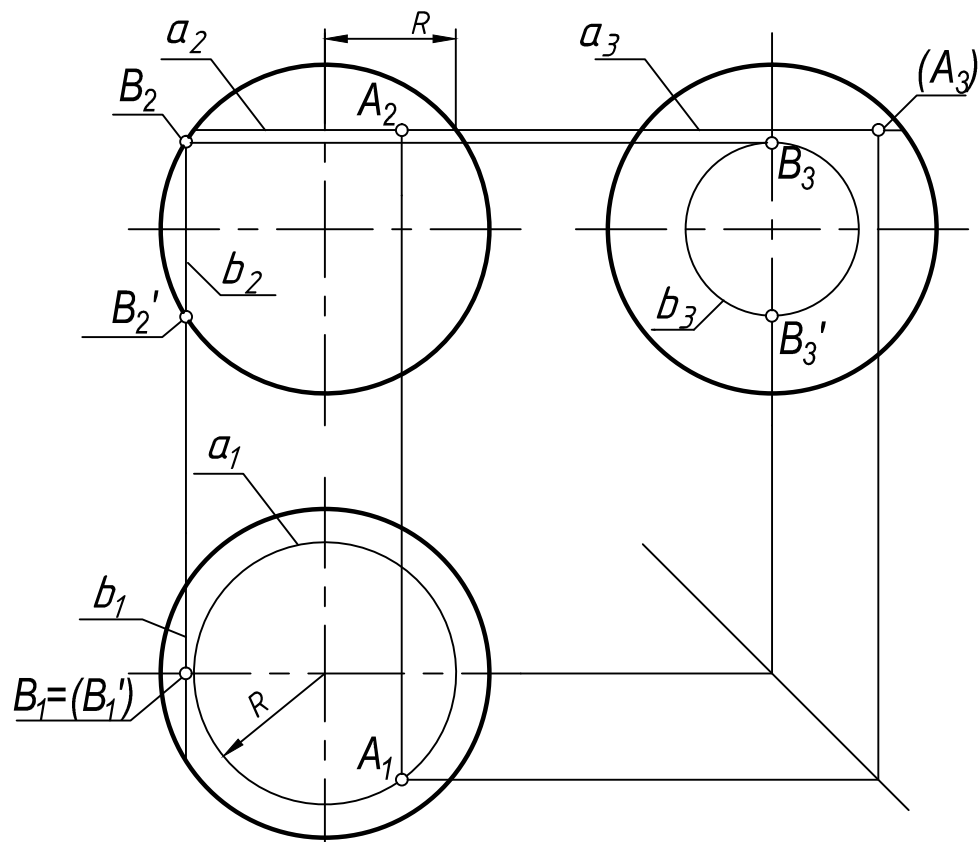


а) конуса



Нелинейчатые поверхности (сфера и тор)

Пример. На поверхности вращения построить проекции точек.

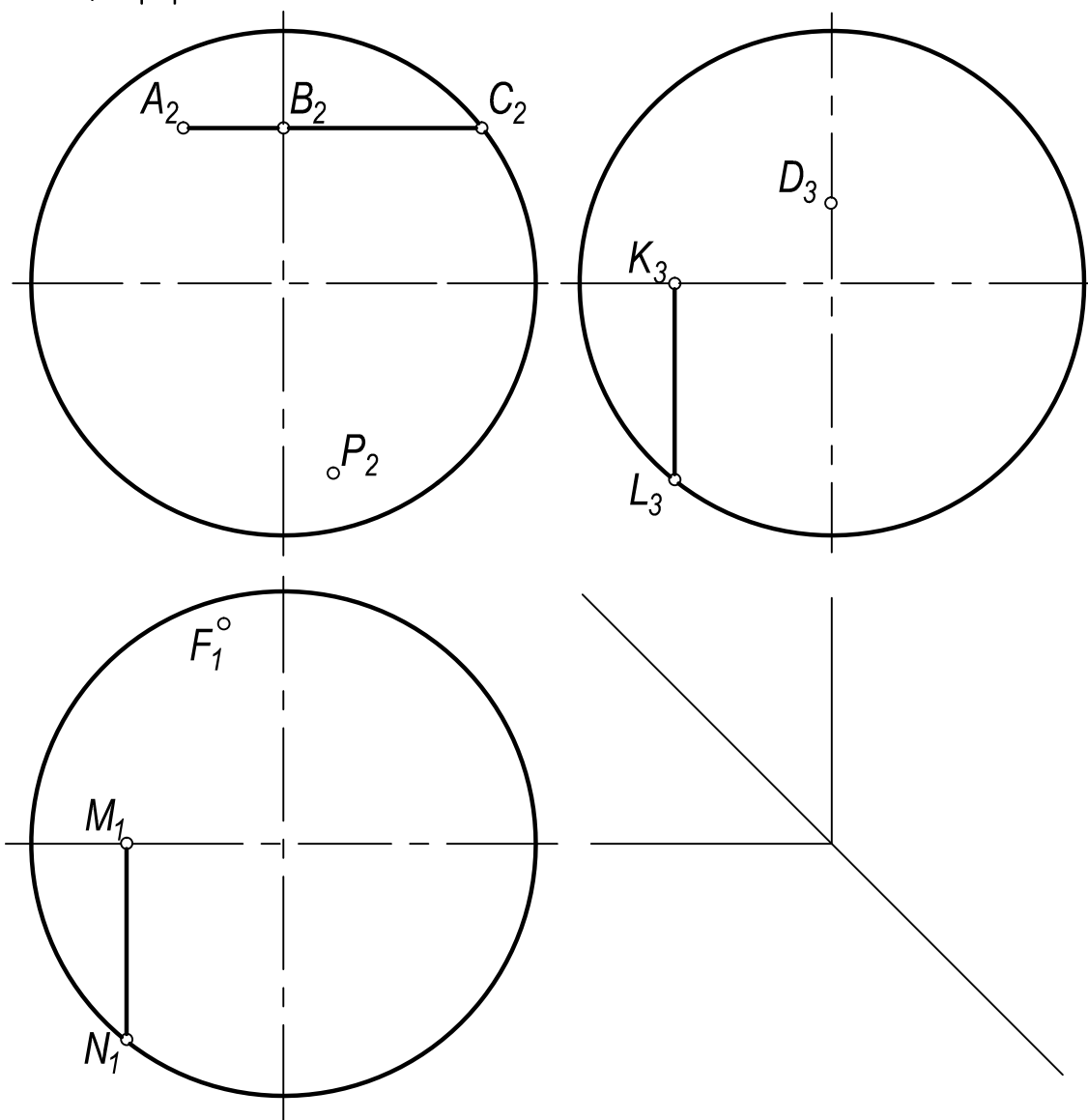


Проекции точек, заданных на поверхностях сферы и тора определяем при помощи окружностей (параллелей), которым принадлежат точки. Например, точка A на сфере принадлежит окружности a радиуса R . Окружность a параллельна плоскости Π_1 .

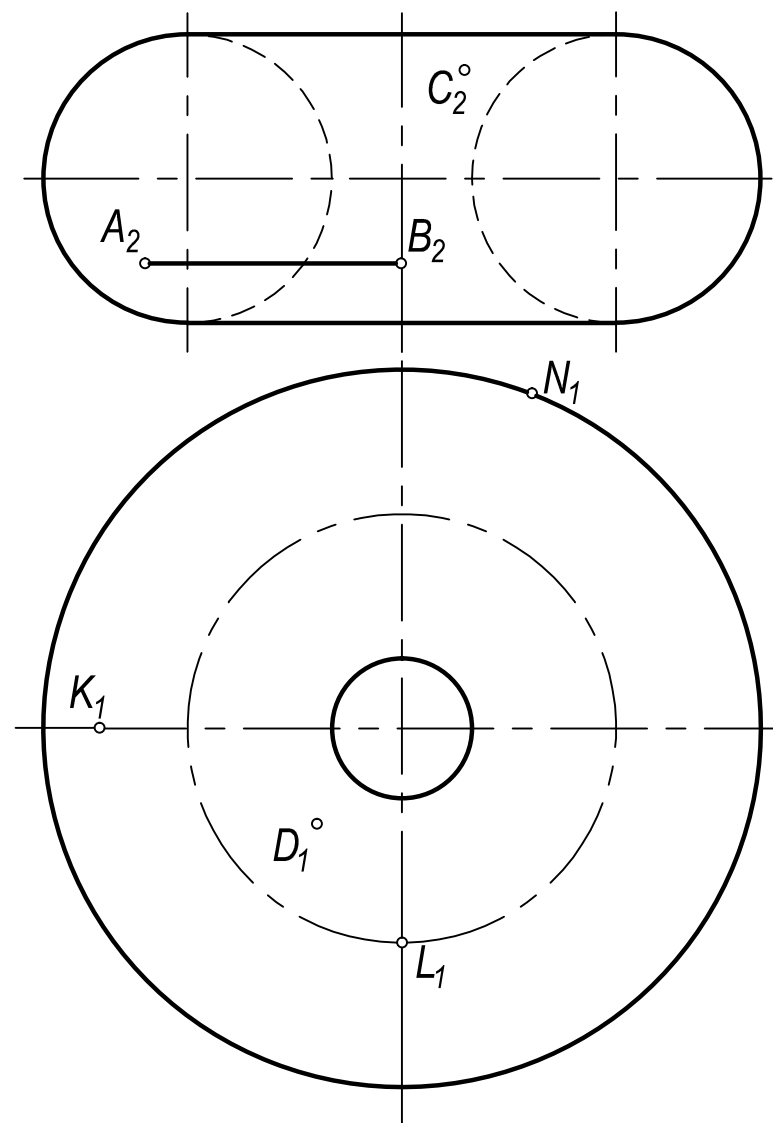
На поверхности тора можно выделить два семейства окружностей. Например, точки A и A' принадлежат окружностям a и a' соответственно, радиус которых измеряется от оси до очерка внешней поверхности. Точки B и B' принадлежат окружностям b и b' , радиус которых измеряется от оси до очерка внутренней поверхности тора. Проекции точек, принадлежащих видимой части поверхности видимы.

33. Построить недостающие проекции видимых точек и линий, принадлежащих данным поверхностям.

а) сферы

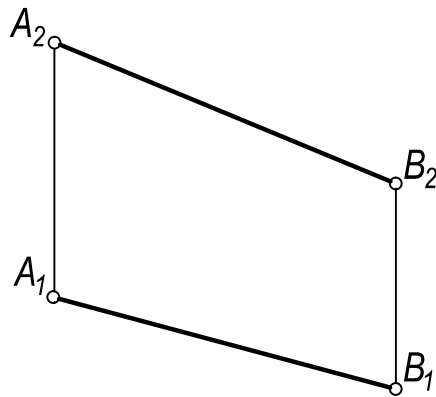


б) тора

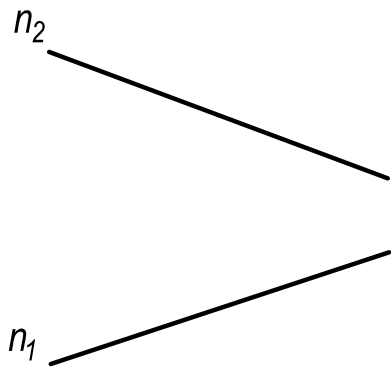


5. СПОСОБ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА. СПОСОБ ЗАМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

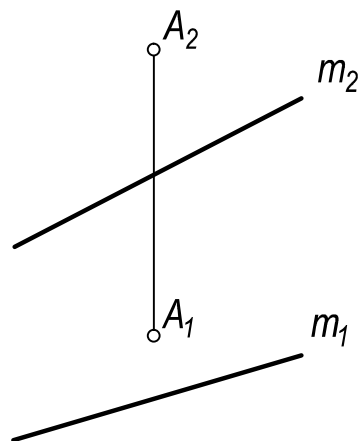
34. Определить истинную величину отрезка $[AB]$ и углы наклона его к плоскостям проекций Π_1 и Π_2 .



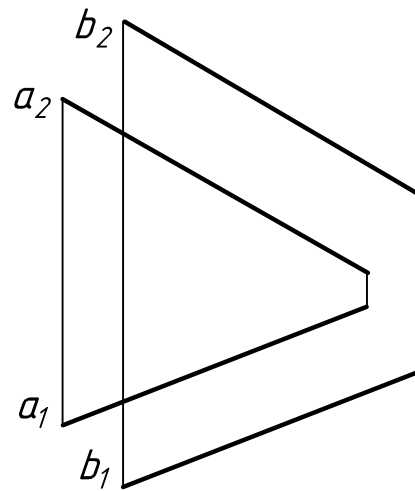
35. Преобразовать прямую l общего положения в проецирующую.



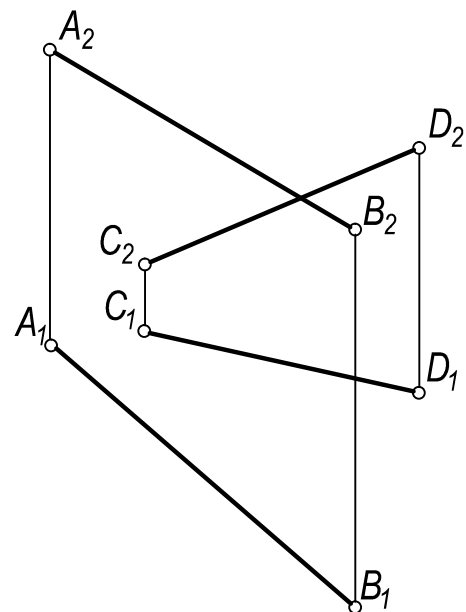
36. Построить проекции и определить длину перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую m общего положения.



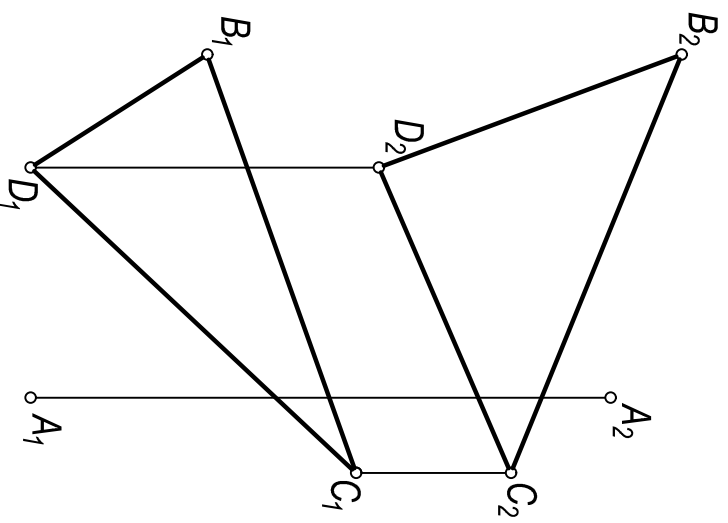
37. Определить расстояние $|MM|$ между параллельными прямыми a и b . Построить проекции отрезка $[MM]$ в системе Π_2/Π_1 .



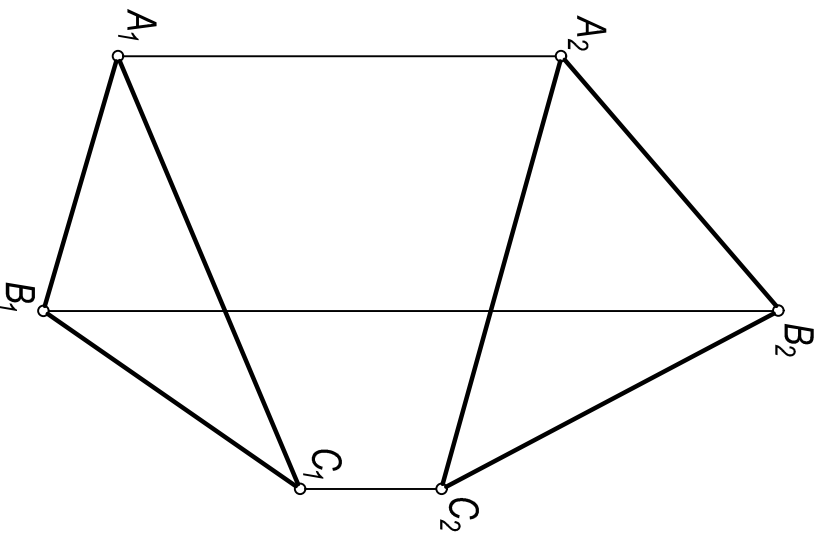
38. Определить кратчайшее расстояние $|KL|$ между скрещивающимися прямыми AB и CD . Построить проекции отрезка $[KL]$ в системе Π_2/Π_1 .

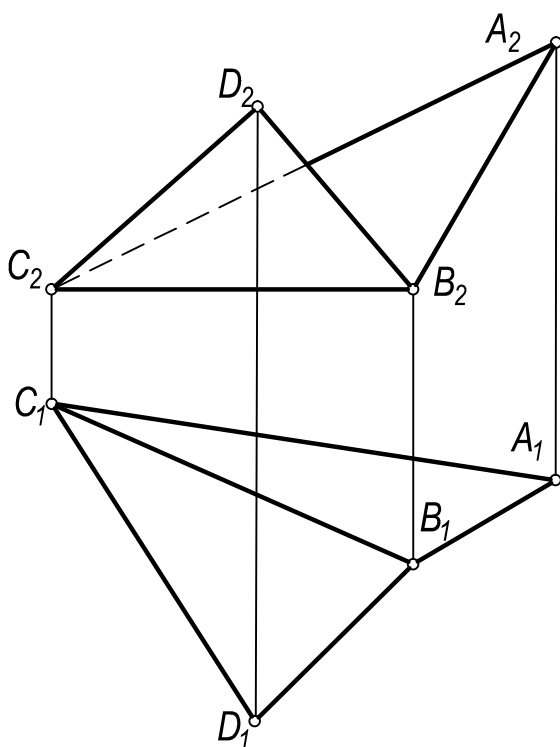


39. Определить расстояние $|AK|$ от точки A до плоскости треугольника BCD . Построить проекции отрезка $[AK]$ в системе Π_2/Π_1 .

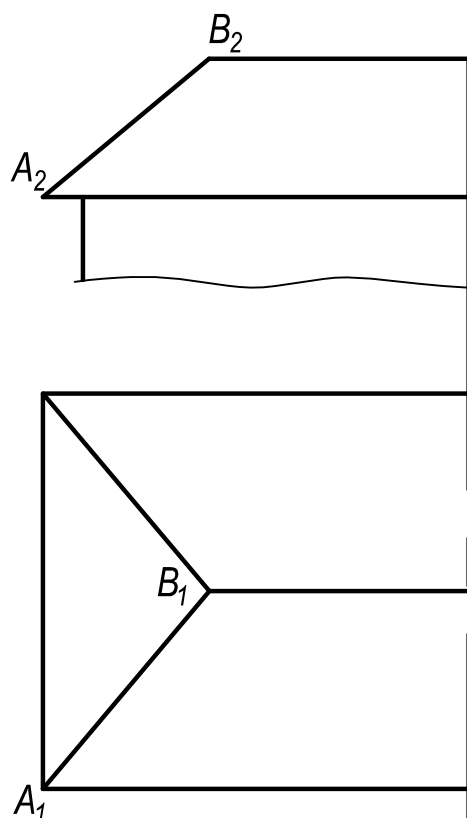


40. Построить проекции центра окружности, проходящей через вершины A, B и C данного треугольника ABC .





41. Построить множество точек, равноудаленных от сторон двугранного угла, образованного плоскостями $\Gamma(ABC)$ и $\Delta(BCD)$.



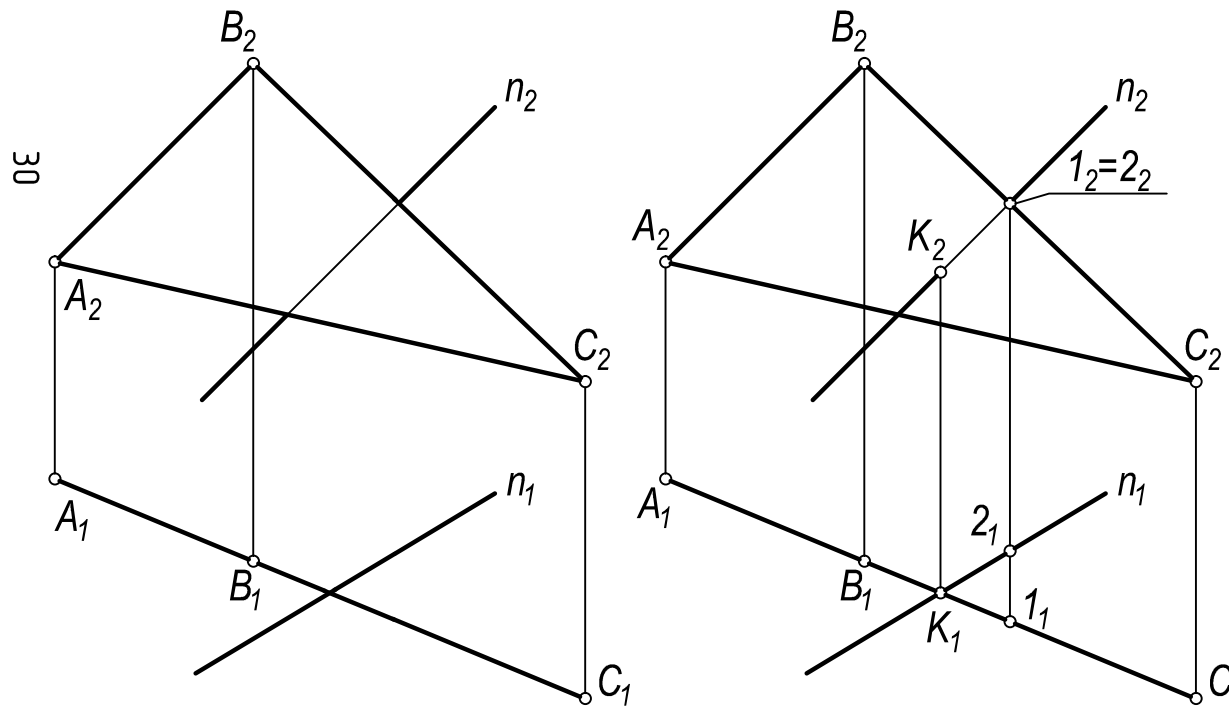
42. Определить величину двугранного угла при ребре AB , образованного скатами кровли.

6. Позиционные задачи.

6.1 Определение общих элементов геометрических фигур из условия принадлежности

Для построения линии пересечения двух геометрических фигур, одна из которых является проецирующей, следует определять недостающую проекцию искомого элемента из условия принадлежности. При пересечении геометрических фигур с проецирующей плоскостью одна из проекций их искомого общего элемента совпадает с проекцией проецирующей плоскости (которая вырождается в прямую линию). Поэтому решение задач такого типа сводится к построению второй проекции искомой геометрической фигуры.

Пример. Построить точку K пересечения плоскости $\Gamma(ABC)$ и прямой l . Определить видимость проекций прямой.

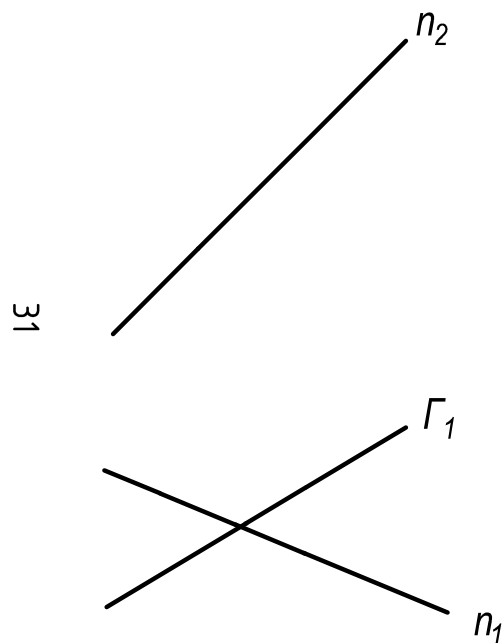


Прямая l пересекает плоскость Γ в точке K , горизонтальная проекция которой определяется как пересечение горизонтальных проекций проецирующей плоскости Γ и прямой общего положения l . Фронтальную проекцию точки K определим по линии связи по принадлежности прямой l .

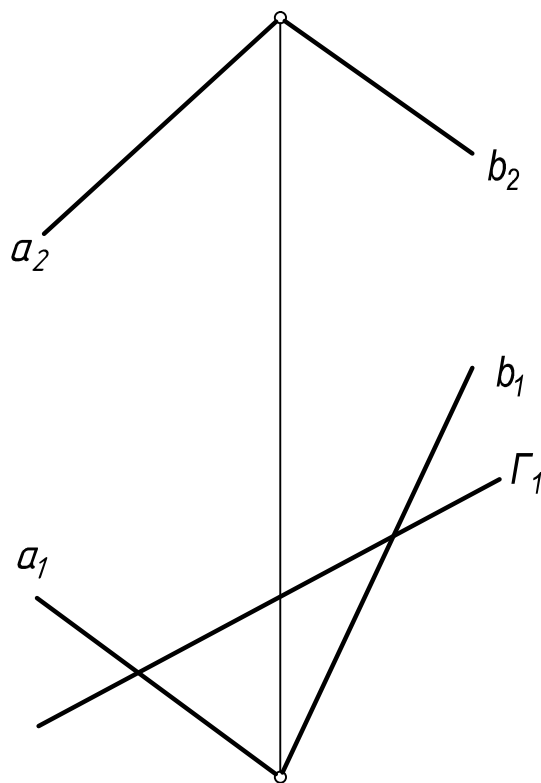
Видимость на Π_2 определяется с помощью фронтально конкурирующих точек 1 и 2.

На фронтальной проекции видима точка 1, принадлежащая отрезку BC . Участок прямой $K-2$ находится за плоскостью Γ , поэтому на фронтальной проекции невиден.

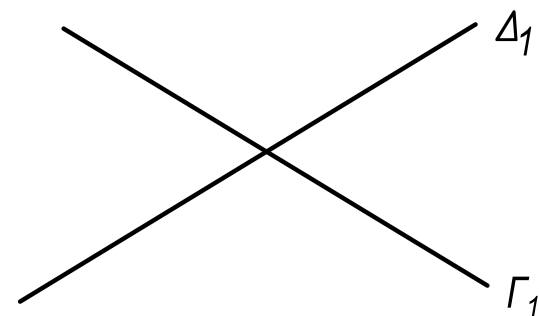
43. Построить точку K пересечения прямой l с горизонтально проецирующей плоскостью Γ .



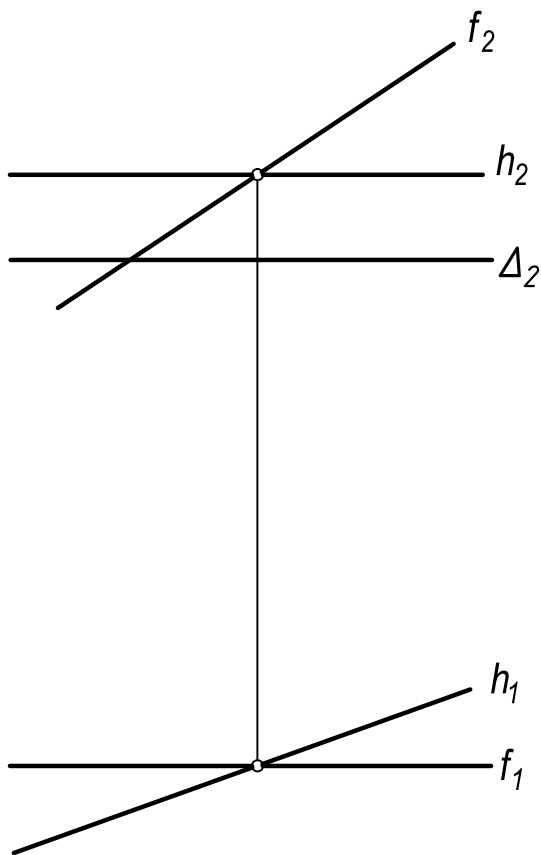
44. Построить прямую k пересечения горизонтально проецирующей плоскости Γ и плоскости $\Sigma(a \cap b)$ общего положения.



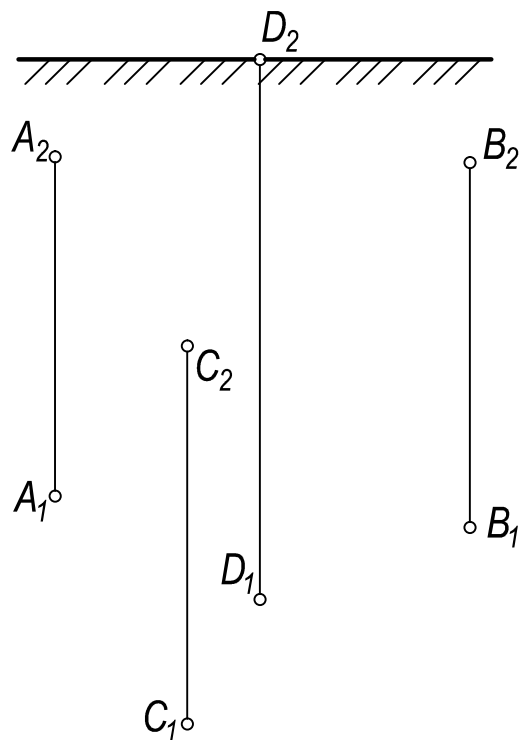
45. Построить линию l пересечения двух горизонтально проецирующих плоскостей Γ и Δ .



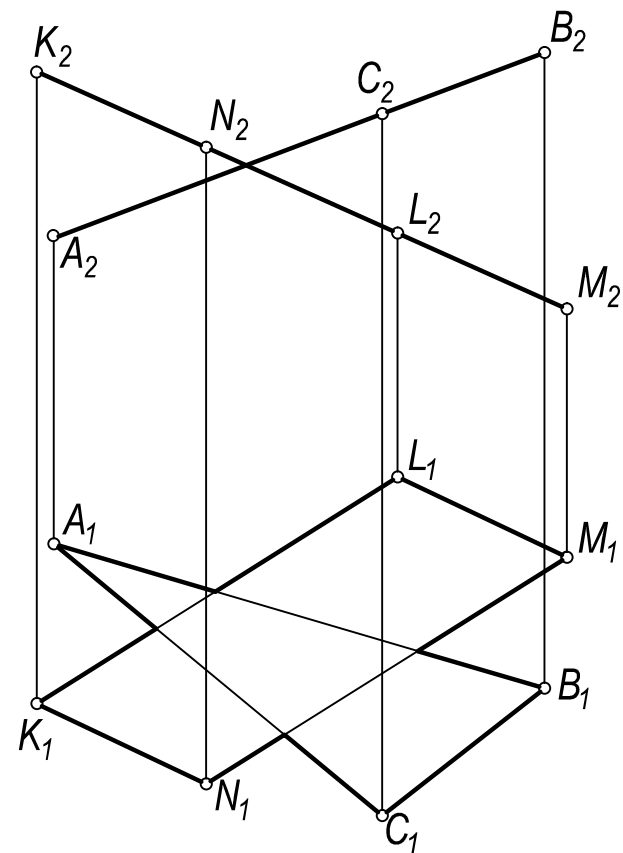
46. Построить линию k пересечения плоскости $\Gamma(h \cap f)$ с горизонтальной плоскостью уровня Δ .



47. Определить глубину бурения из точки D поверхности земли до пласта, плоскость которого определяется точками A, B, C .



48. Построить линию l пересечения двух фронтально проецирующих плоскостей $\Gamma(ABC)$ и $\Delta(KLMN)$. Определить видимость.



6.2 Первая позиционная задача. Пересечение прямой с плоскостью

Точку K пересечения прямой ℓ с плоскостью Γ (рис.5) определяем по следующей схеме:

- 1) Через заданную прямую проводим вспомогательную плоскость Σ , обычно проецирующую
 $\Sigma \supset \ell$;
- 2) Определяем линию пересечения n вспомогательной плоскости Σ с заданной плоскостью Γ
 $n = \Sigma \cap \Gamma$;
- 3) Отмечаем искомую точку K на пересечении полученной линии n с заданной прямой ℓ
 $K = n \cap \ell$.

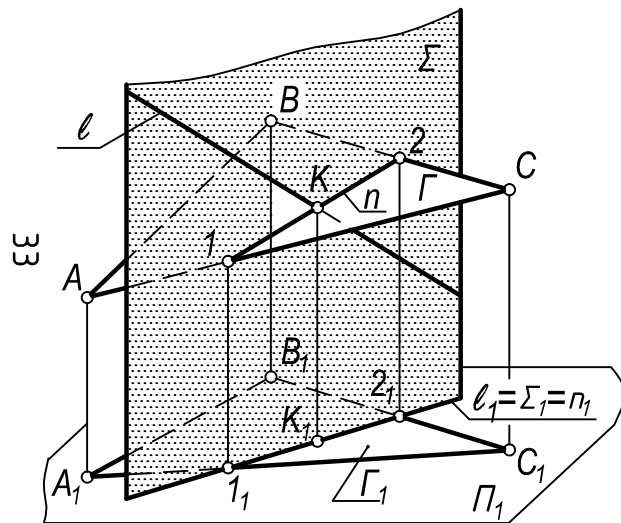


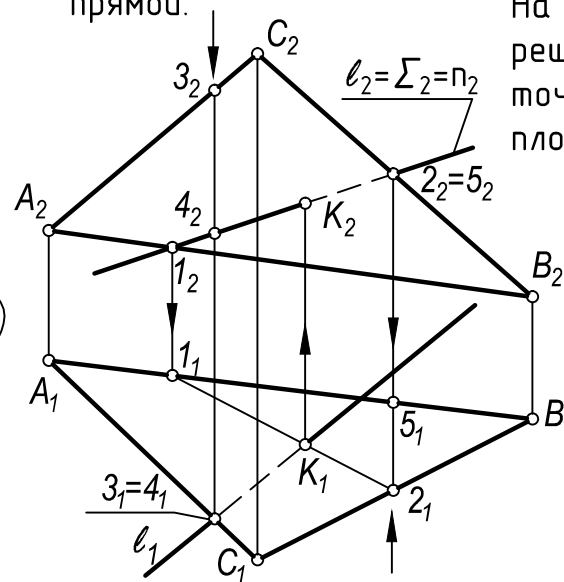
рис.5

Пример. Построить точку K пересечения прямой ℓ общего положения с плоскостью общего положения $\Gamma(ABC)$. Определить видимость проекций прямой.

На основании общей схемы составляем алгоритм решения. Схема преобразуется в алгоритм, если точно указать положение вспомогательной плоскости.

Алгоритм решения задачи:

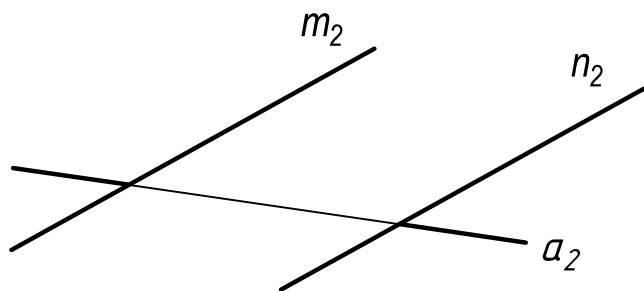
- 1) $\Sigma \supset \ell, \Sigma \perp \Pi_2$ - через прямую ℓ проводим фронтально проецирующую плоскость Σ .
- 2) $n(1-2) = \Sigma \cap \Gamma$ - определяем прямую пересечения плоскостей Γ и Σ .
- 3) $n(1-2) \cap \ell = K$ - отмечаем точку K пересечения прямых $n(1-2)$ и ℓ , которая является искомой.



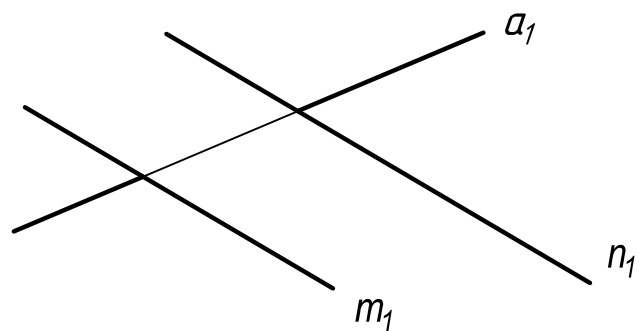
Считая, что заданная плоскость $\Gamma(ABC)$ непрозрачна,

определим видимость прямой относительно плоскостей проекций по горизонтально конкурирующим точкам 3 и 4 и фронтально конкурирующим точкам 2 и 5. Точка 3, принадлежащая стороне AC треугольника расположена над точкой 4, принадлежащей прямой ℓ , поэтому прямая слева от точки K находится под плоскостью $\Gamma(ABC)$ и невидима относительно Π_1 . Аналогично определена видимость прямой относительно Π_2 .

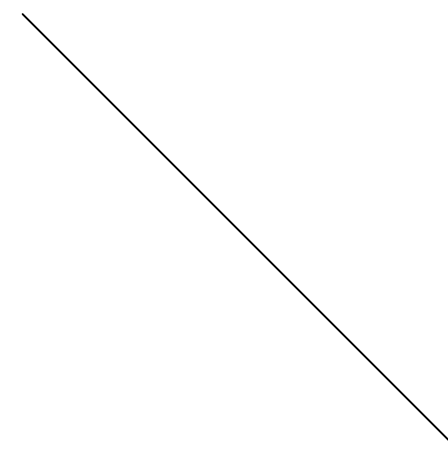
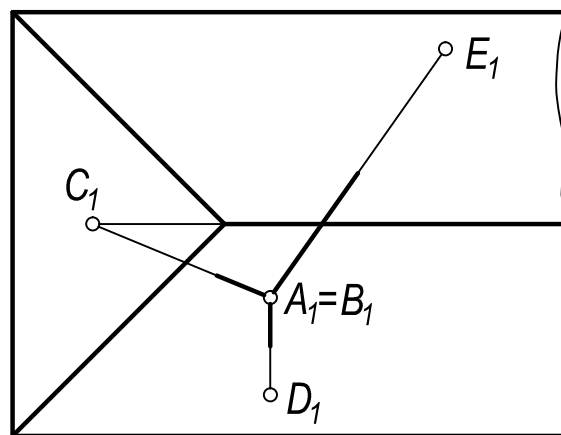
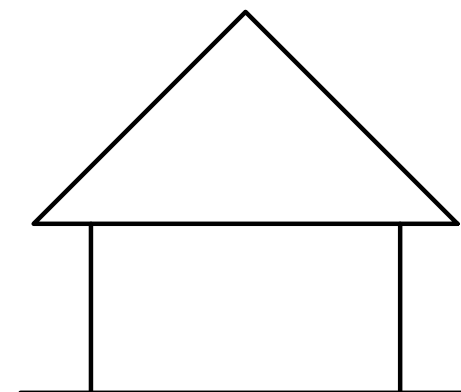
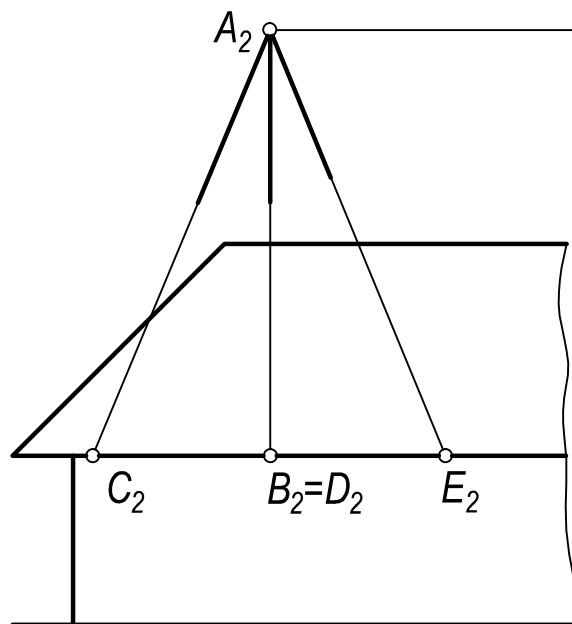
49. Построить точку K пересечения прямой a с плоскостью $\Gamma(m \parallel n)$. Записать алгоритм. Определить видимость проекций прямой.



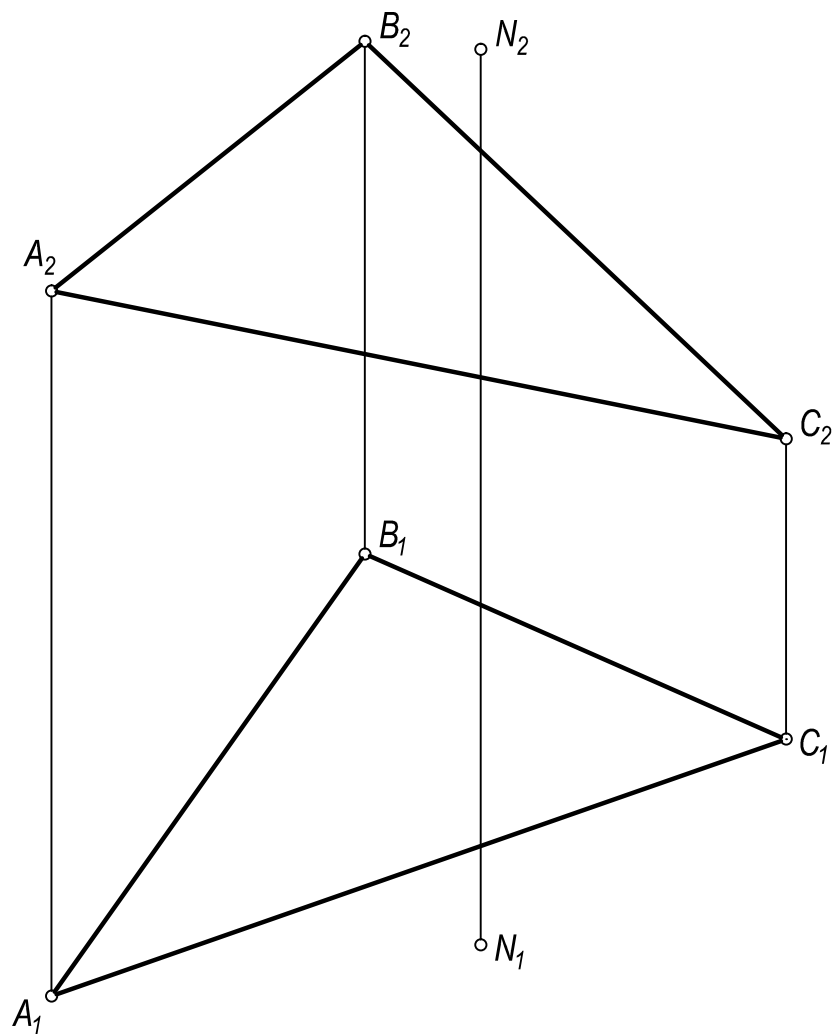
3/4



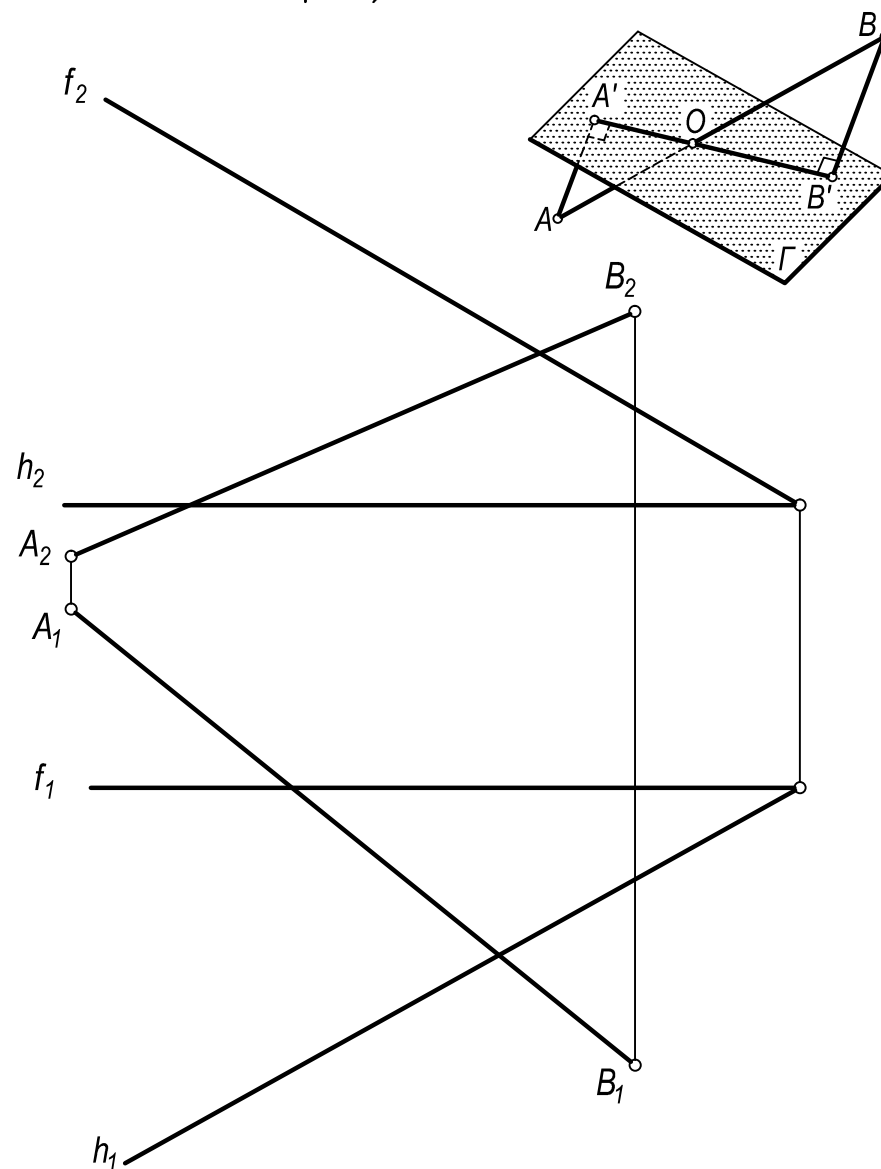
50. Определить точки пересечения мачты (AB) антенны и ее растяжек (AC) , (AD) и (AE) с кровлей.



51. Построить точку N' , симметричную точке N относительно плоскости $\Gamma(ABC)$ общего положения.



52. Построить ортогональную проекцию $A'B'$ отрезка AB на плоскости $\Gamma(h \cap f)$.



6.3 Вторая позиционная задача. Пересечение двух плоскостей

Общим элементом двух пересекающихся плоскостей $\Gamma(a \cap b)$ и $\Delta(m \parallel n)$ является прямая линия, которая определяется двумя точками. Каждую точку M линии пересечения определяем по следующей схеме:

1) вводим вспомогательную плоскость Σ (проецирующую или уровня), пересекающую обе заданные

$$\Sigma \cap \Gamma; \Sigma \cap \Delta$$

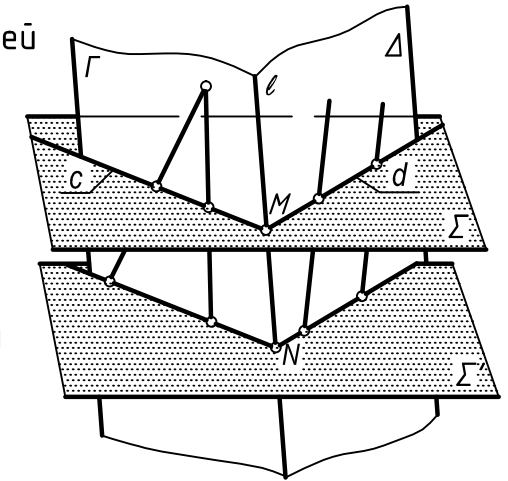
2) находим линии пересечения вспомогательной Σ с каждой из заданных плоскостей

$$c = \Sigma \cap \Gamma, d = \Sigma \cap \Delta$$

3) определяем точку M пересечения линий c и d , которая является искомой

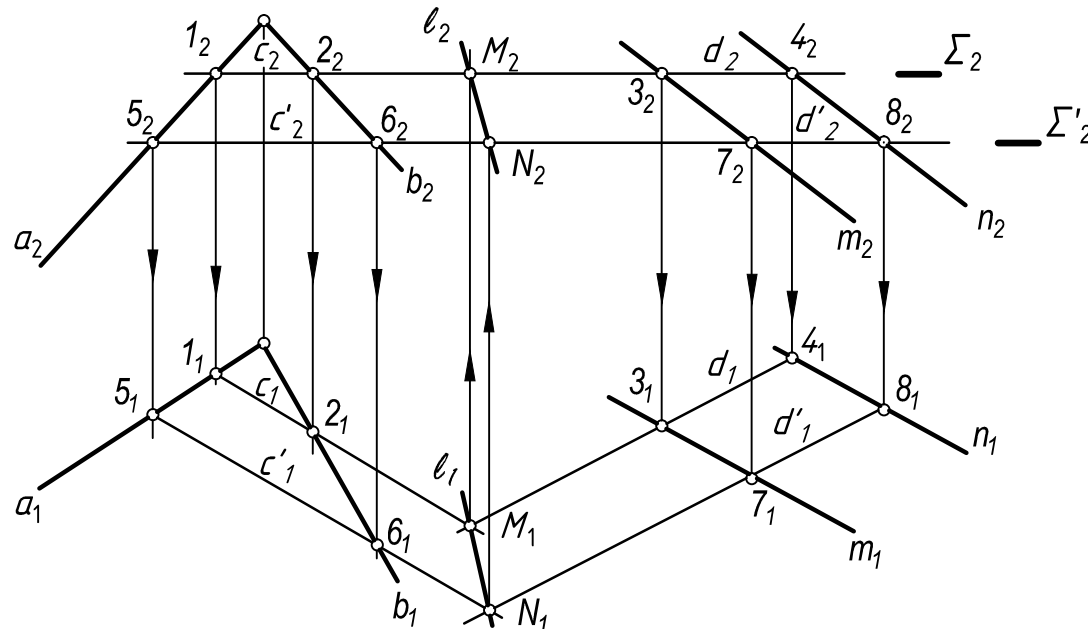
$$M = c \cap d$$

Вторая точка линии пересечения также определяется по данной схеме. При решении конкретной задачи на основе схемы составляется алгоритм.



Пример. Построить линию $\ell(MN)$ пересечения двух плоскостей общего положения $\Gamma(a \cap b)$ и $\Delta(m \parallel n)$. Записать алгоритм определения точек M и N .

36



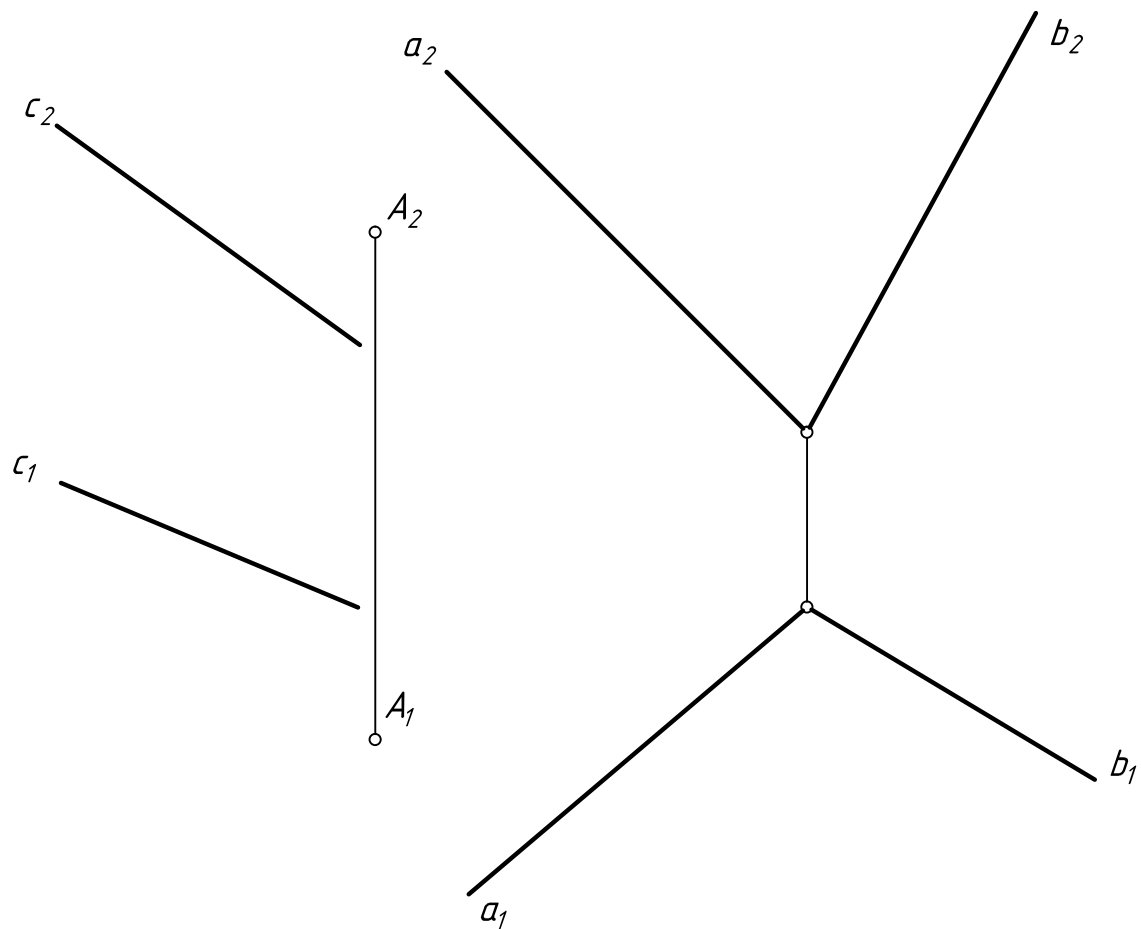
Алгоритм определения точки M :

- 1) $\Sigma \cap \Gamma; \Sigma \cap \Delta; \Sigma \perp \Pi_2$
- 2) $c(1-2) = \Sigma \cap \Gamma; d(3-4) = \Sigma \cap \Delta$
- 3) $M = c \cap d$

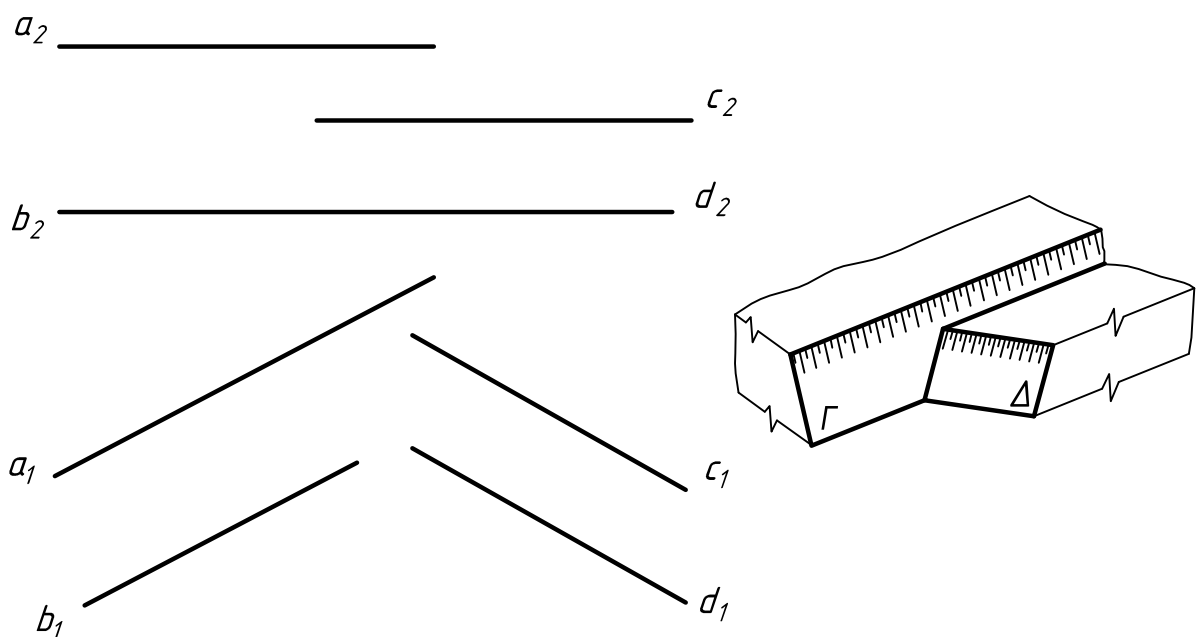
Алгоритм определения точки N :

- 1) $\Sigma' \cap \Gamma; \Sigma' \cap \Delta; \Sigma' \parallel \Sigma$
- 2) $c'(5-6) = \Sigma' \cap \Gamma; d'(7-8) = \Sigma' \cap \Delta$
- 3) $N = c' \cap d'$

53. Построить линию $k(MN)$, пересечения двух плоскостей общего положения $\Gamma(a \cap b)$ и $\Delta(A, c)$. Записать алгоритм определения точек M и N .



54. Построить линию пересечения двух плоских откосов $\Gamma(a \parallel b)$ и $\Delta(c \parallel d)$.



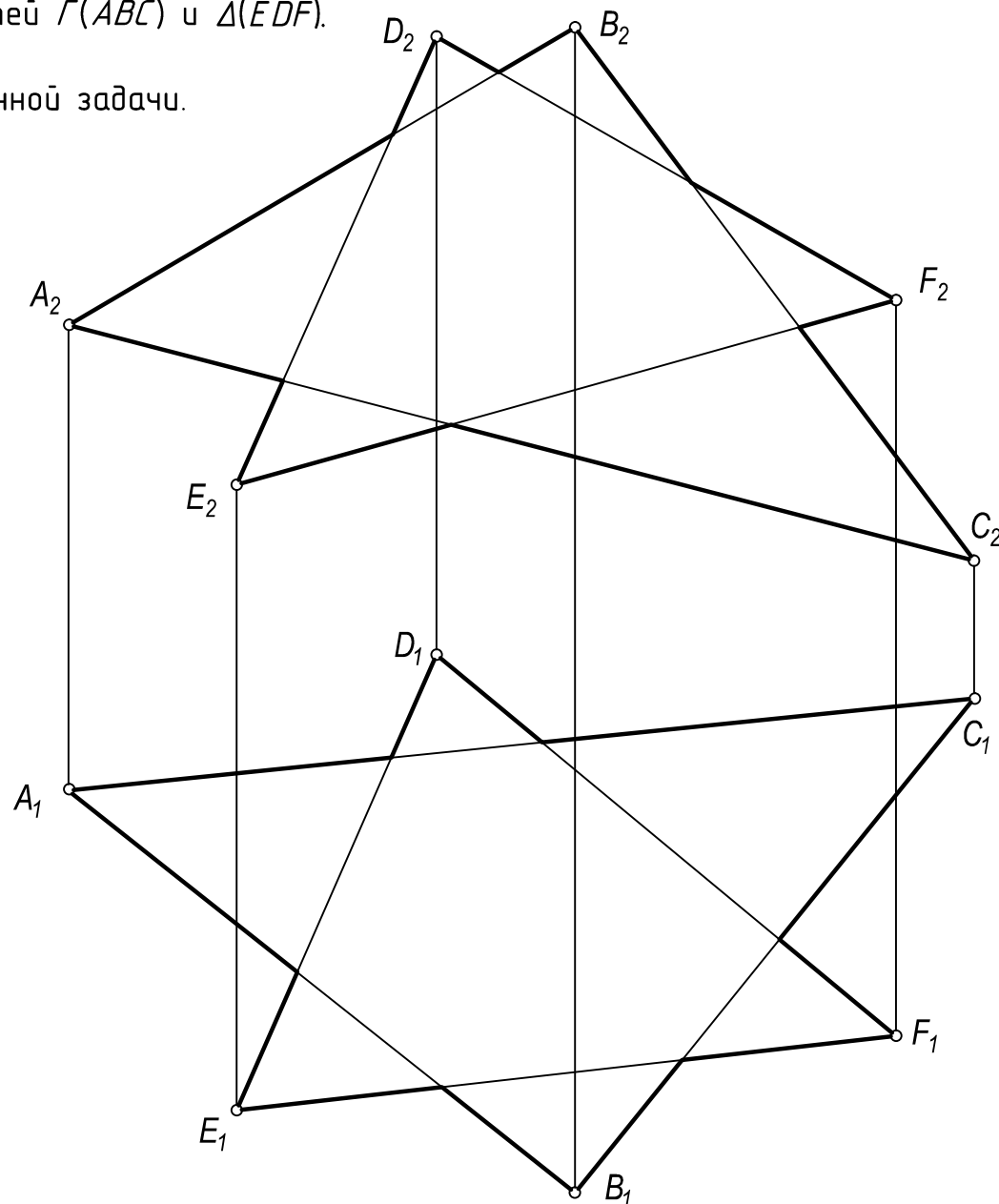
55. Построить линию (KL) пересечения плоскостей $\Gamma(ABC)$ и $\Delta(EDF)$.
 Определить видимость. Записать алгоритм.
 Решение выполнить по алгоритму первой позиционной задачи.

Алгоритм определения точки K :

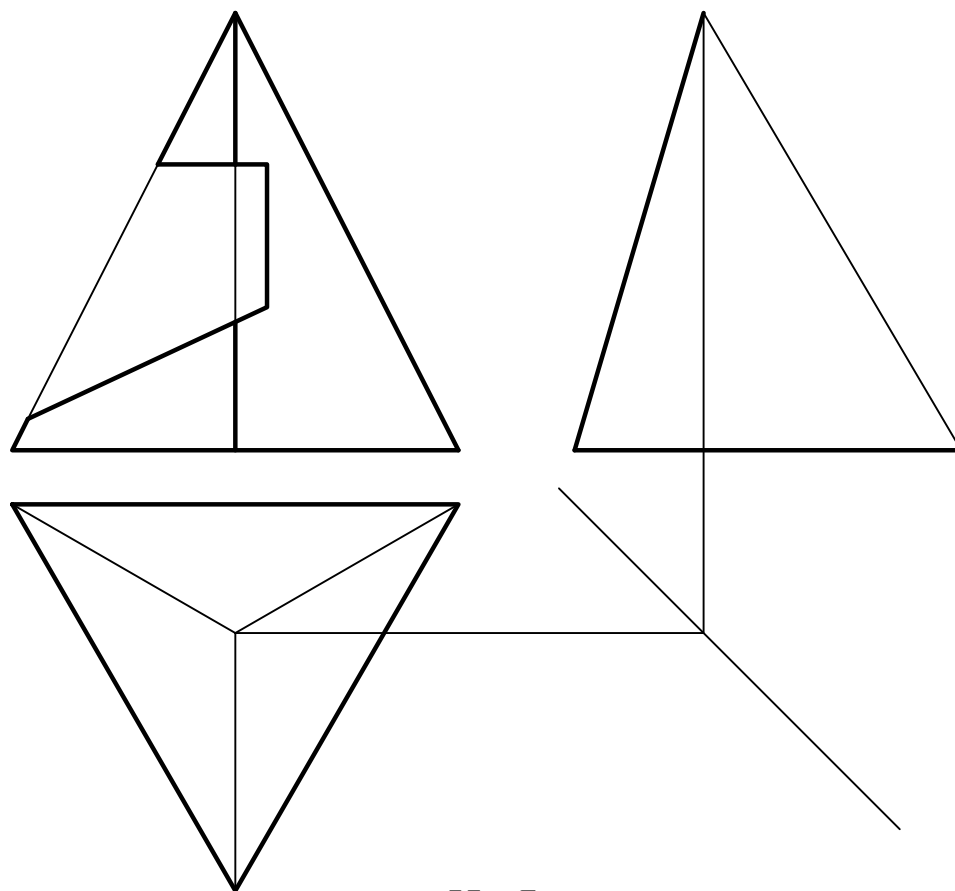
- 1) _____
- 2) _____
- 3) _____

Алгоритм определения точки L :

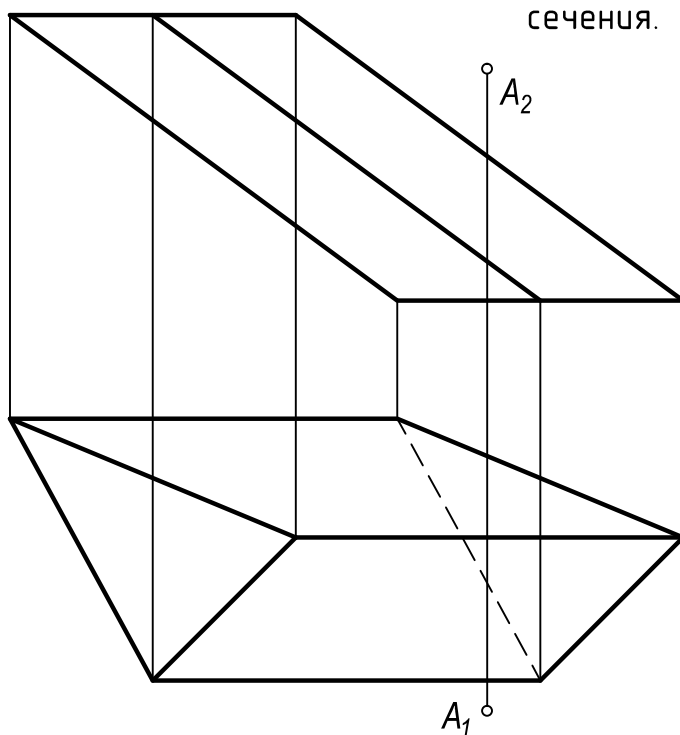
- 1) _____
- 2) _____
- 3) _____



56. Построить линию пересечения пирамиды проецирующими плоскостями. Обозначить проекции опорных точек. Определить видимость проекции линии пересечения и очерков геометрической фигуры.



57. Построить нормальное сечение призмы плоскостью, проходящей через точку A . Определить истинный вид сечения.

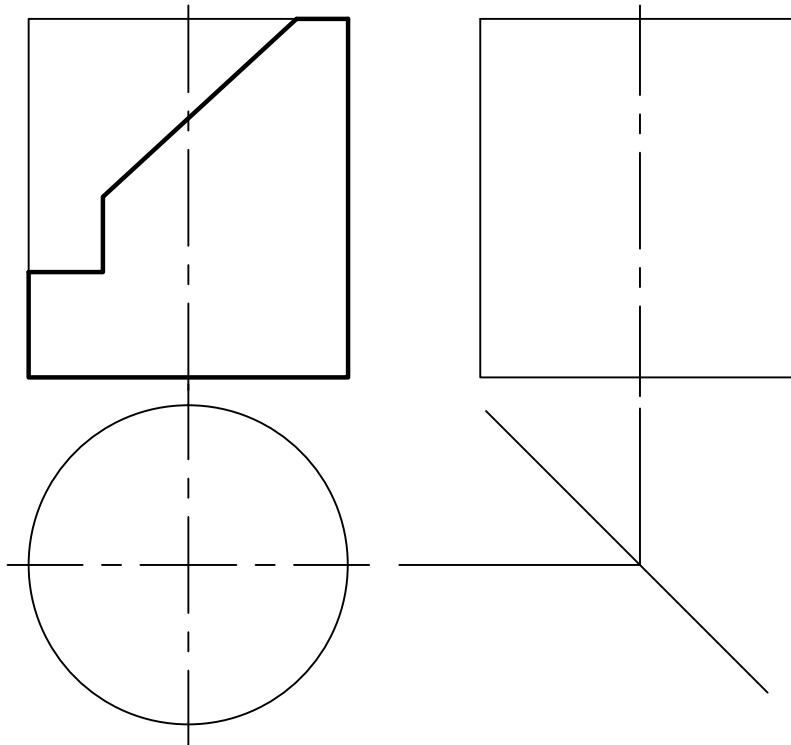


7. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

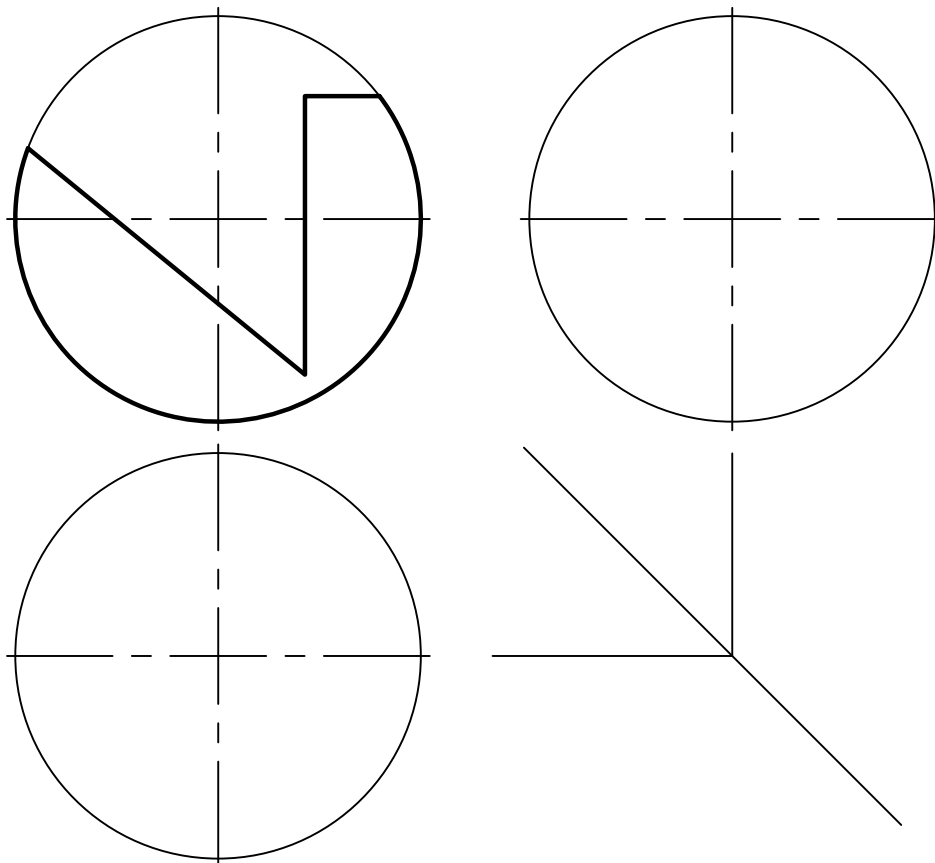
7.1 Пересечение поверхности плоскостью частного положения

58. Построить линии пересечения геометрических фигур проецирующими плоскостями. Обозначить проекции опорных точек. Определить видимость проекций линии пересечения и очерков геометрических фигур.

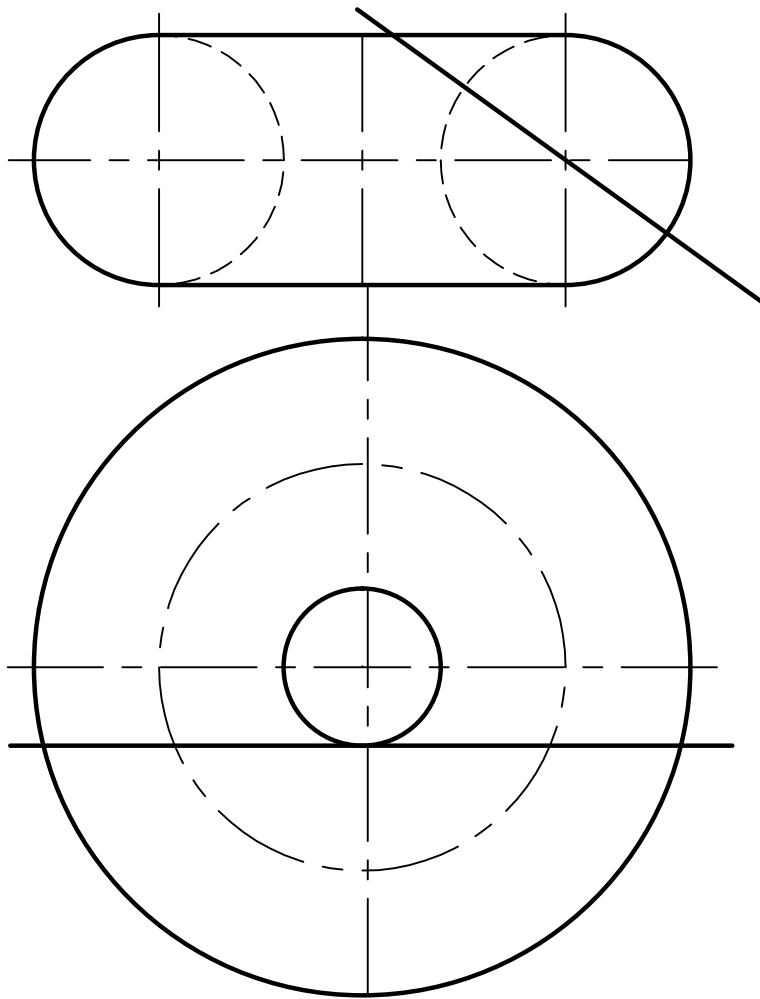
а)



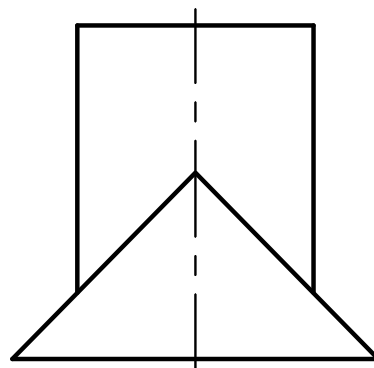
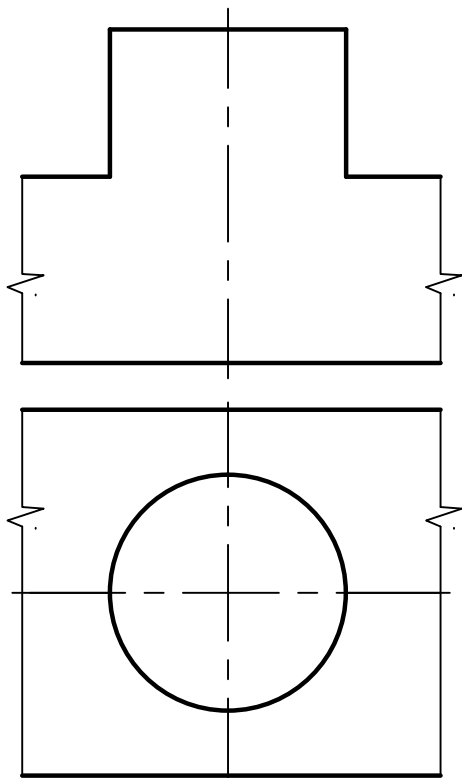
б)



в)

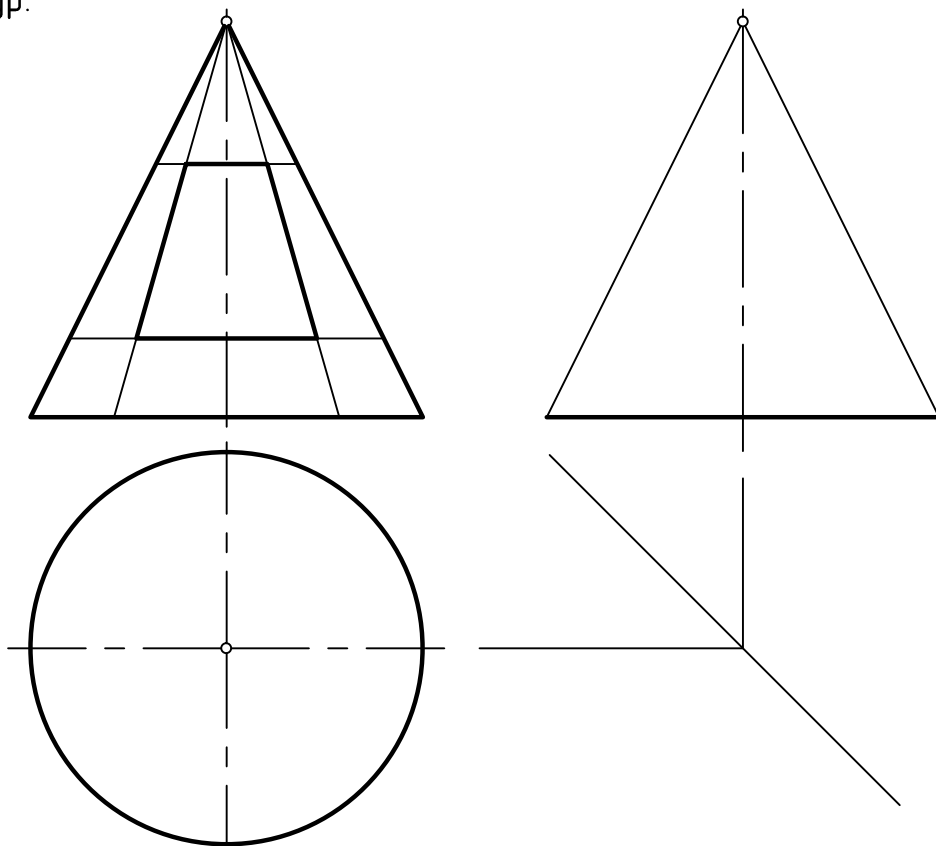


59. Построить линию пересечения цилиндра со скатами крыши.

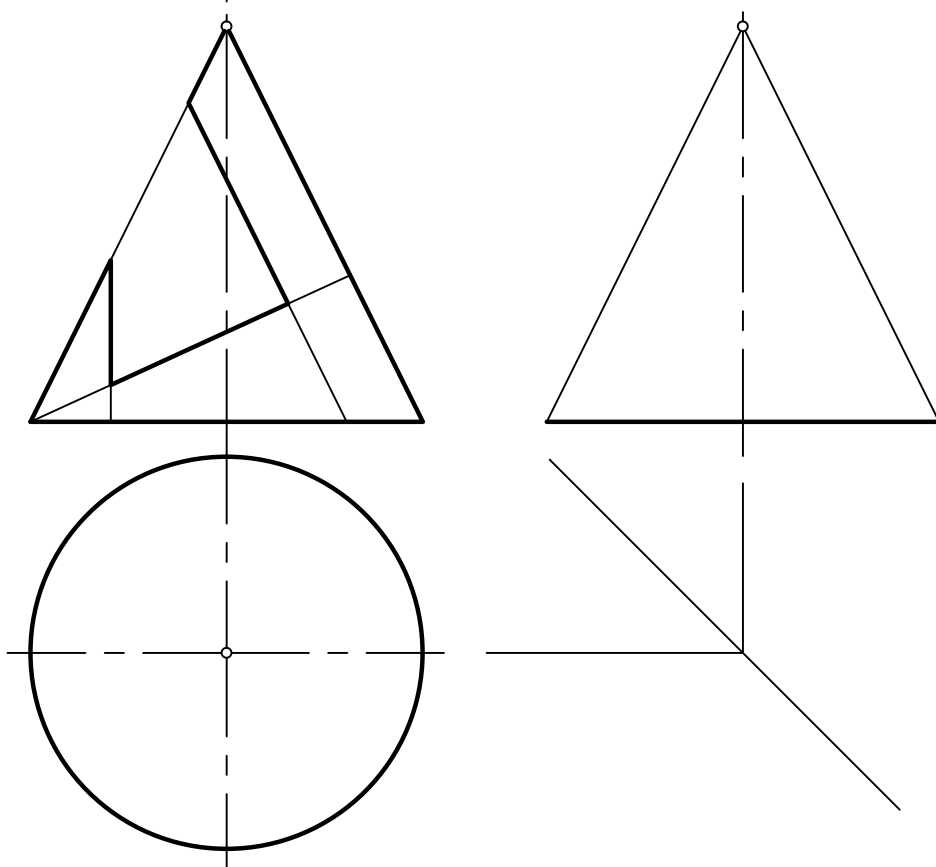


60. Построить линии пересечения конуса проецирующими плоскостями. Обозначить проекции опорных точек. Определить видимость проекций линии пересечения и очерков геометрических фигур.

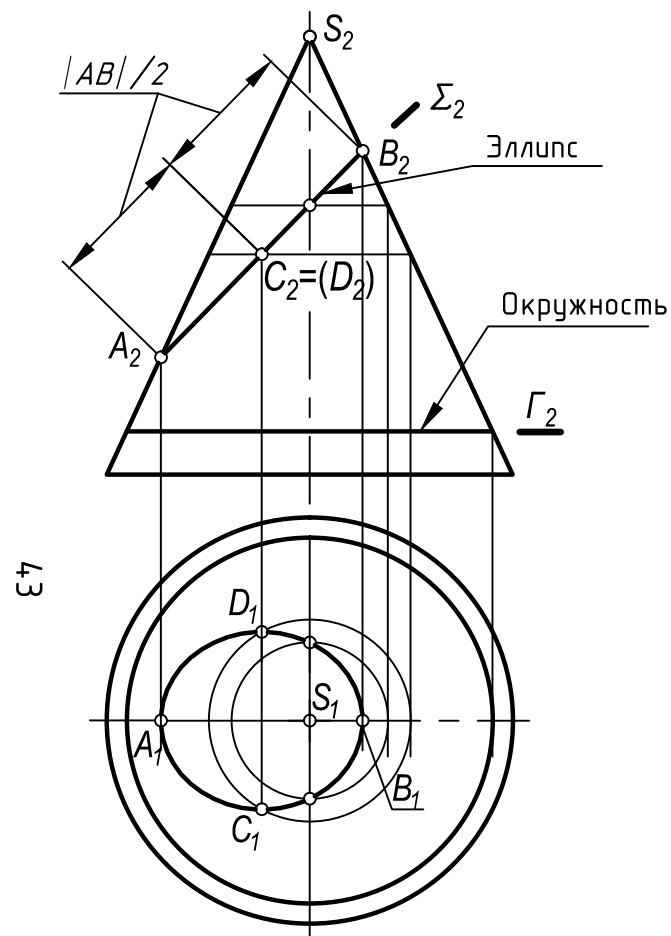
а)



б)

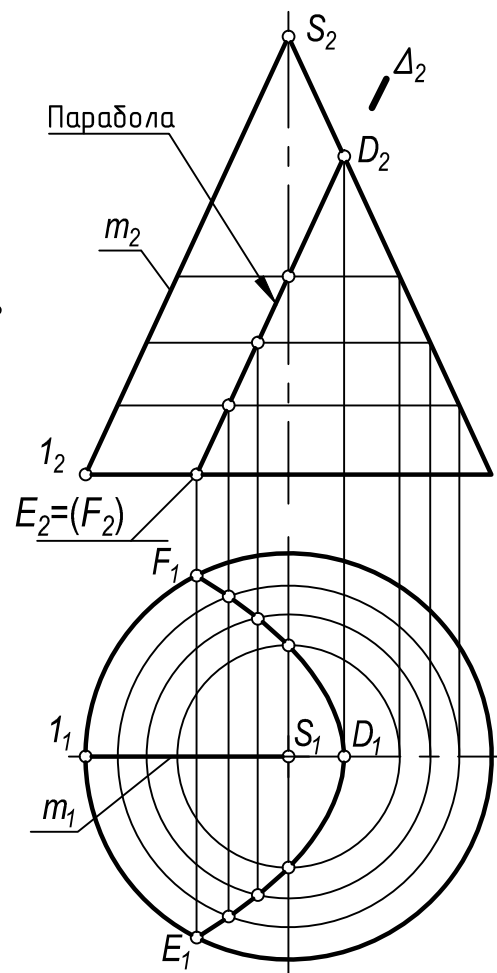


Пример. Построить линии пересечения конуса проецирующими плоскостями.

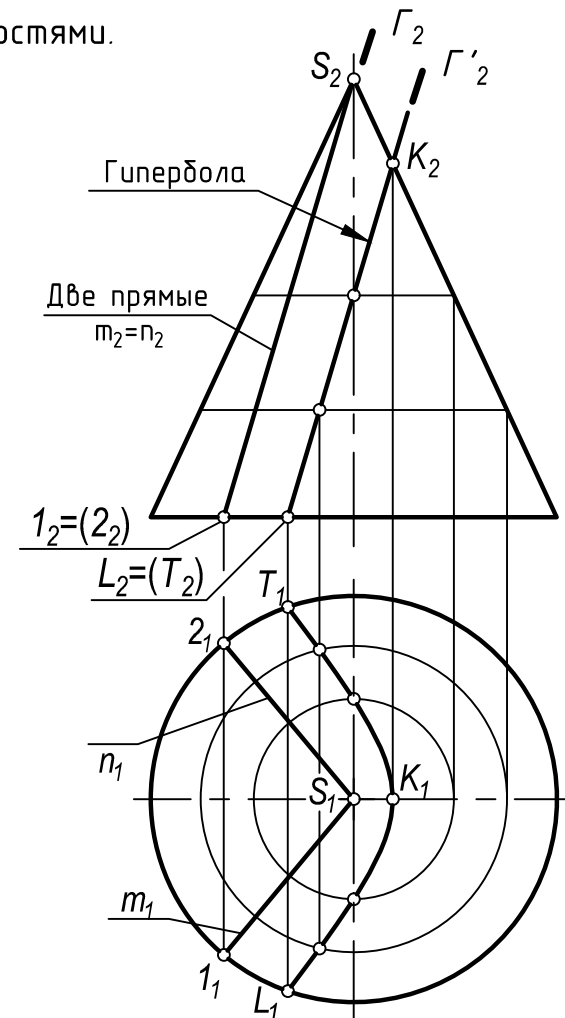


Плоскость Σ пересекает все образующие конуса. Линия сечения – эллипс.

Плоскость Γ перпендикулярна оси конуса. Линия сечения – окружность.



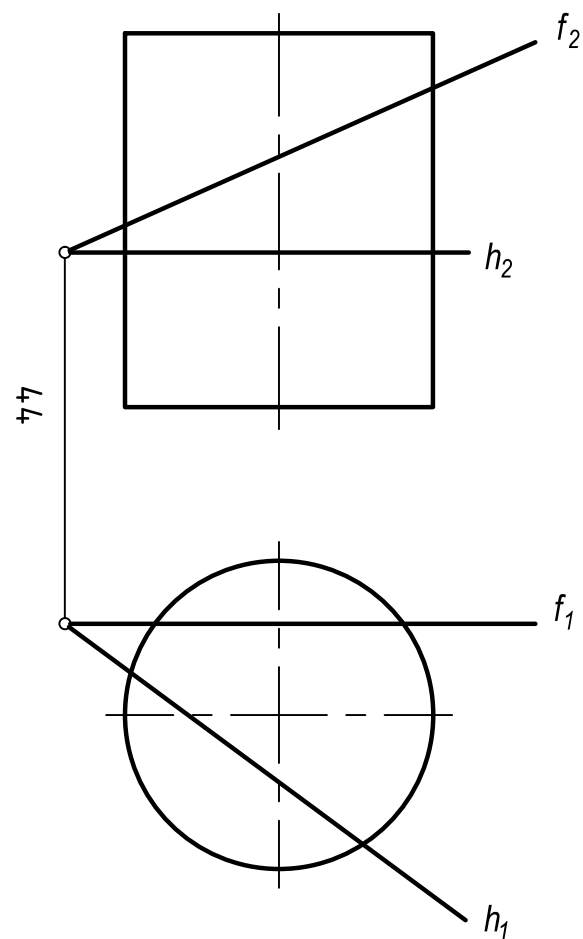
Плоскость Δ параллельна одной образующей конуса $m(S-1)$. Линия сечения – парабола.



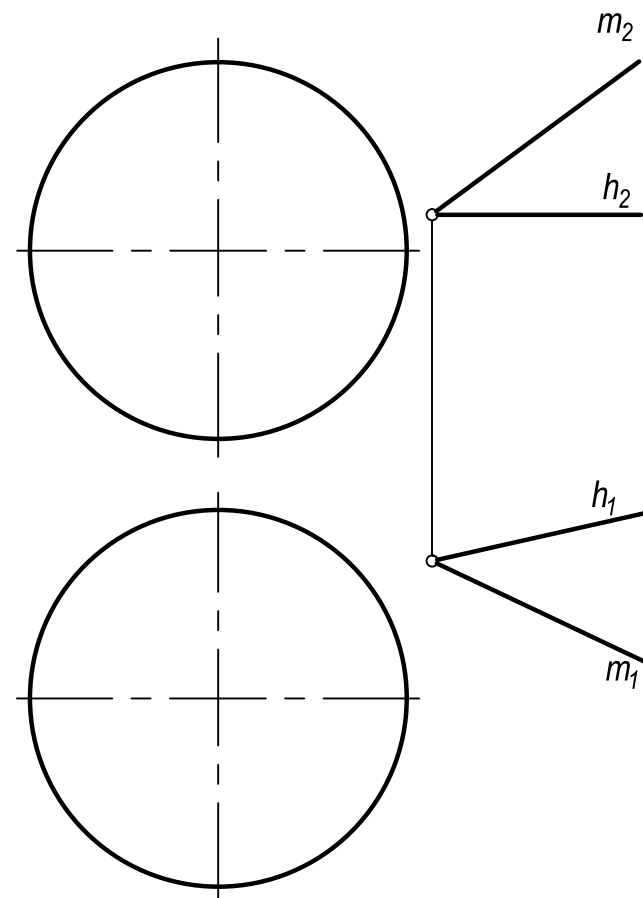
Плоскость Γ проходит через вершину конуса. Линия сечения – две прямые $m(S-1)$ и $n(S-2)$. Плоскость Γ' параллельна двум образующим конуса m и n . Линия сечения – гипербола.

7.2 Пересечение поверхности вращения плоскостью общего положения

61. Построить линию пересечения цилиндра плоскостью $\Gamma(h \cap f)$.

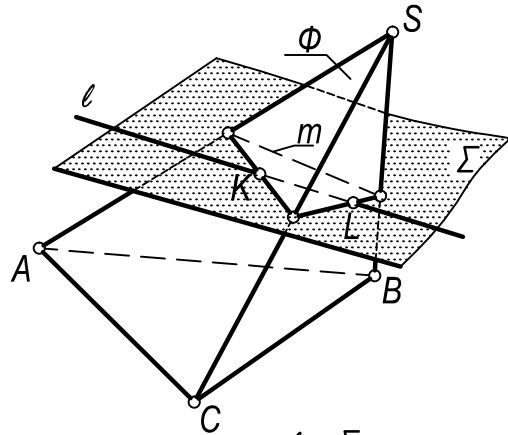


62. Построить линию пересечения сферы плоскостью $\Gamma(m \cap h)$. Определить натуральный вид сечения.



8. Пересечение поверхности с прямой линией

Пример. Определить точки пересечения прямой общего положения ℓ с поверхностью пирамиды Φ .
Определить видимость проекций прямой.



В зависимости от вида и расположения линии и поверхности, точек их пересечения может быть одна или несколько. В основе их построения положен способ вспомогательных поверхностей, в соответствии с которым, построение точек пересечения линии ℓ и поверхности Φ (независимо от их вида) осуществляется по следующей схеме:

- 1) Через заданную линию ℓ проводим вспомогательную плоскость Σ .
- 2) Определяем линию m пересечения вспомогательной плоскости Σ и заданной поверхности Φ .
- 3) Отмечаем точки K, L пересечения линий ℓ и m , которые являются искомыми.

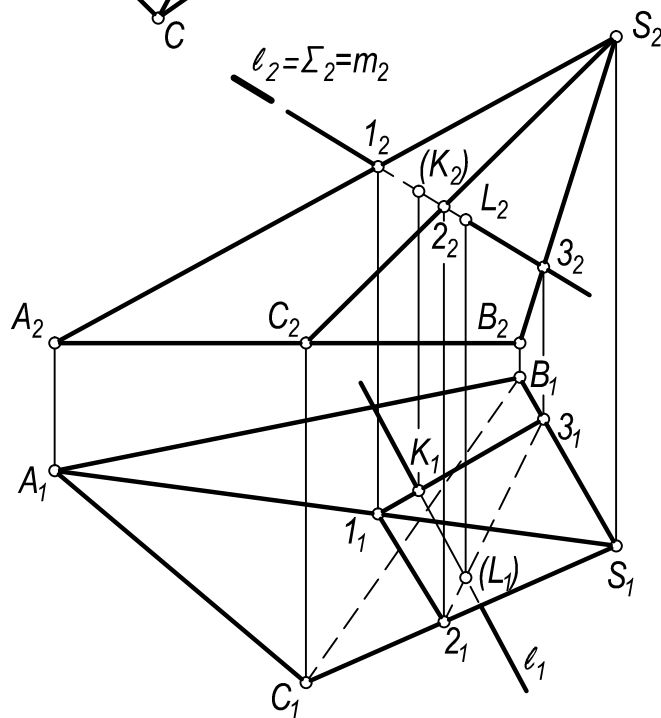
В символической записи схема имеет вид:

- 1) $\Sigma \supset \ell$;
- 2) $\Sigma \cap \Phi = m$;
- 3) $\ell \cap m = K, L$.

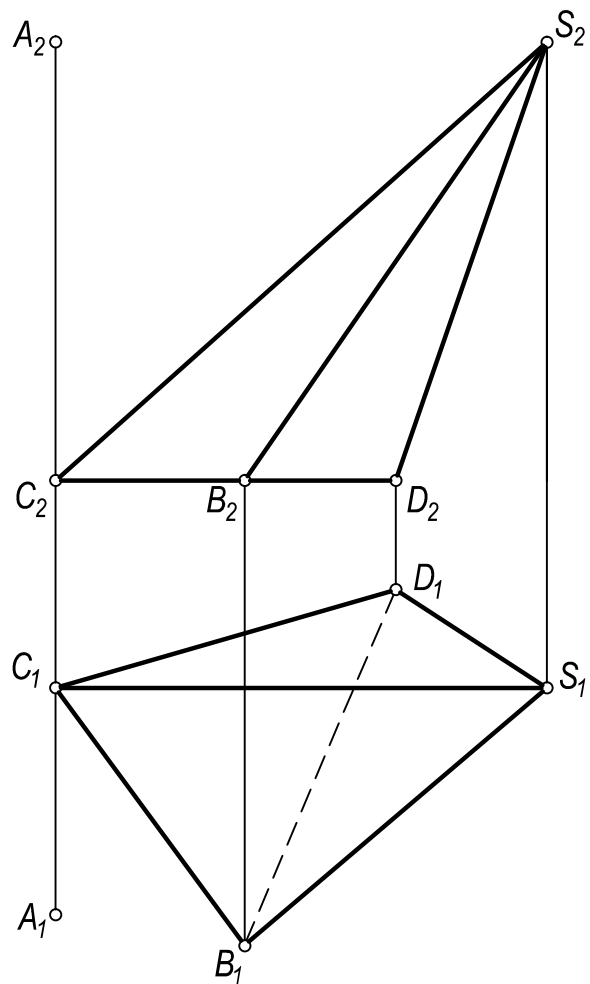
Алгоритм решения задачи:

- 1) $\Sigma \supset \ell$, $\Sigma \perp \Pi_2$ через прямую ℓ проводим фронтально проецирующую плоскость Σ .
- 2) $\Sigma \cap \Phi = m(1-2-3)$ - определяем линию m пересечения плоскости Σ и заданной поверхности Φ .
- 3) $\ell \cap m(1-2-3) = K, L$ - отмечаем точки K, L пересечения линий ℓ и m , которые являются искомыми.

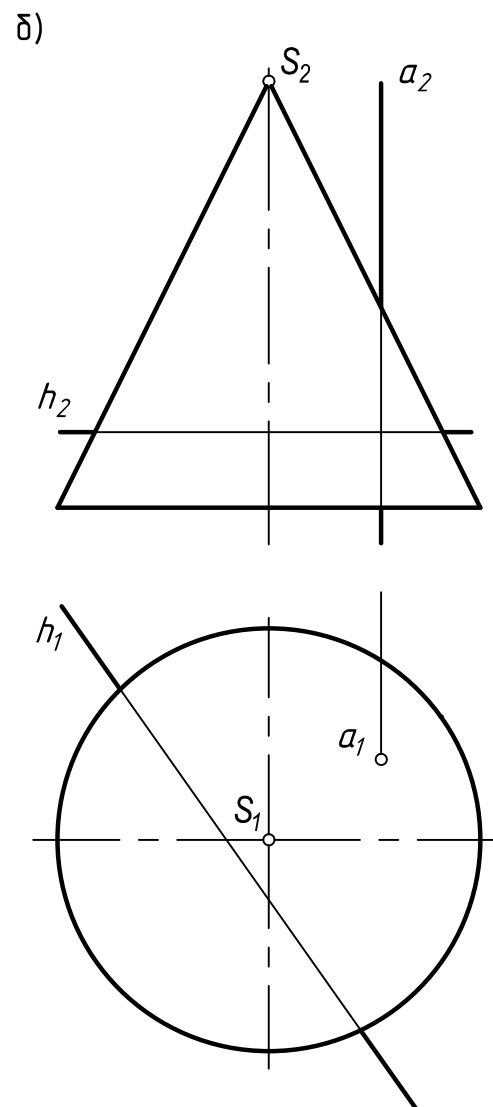
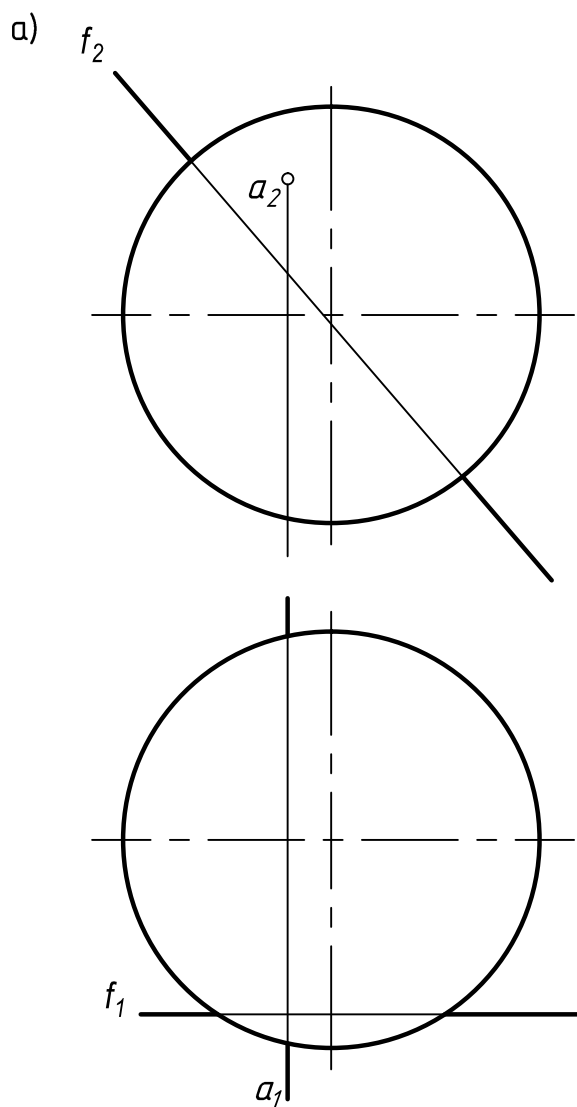
57



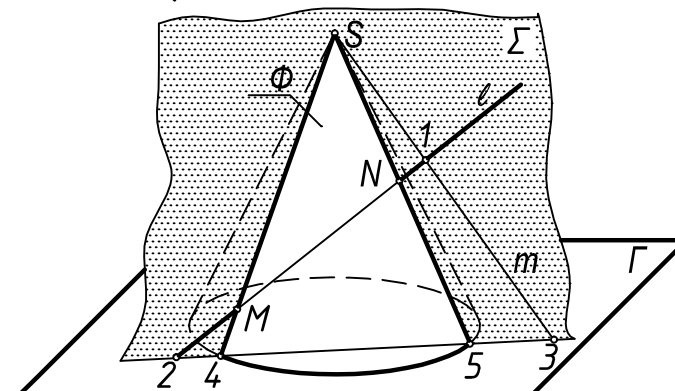
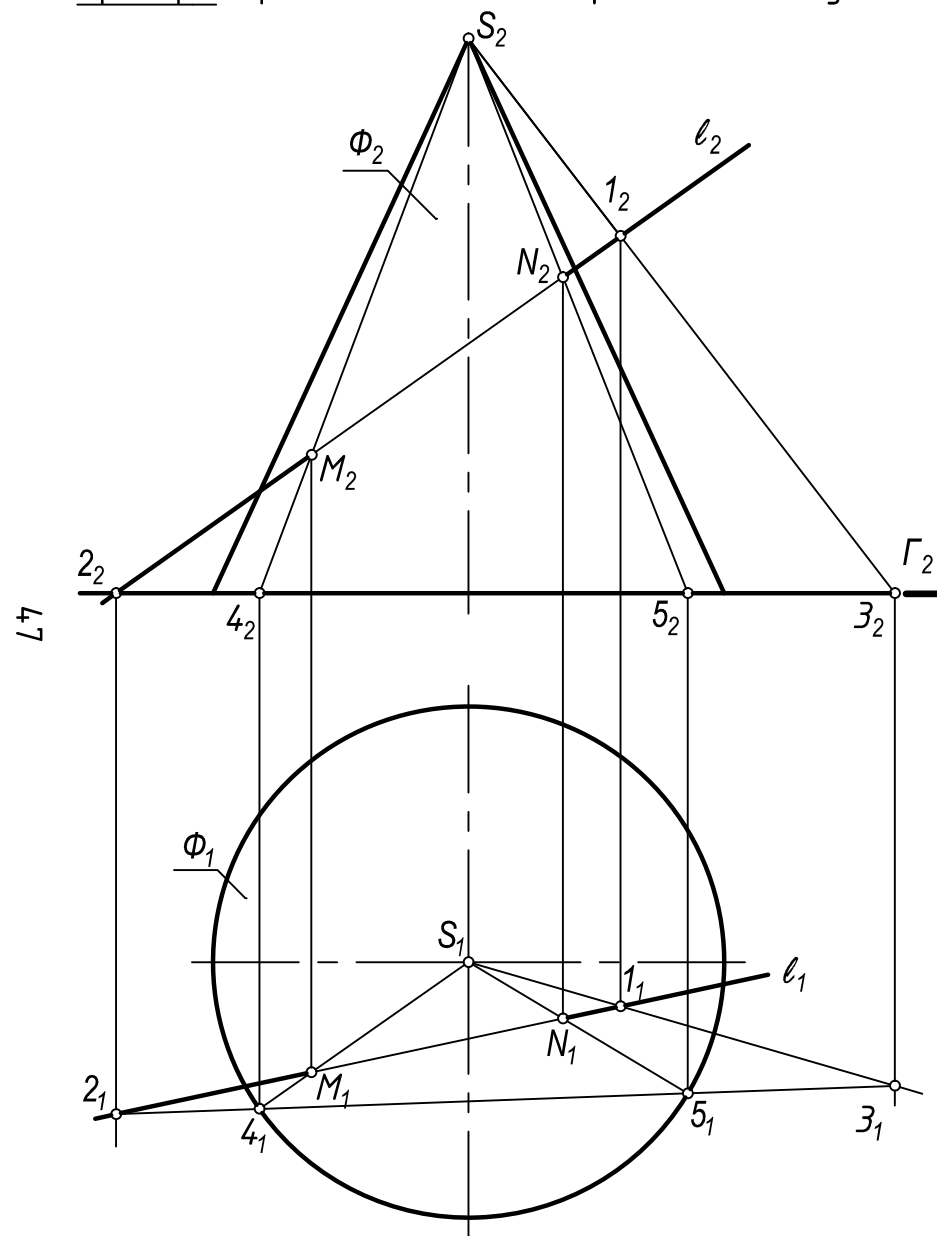
63. Через точку A провести прямую, перпендикулярную грани SBC . Найти точки пересечения этой прямой с пирамидой и определить видимость проекций прямой.



64. Построить точки пересечения заданных прямых a , h , f с поверхностями. Определить видимость проекций прямых.



Пример. Определить точки пересечения конуса с прямой общего положения.



В данном случае применение проецирующей плоскости в качестве секущей нецелесообразно, так как в сечении получится кривая второго порядка, которую нужно строить по точкам. Плоскость же общего положения, проходящая через заданную прямую и вершину конуса, пересечет его по образующим.

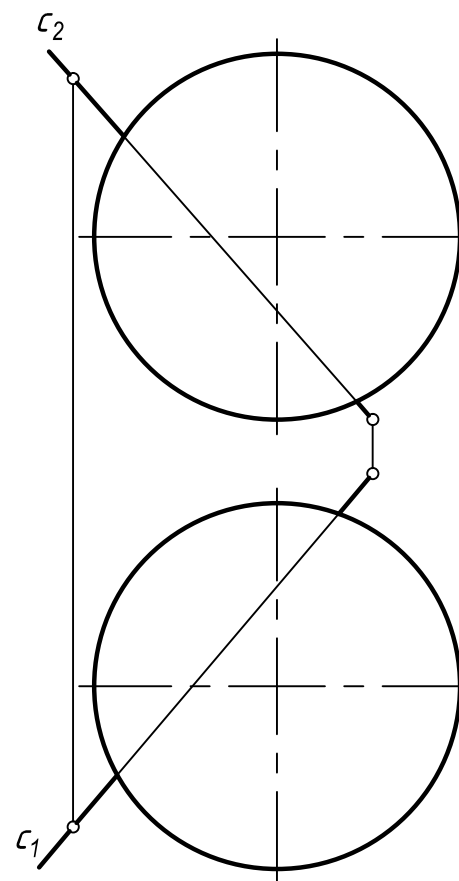
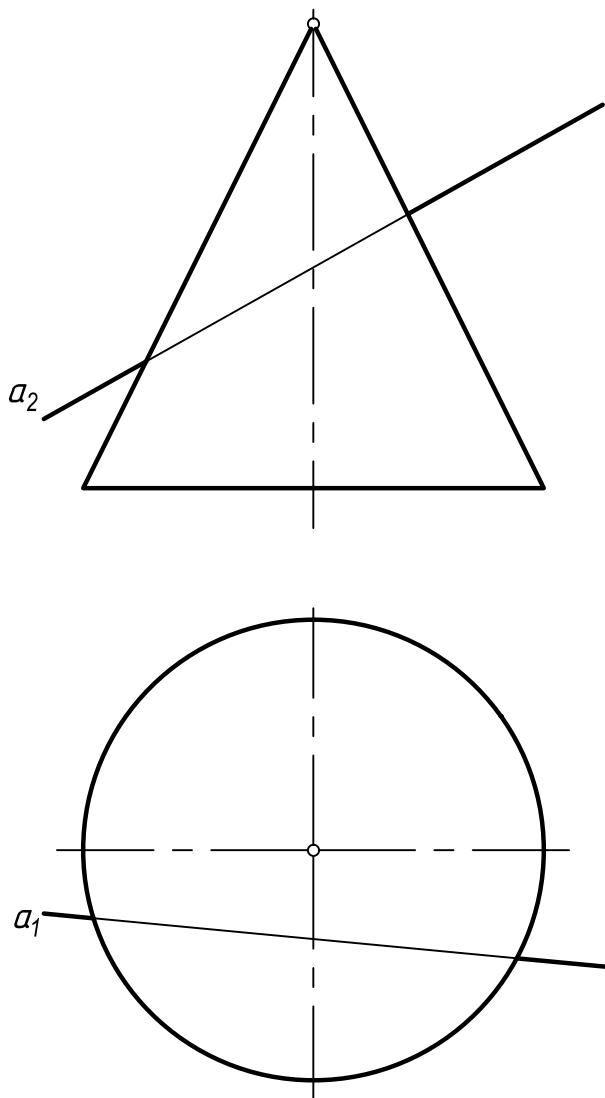
Алгоритм:

- 1) $S \in \Sigma$ ($\ell \cap m$)
- 2) $\Sigma \cap \Phi = (S-4-5)$
- 3) $(S-4) \cap \ell = M$, $(S-5) \cap \ell = N$

Для определения образующих $S-4$ и $S-5$, по которым плоскость Σ пересекает поверхность конуса Φ , предварительно построена линия $(2-3)$ пересечения плоскости Σ с плоскостью Γ основания конуса. Найдены горизонтальные проекции точек 4 и 5 пересечения прямой $(2-3)$ с окружностью основания конуса, затем построены горизонтальные проекции образующих $(S-4)$ и $(S-5)$ и найдены точки M и N .

65. Построить точки пересечения заданных прямых a , l с поверхностями. Определить видимость проекций прямых.

87



9. ТЕНИ НА ОРТОГОНАЛЬНЫХ ЧЕРТЕЖАХ

Тени на ортогональных чертежах выявляют пластику объёмных форм предметов. Плоские чертежи выглядят трёхмерными, если на них построить тени. Грамотно построенные тени наглядно показывают соотношения размеров частей объекта.

В ортогональных проекциях луч света принимают параллельным диагонали куба, грани которого совмещены с плоскостями проекций. Наклон светового луча к плоскостям проекций равен $\approx 35^\circ$, проекции этого луча составляют с осью x_{12} углы равные 45° (рис.8).

Построение тени точки на плоскость решают как задачу пересечения прямой (луча) с плоскостью. Тенью точки A является точка A^t (рис.9).

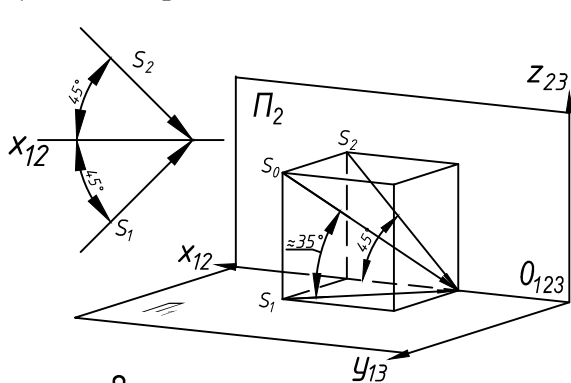


рис.8

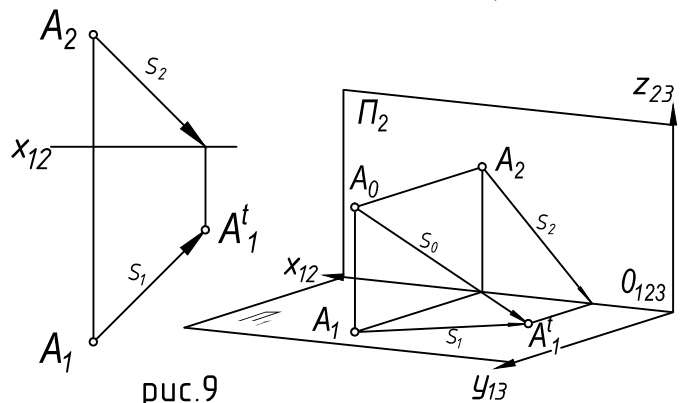


рис.9

Тень прямой на плоскость есть прямая. Её строят по двум принадлежащим прямой точкам. Как правило, находят тени точек концов отрезка (рис.10). Тень отрезка прямой, параллельного плоскости проекций, равна и параллельна самому отрезку (рис.11).

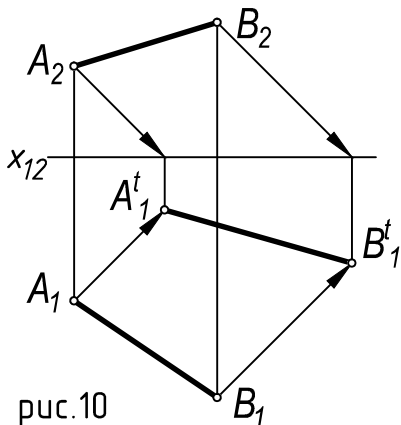


рис.10

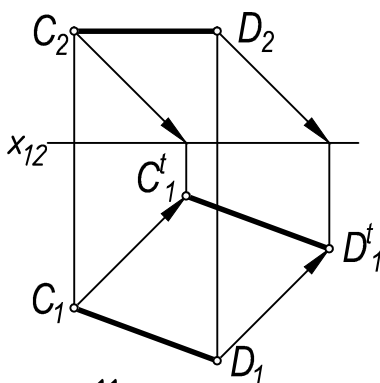


рис.11

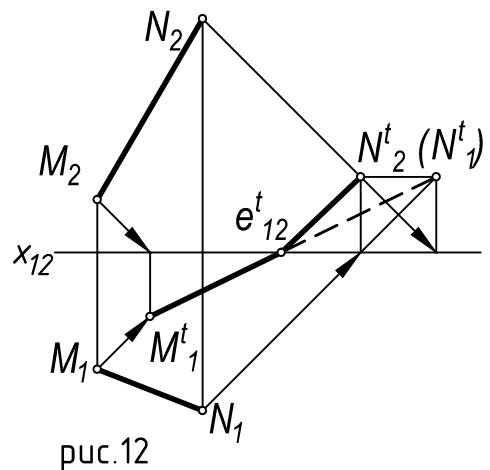


рис.12

Если тени концов отрезка оказались на разных плоскостях проекций (рис.12), то находят мнимую тень одной из точек. Тени точек должны быть построены на одну плоскость проекций. Затем, соединив полученные тени точек находят точку излома (перехода) тени в другую плоскость.

Для построения падающей тени точки на плоскость общего положения следует через точку провести световой луч и пересечь его с данной плоскостью. Это задача на пересечение прямой (луча) с плоскостью (рис.13). Таким же образом строится тень от прямой на плоскость (рис.14).

Тени отрезка прямой на две параллельные плоскости будут друг другу параллельны (рис.15).

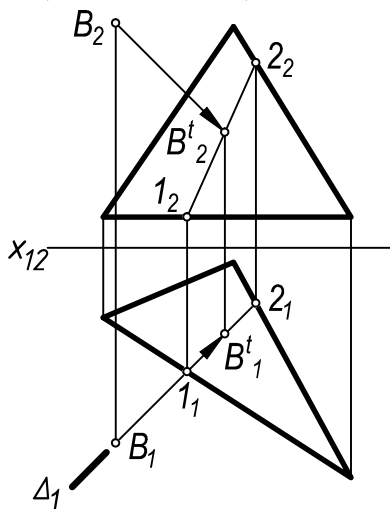


рис.13

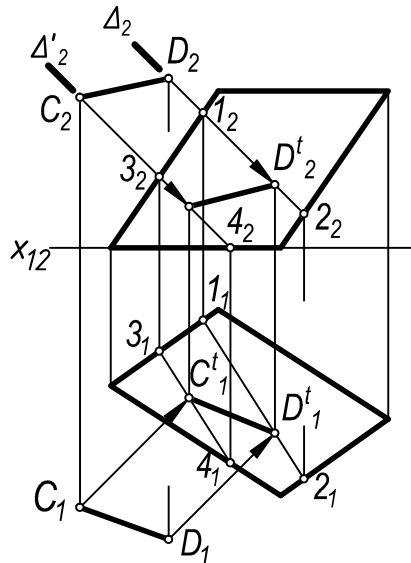


рис.14

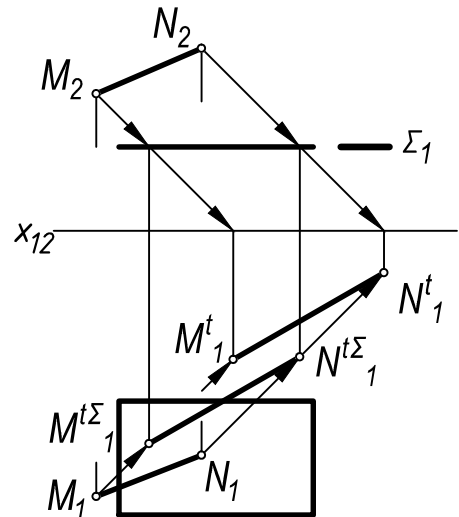


рис.15

При построении теней геометрических тел сначала определяют контур собственной тени, а затем приступают к построению падающей тени.

Поверхность предмета, обращенная к источнику света, будет освещена. Неосвещенная часть поверхности называется собственной тенью предмета. Линия отделяющая освещенную часть поверхности от собственной тени именуется контуром собственной тени.

Тень отбрасываемая предметом на какую-либо плоскость (поверхность) называется падающей тенью. Падающие тени строят от контуров собственных теней объекта. Собственную тень предметов принято изображать светлее падающей тени.

Нижнее основание призмы, задняя и правая боковая её грани находятся в собственной тени. Контур собственной тени призмы это пространственная ломаная линия $ABCDEF$ (рис.16). От точек вершин этого контура строят падающие тени (рис.17). Соответственно соединив линиями полученные точки получают контур падающей тени призмы.

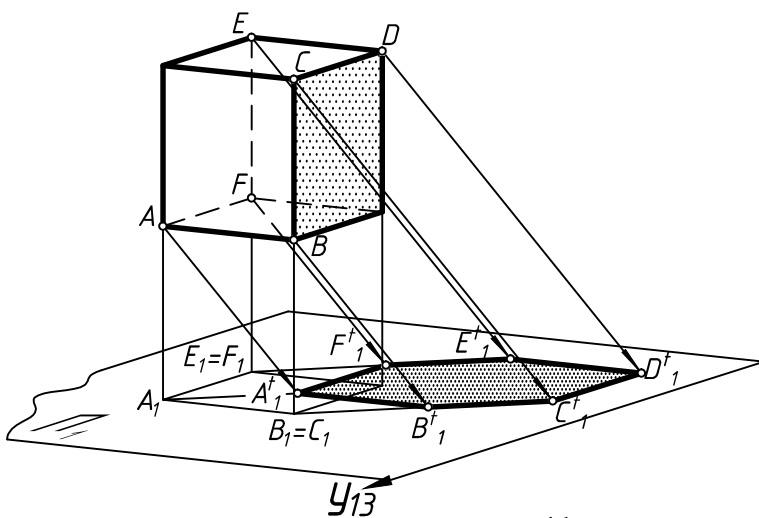


рис.16

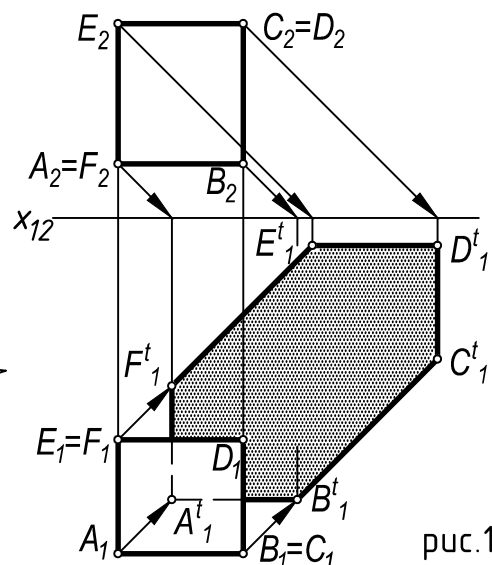
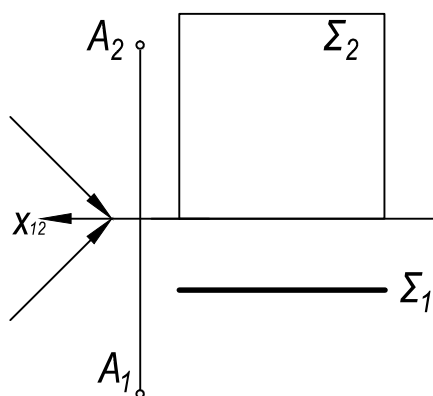


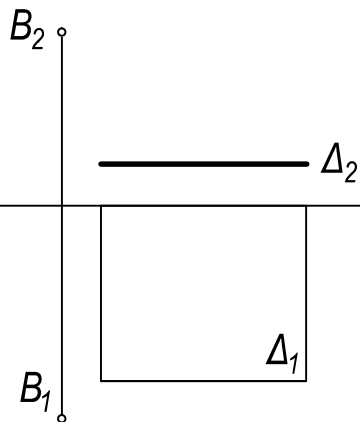
рис.17

66. Построить падающие тени точек на плоскости и поверхности.

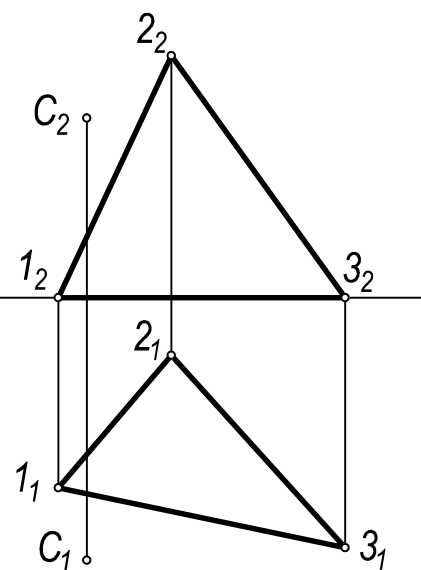
а)



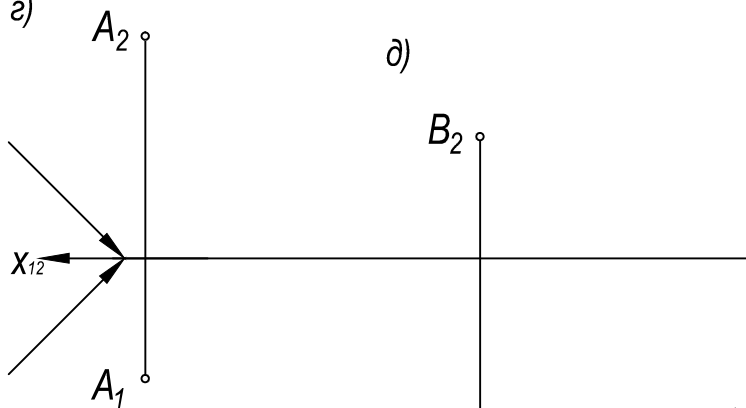
б)



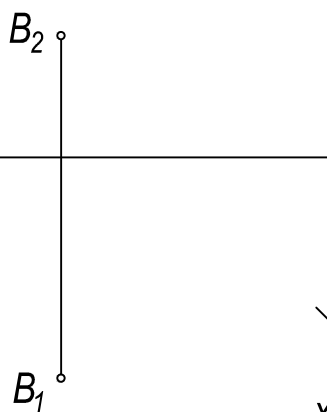
в)



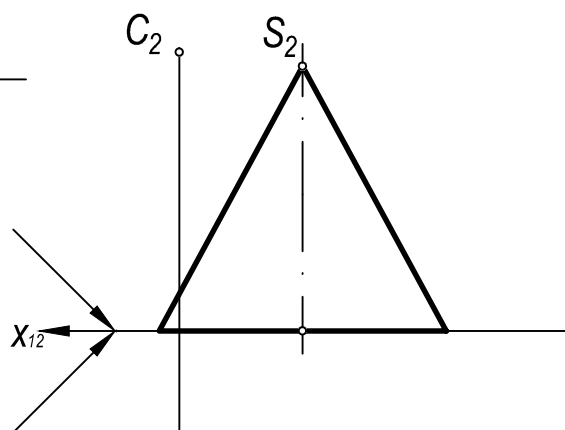
г)



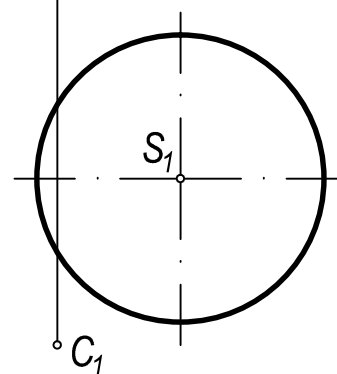
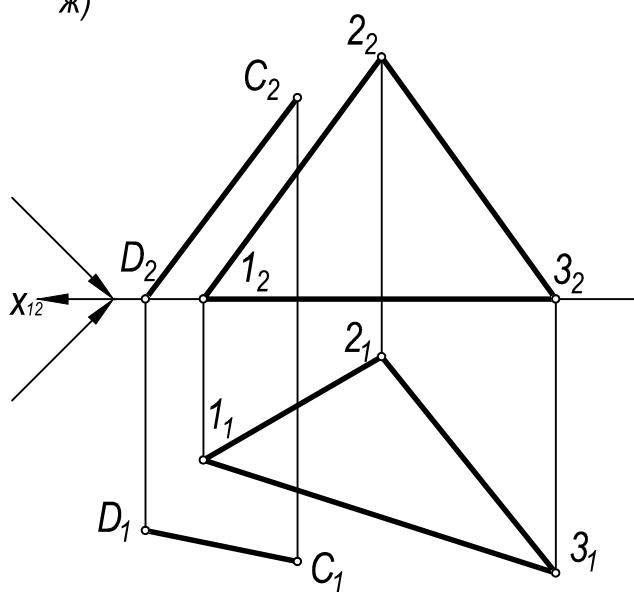
д)



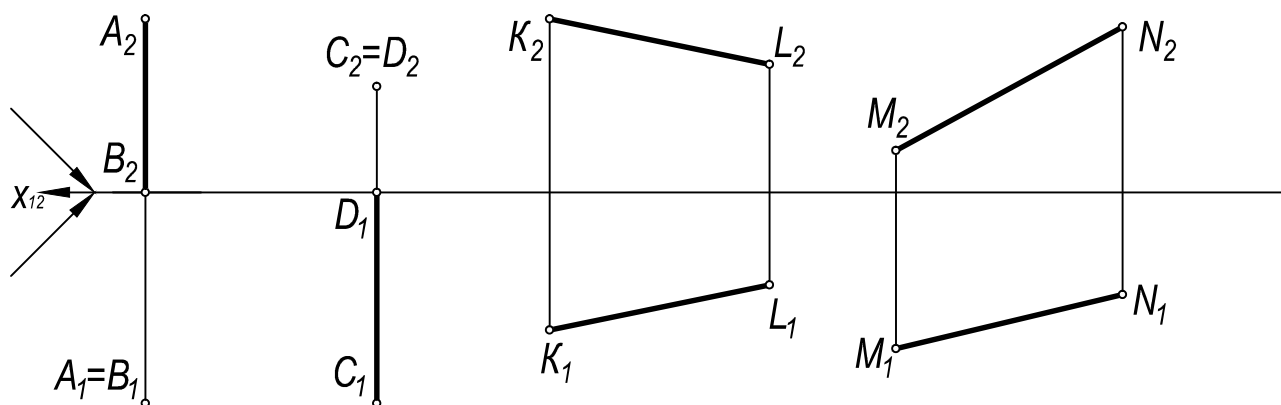
е)



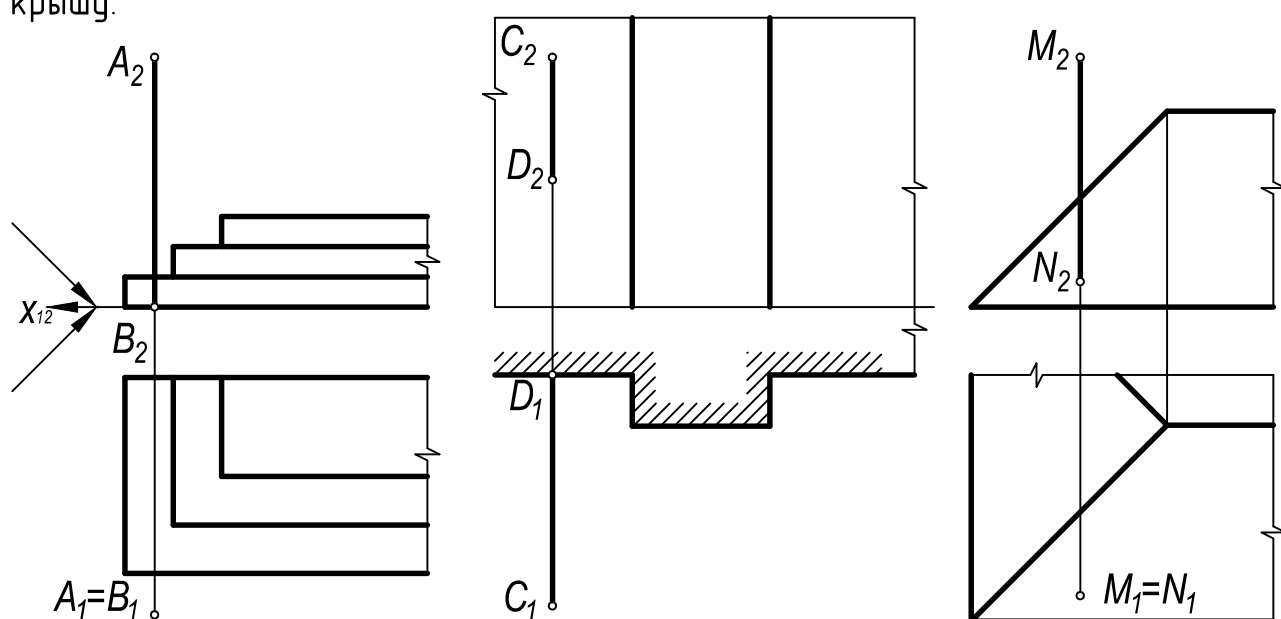
ж)



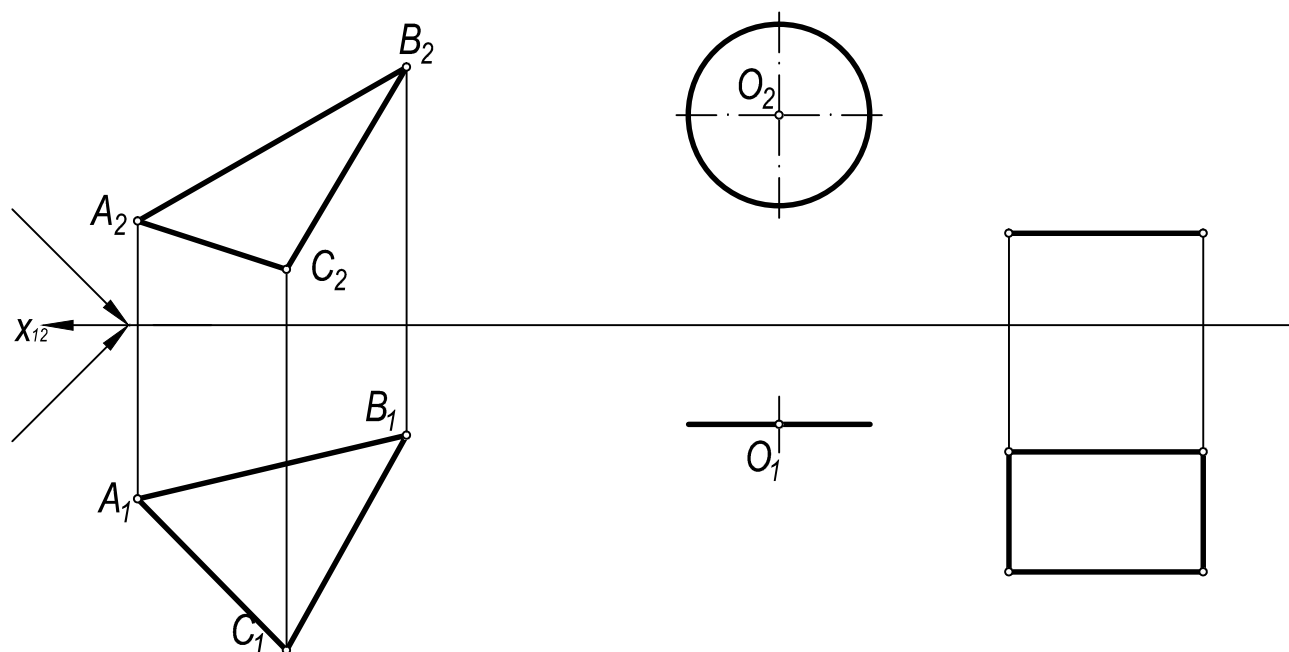
67. Построить падающие тени отрезков прямых.

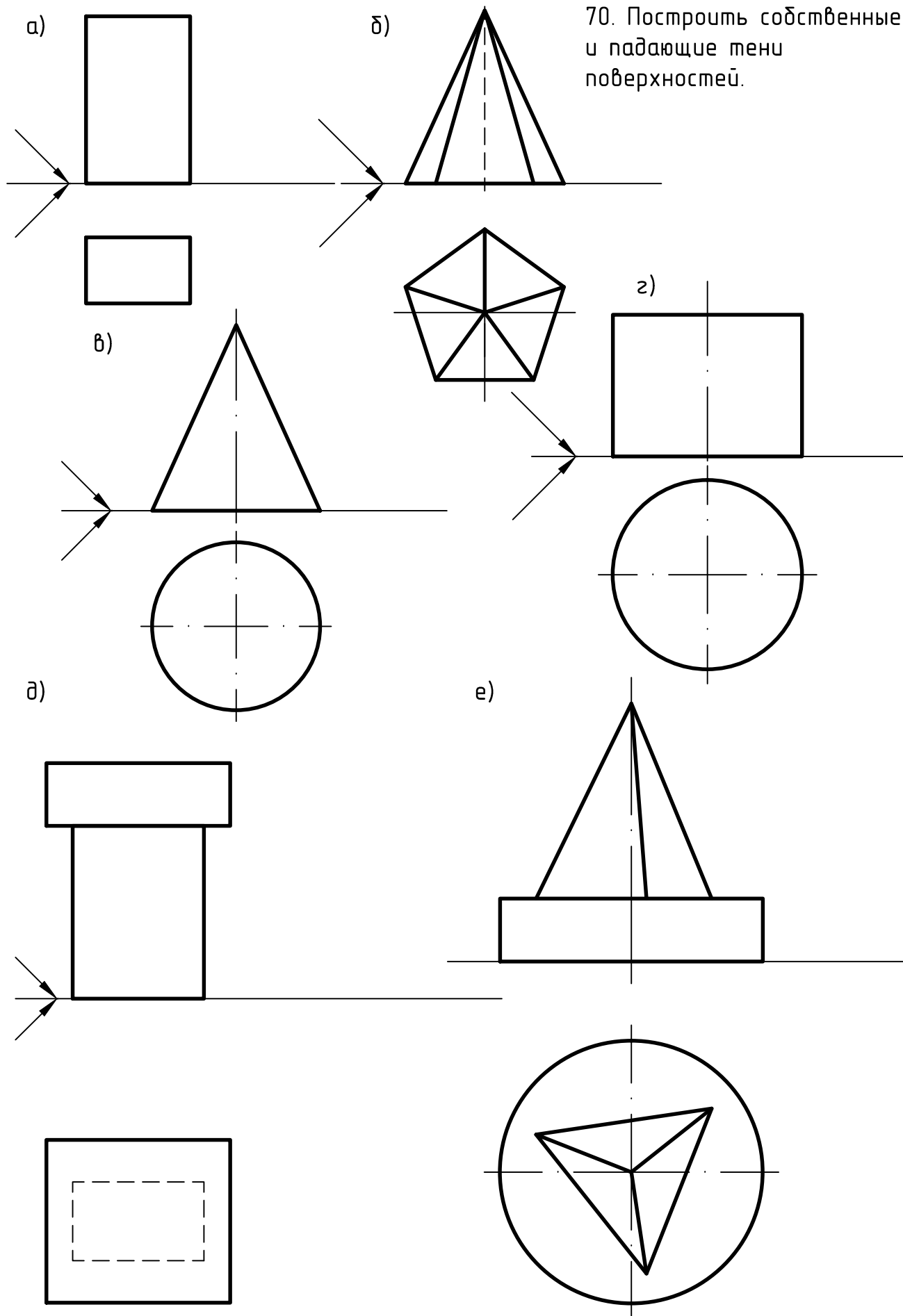


68. Построить падающие тени отрезков прямых на лестницу, пилястру, крышу.

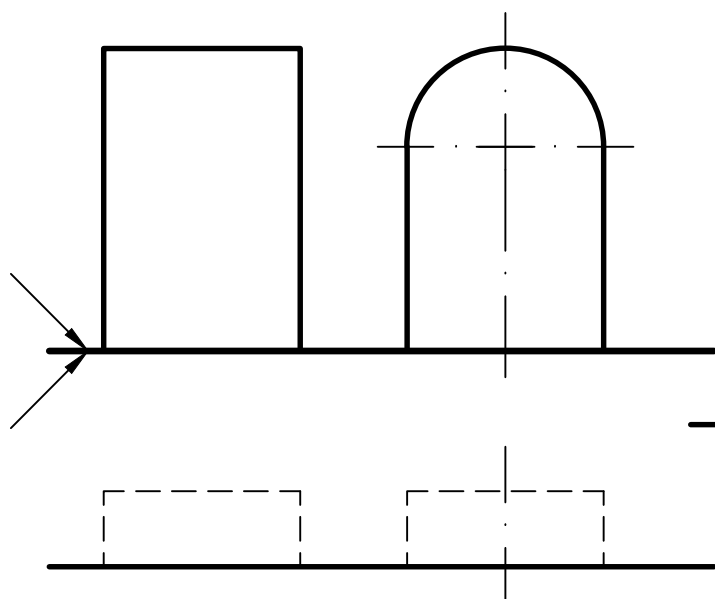


69. Построить падающие тени плоских фигур.

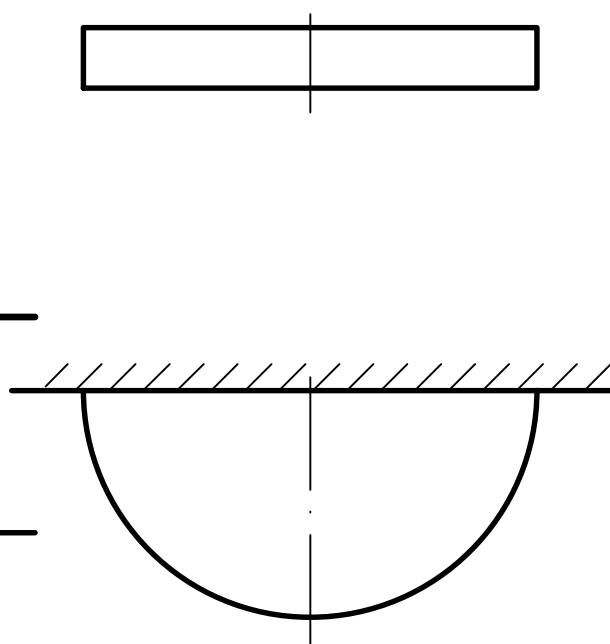




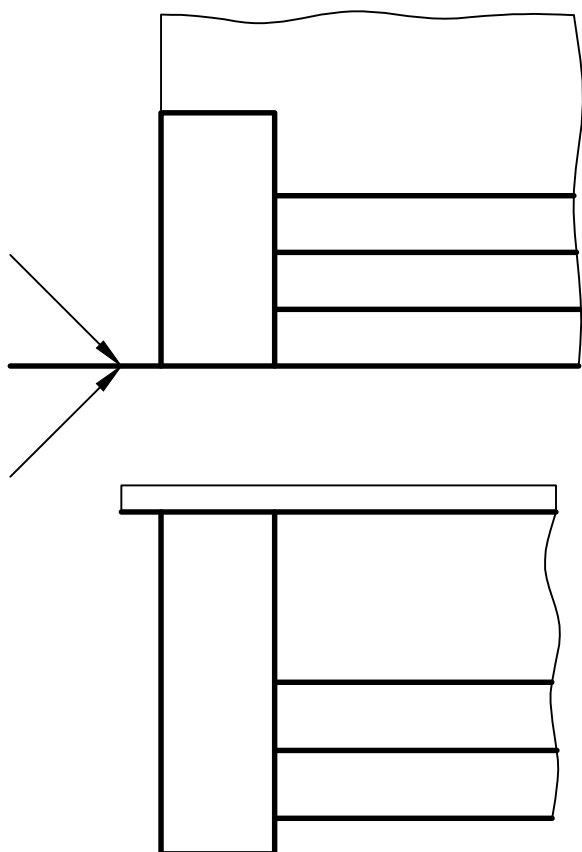
71. Построить падающие тени в нишах.



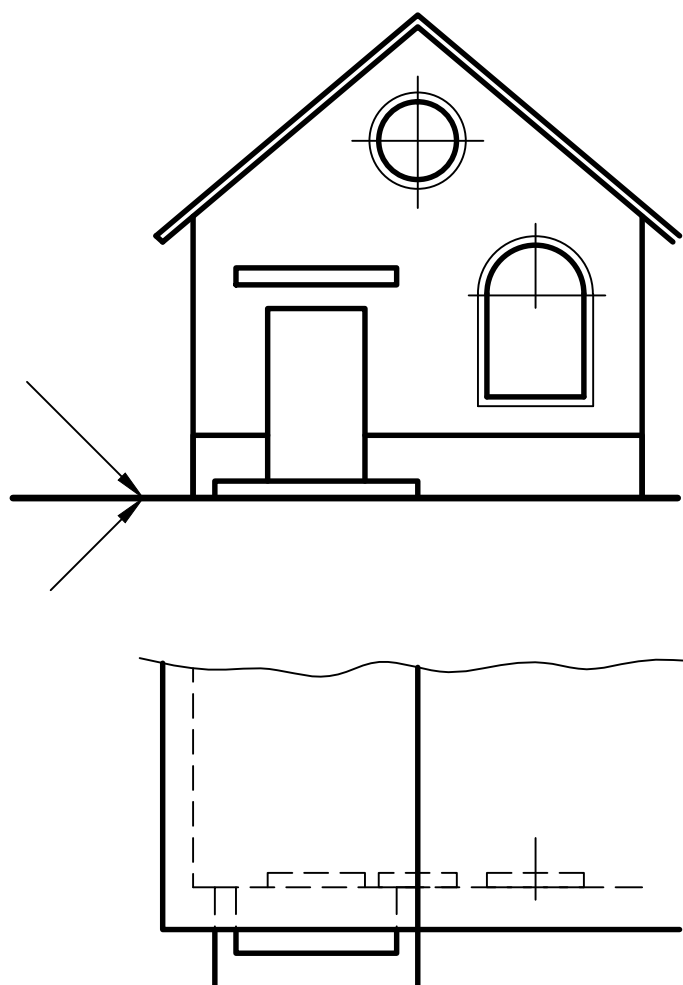
72. Построить собственную и падающую тени козырька.



73. Построить падающую тень ограждения на лестницу.



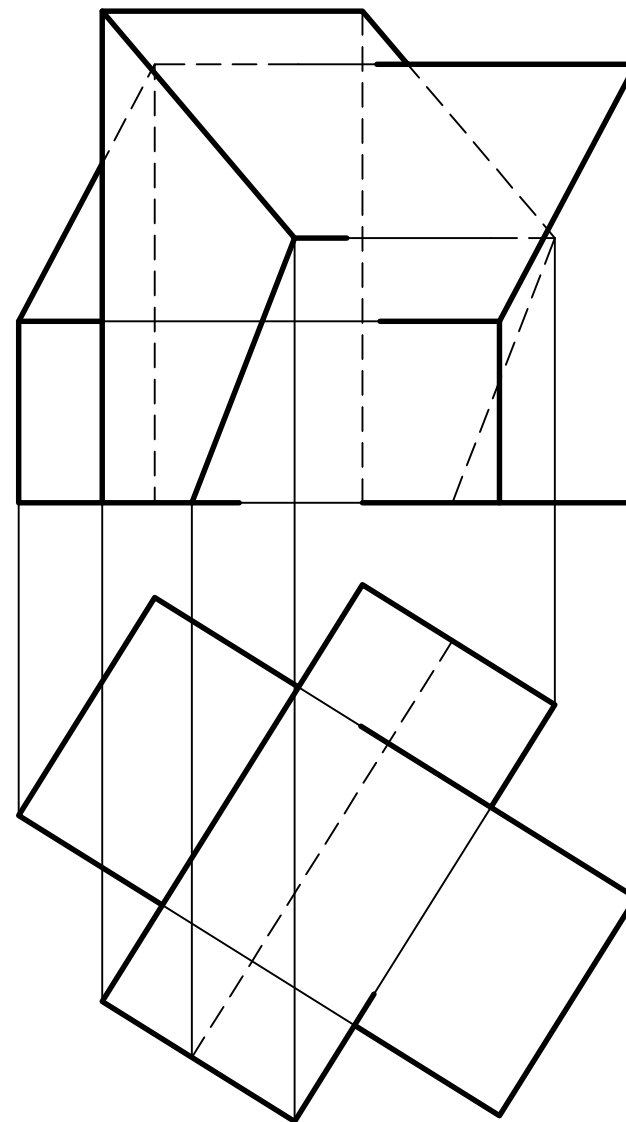
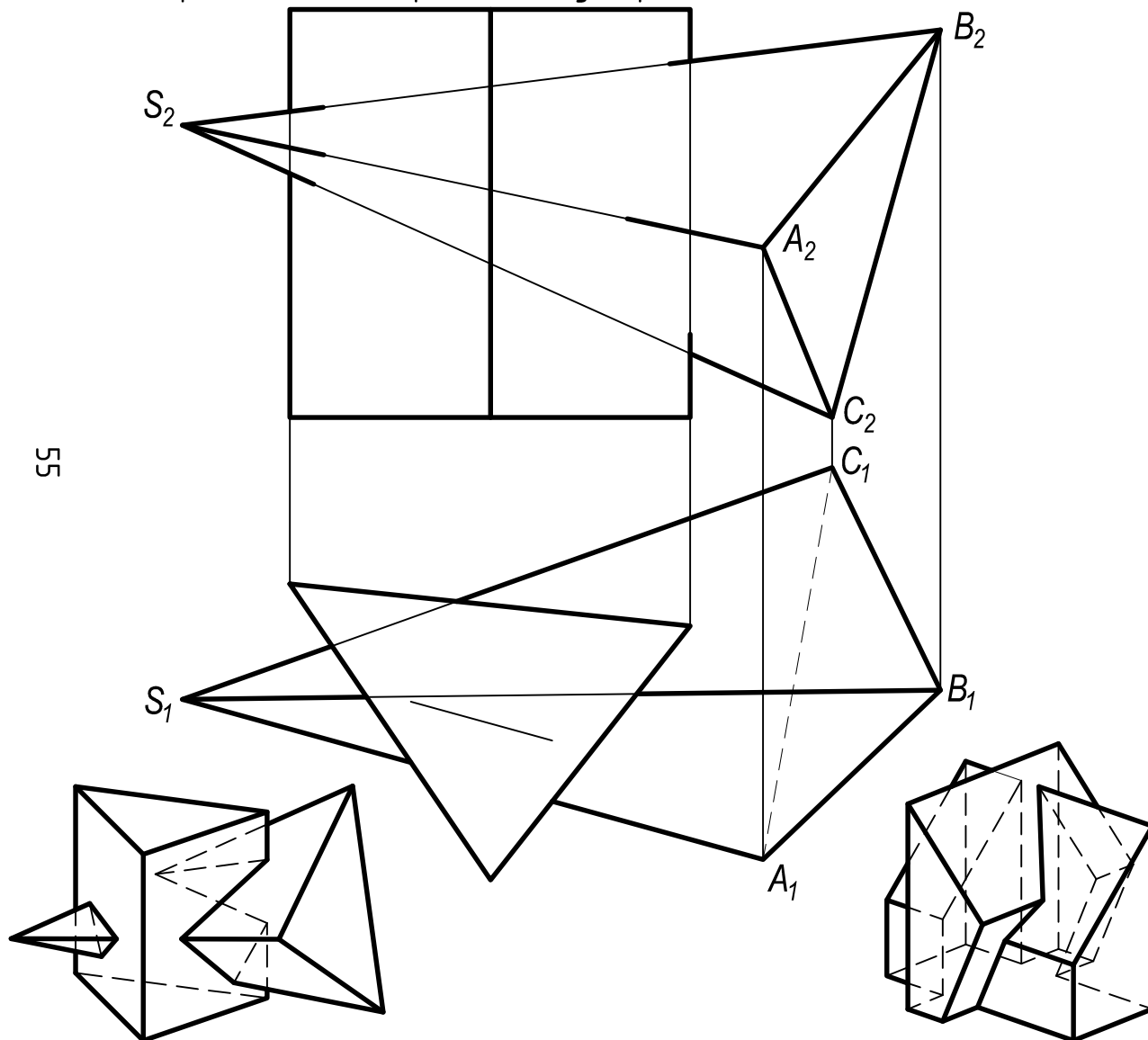
74. Построить тени на фасаде здания.



10. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

75. Построить линию пересечения двух призм.

76. Построить линию пересечения двух призм.



10.1. Покрытия зданий со сложным планом

Пересечения скатов крыши с одинаковым уклоном и свесами в одном горизонтальном уровне у прямоугольного в плане здания проводят без дополнительных построений (рис.22). Построение рёбер крыши начинают с горизонтальной проекции (вида сверху).

Линии пересечения (рёбра) смежных скатов на плане совпадают с биссектрисами углов, образованных проекциями свесов крыши. Рёбра торцевых скатов, пересекаясь в точках 1 и 2, определяют положение проекции горизонтального ребра – конька крыши.

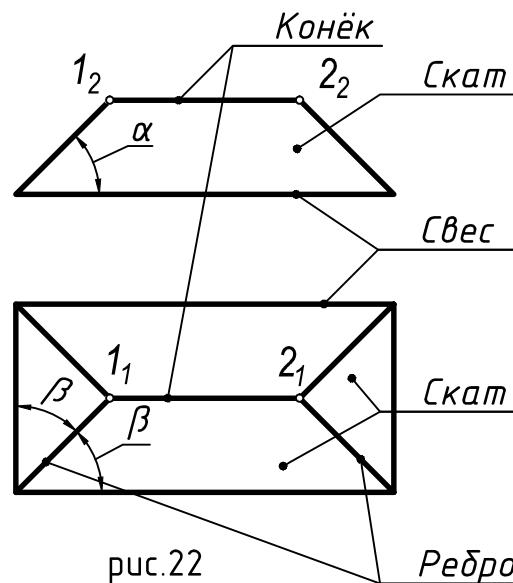


рис.22

Скаты крыши здания со сложным планом находят следующим образом:

- в плане здание разбивают на отдельные прямоугольники, рисуя проекции невидимых на плане свесов (рис.23);
- тонкими линиями проводят биссектрисы углов – линии пересечения смежных скатов (рис.24);
- заканчивают изображение плана крыши с учётом принадлежности и видимости рёбер полученным плоскостям скатов.

Фасад крыши строят по заданному углу наклона α её скатов к горизонтальной плоскости (рис.25).

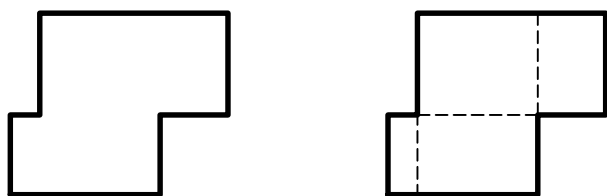


рис.23

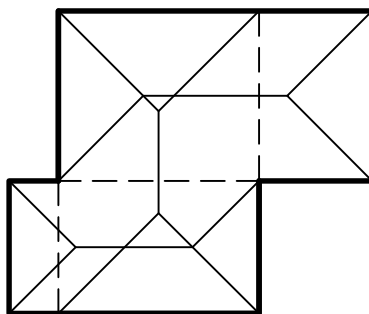
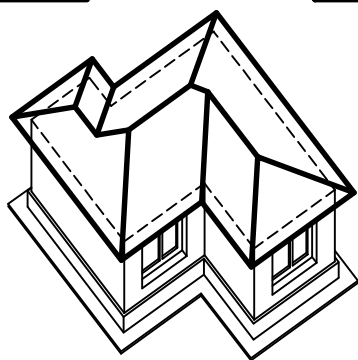


рис.24

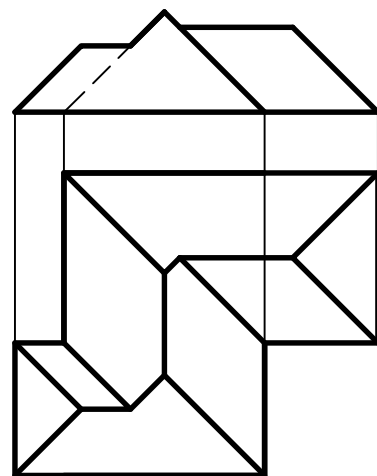
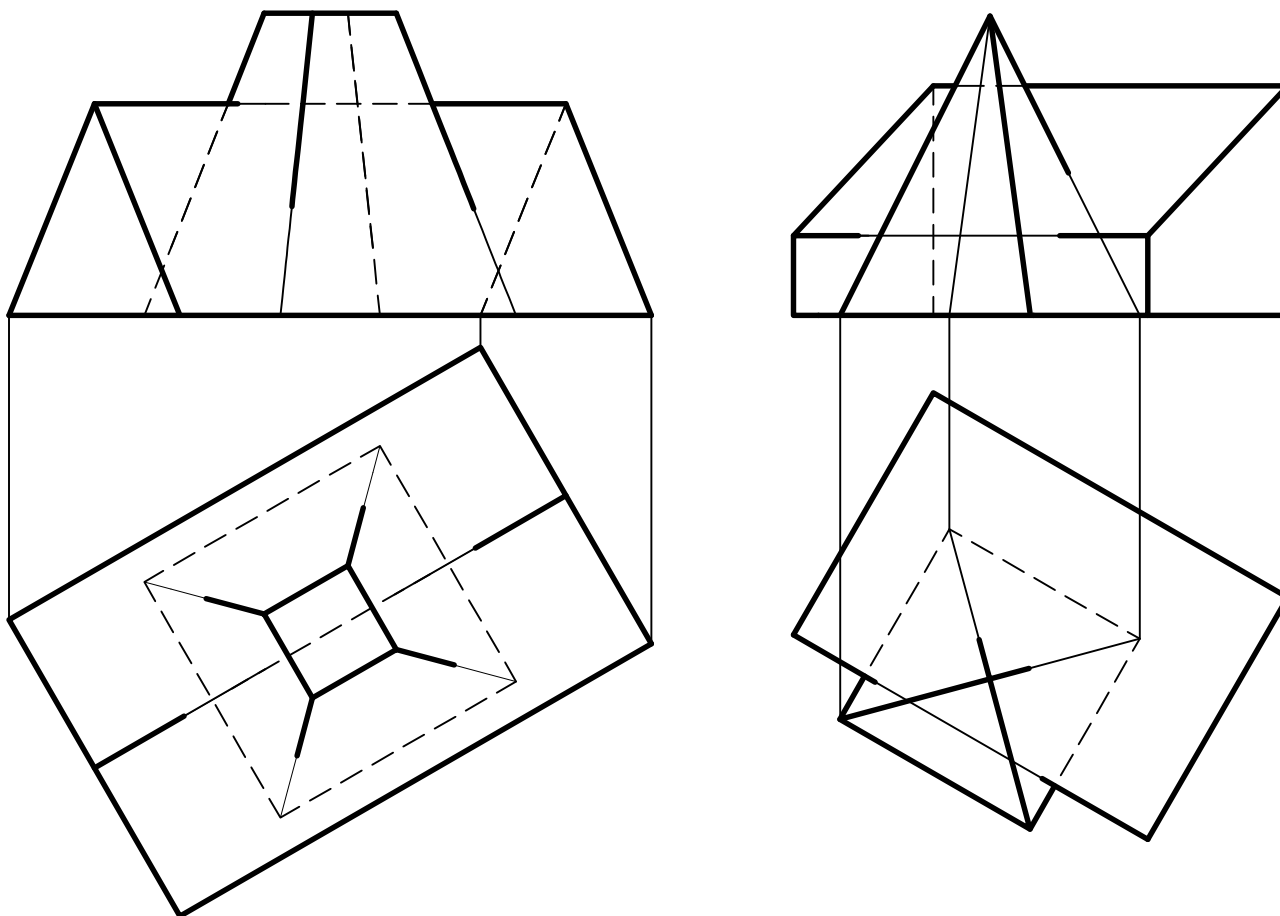
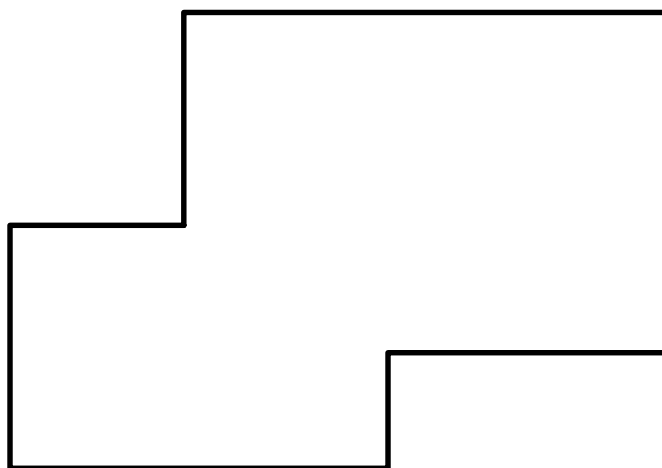
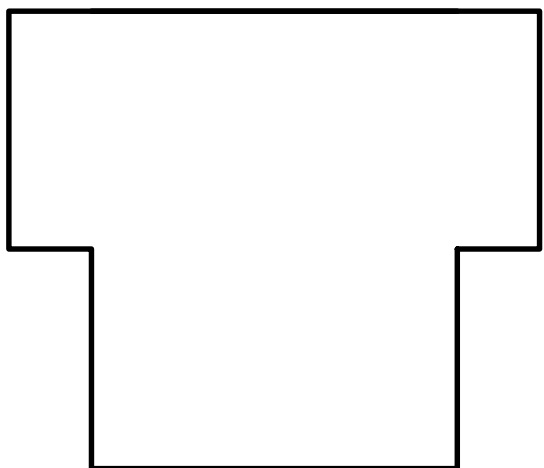


рис.25

77. Построить линии пересечения крыш в виде призмы и пирамиды. Вспомогательные секущие плоскости рекомендуется проводить через горизонтальные проекции рёбер пирамиды и призмы.

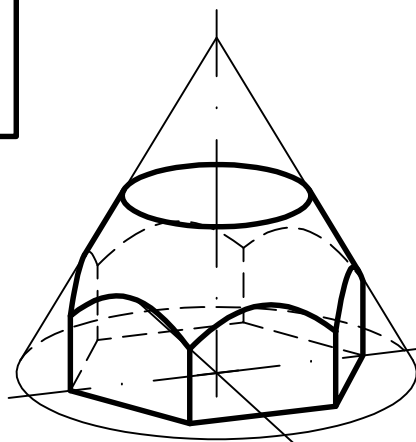
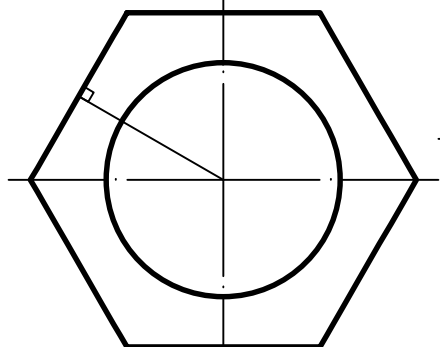
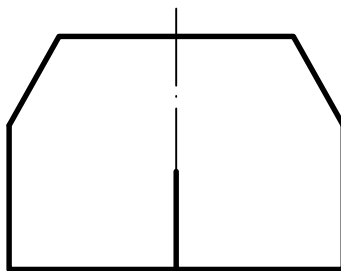
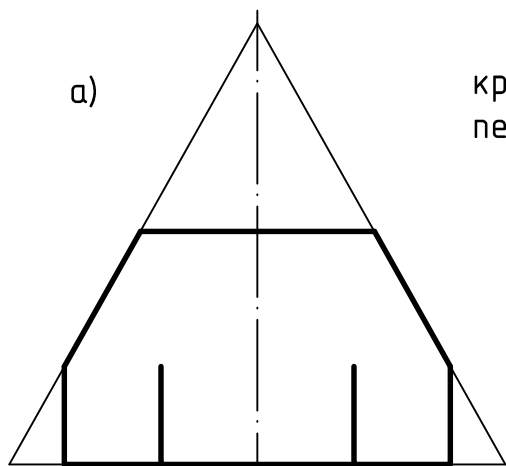


78. Построить линии пересечения крыш над зданиями, если все крыши имеют одинаковый уклон равный 45° , а свесы находятся на одном горизонтальном уровне.

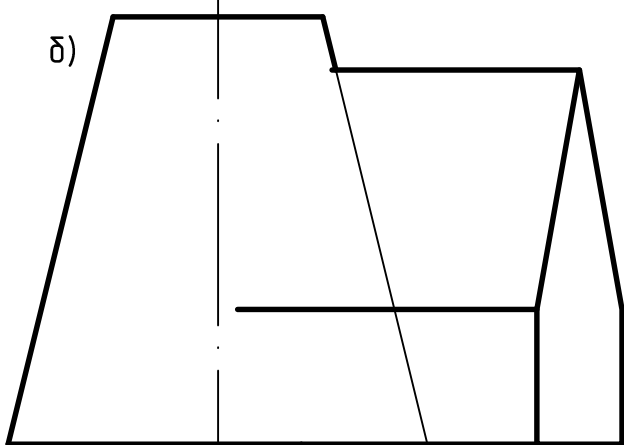


79. Построить линию пересечения гранной и кривой поверхностей. Показать видимость линий пересечения. Обозначить опорные точки.

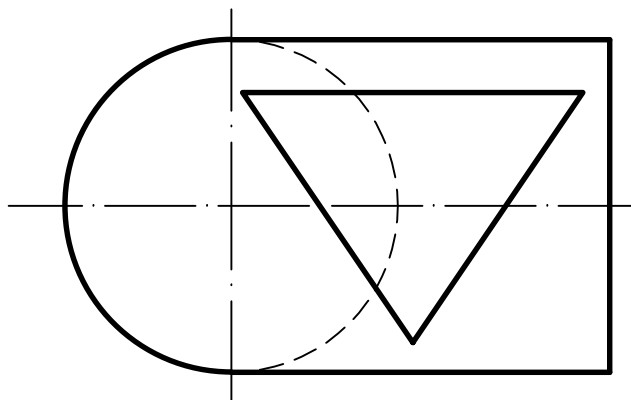
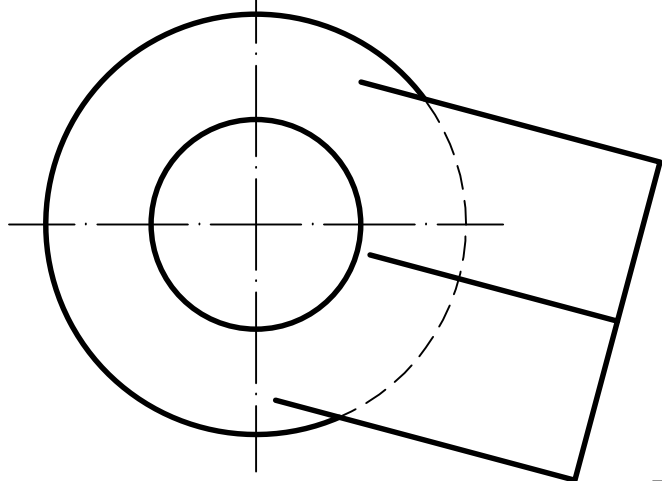
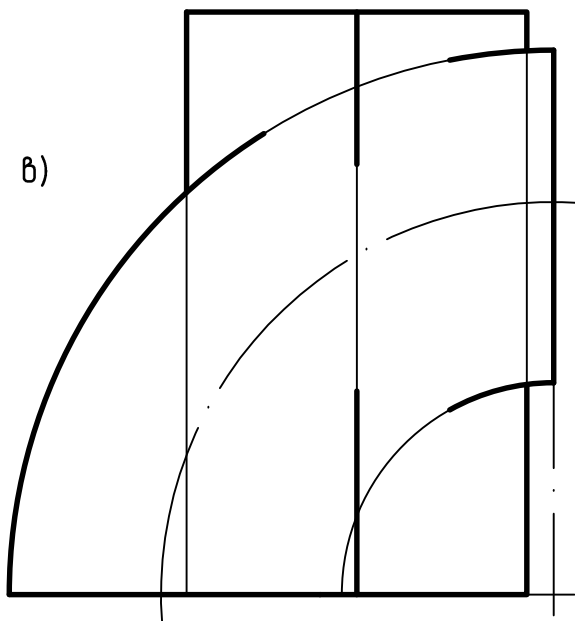
а)



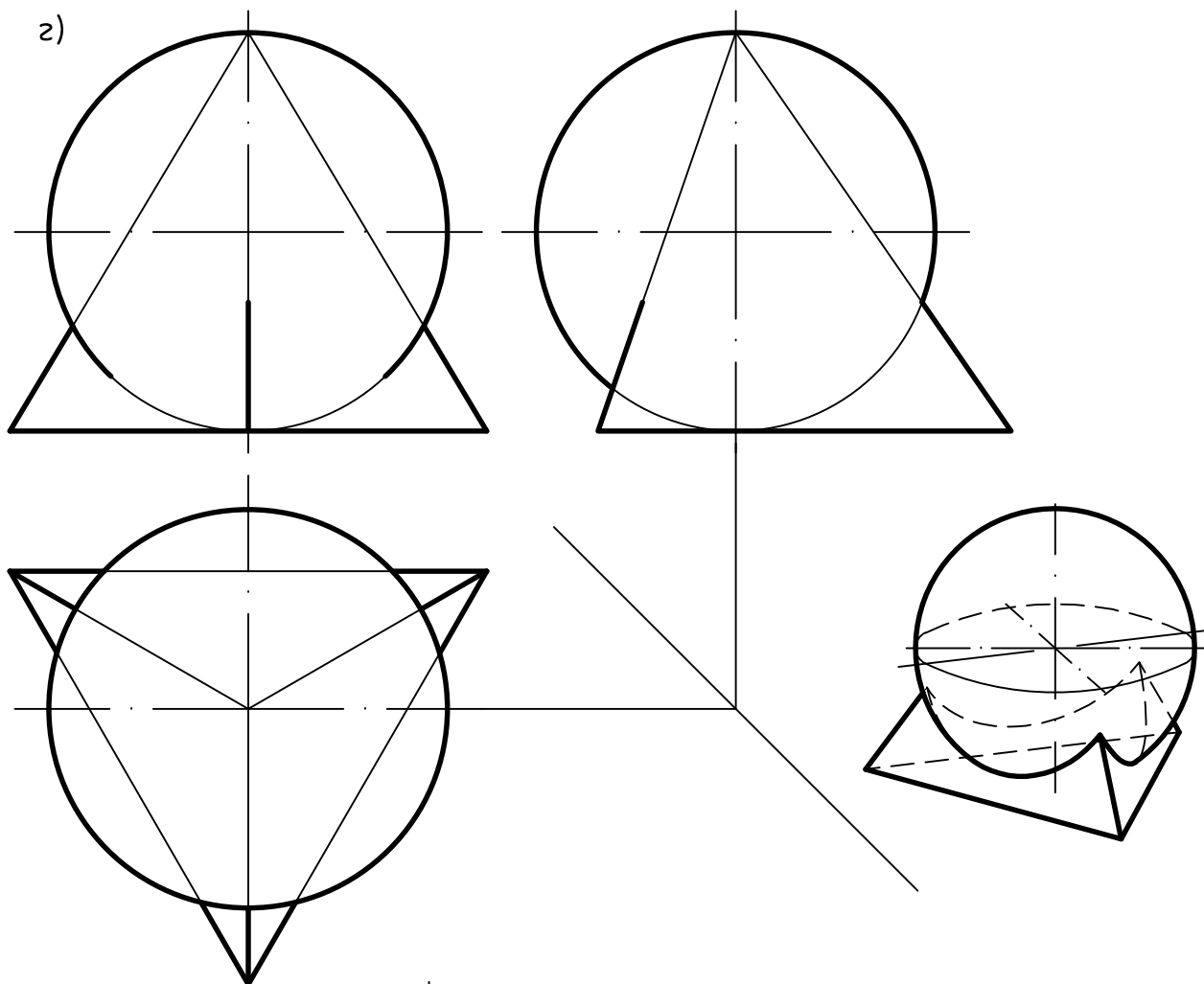
б)



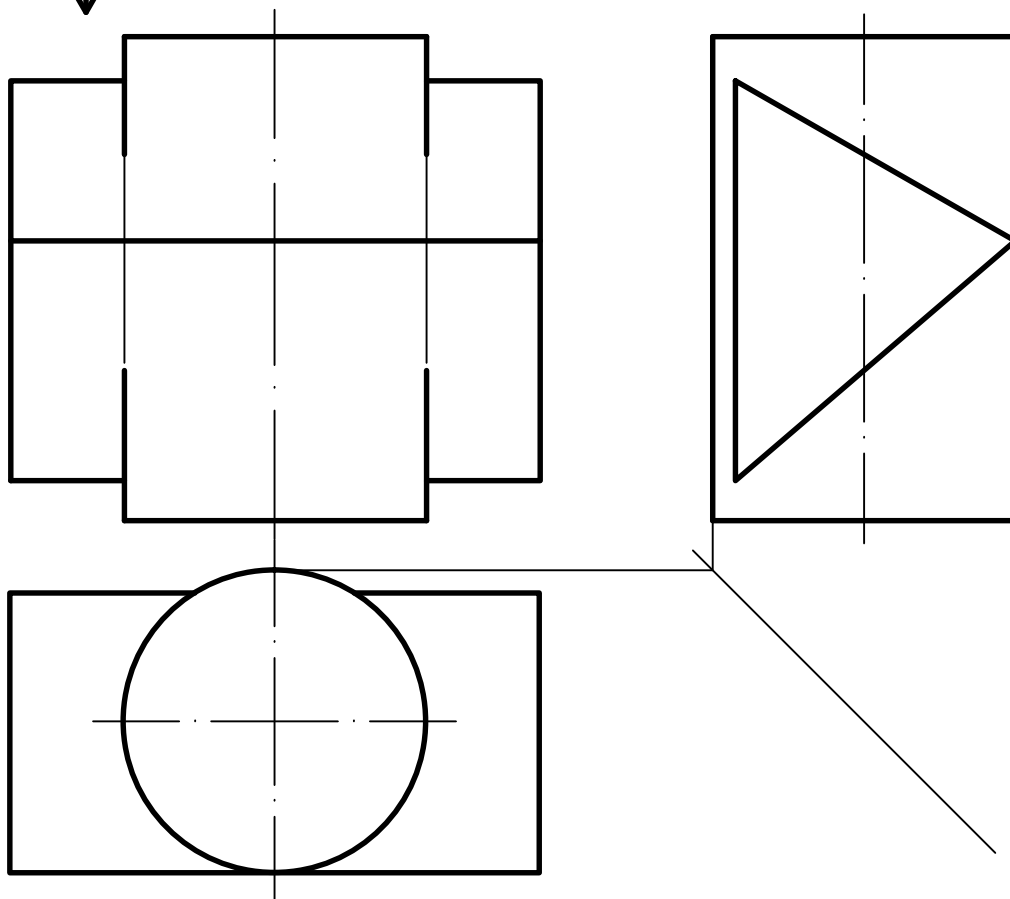
в)



2)

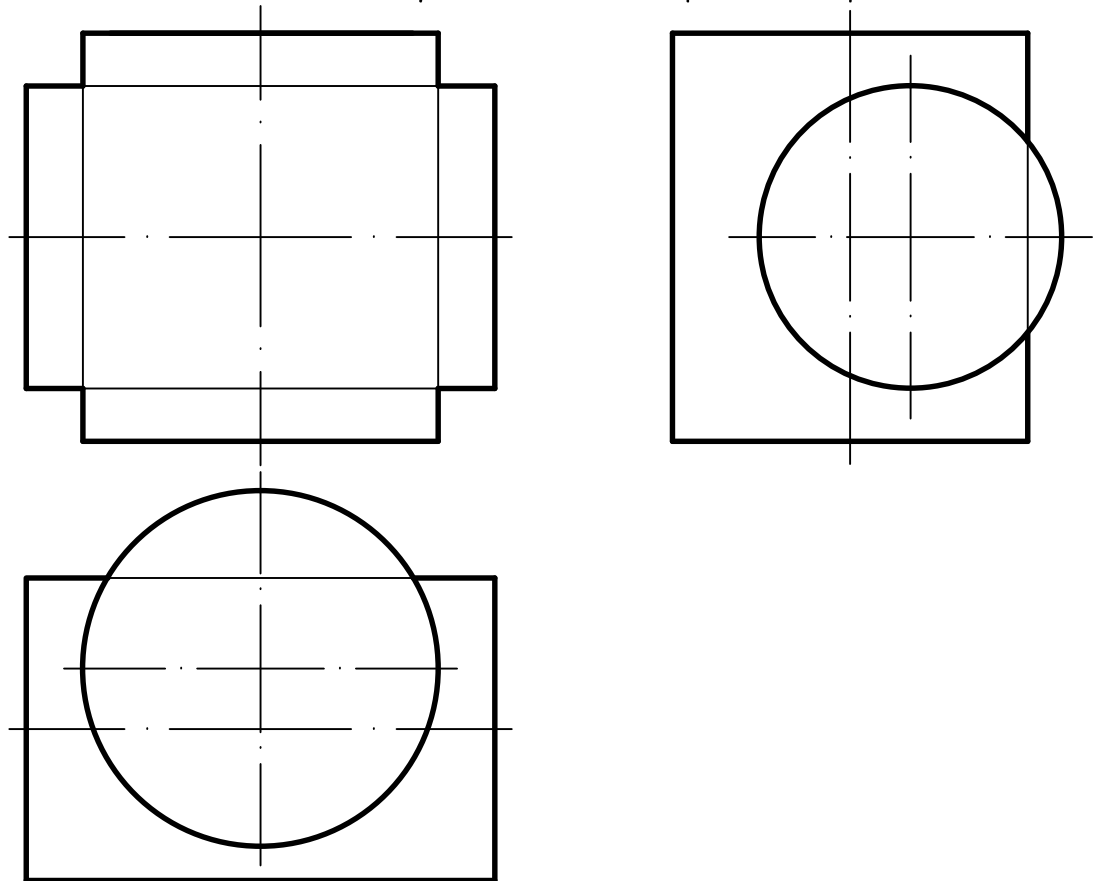


a)

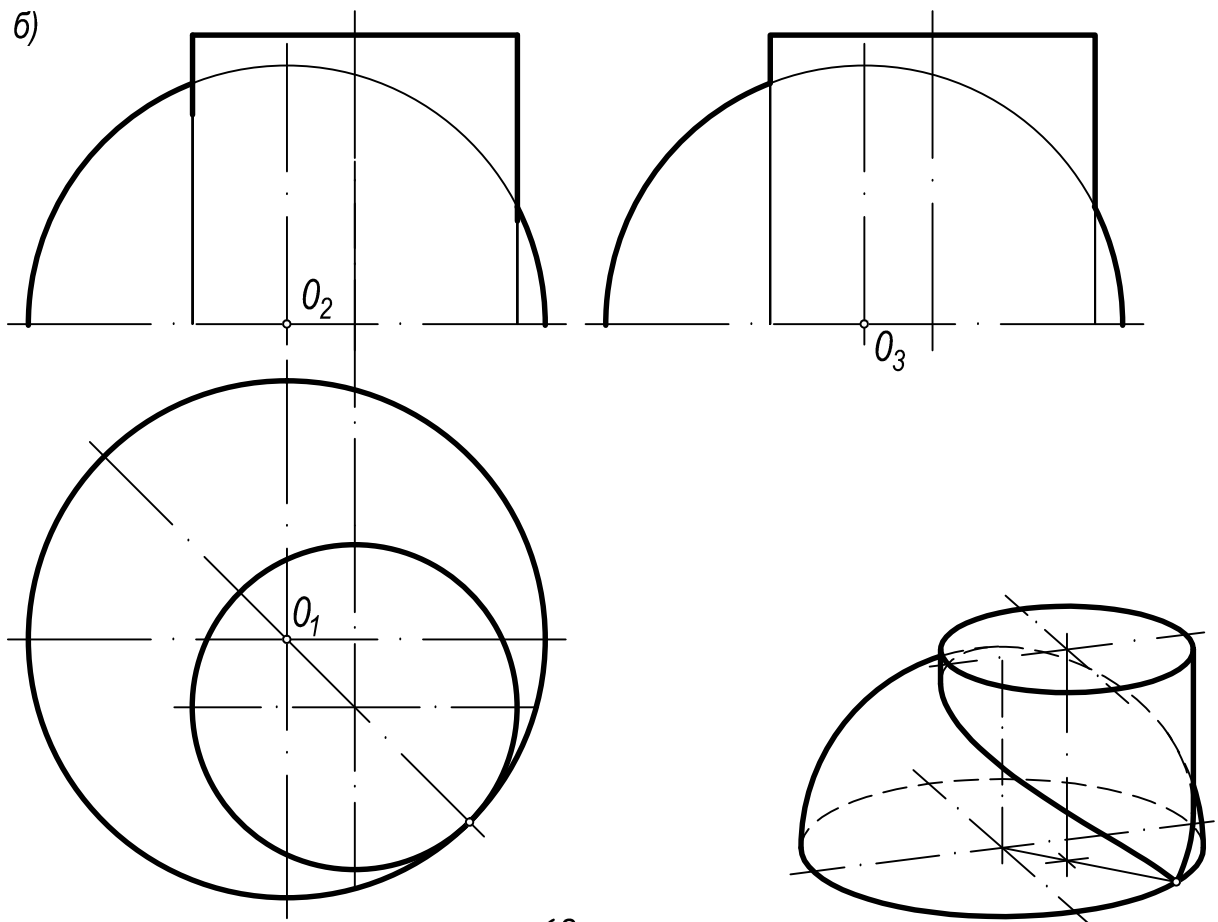


80. Построить линии пересечения кривых поверхностей. Обозначить опорные точки, показать видимость линий пересечения и очерков поверхностей.

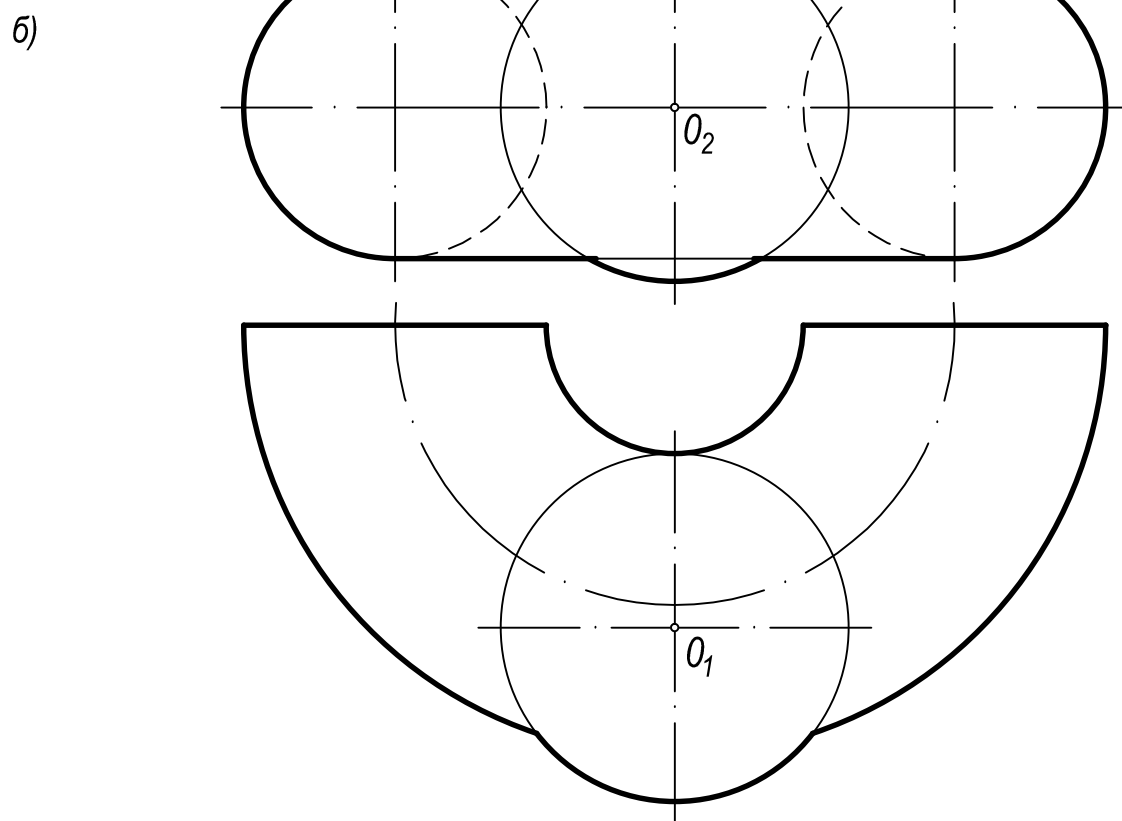
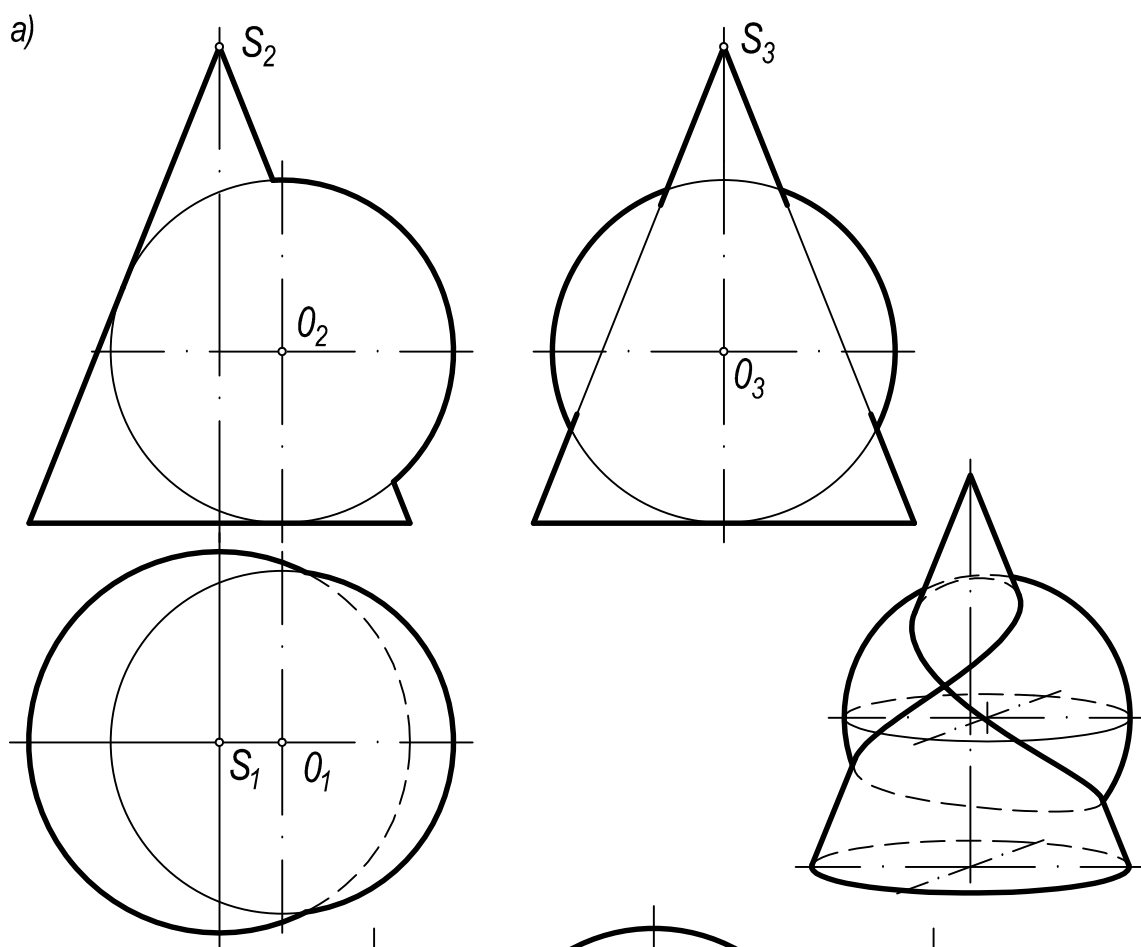
а)



б)



81. Построить линии пересечения кривых поверхностей. Обозначить опорные точки, показать видимость линий пересечения и очерков поверхностей.



10.2. Способ вспомогательных концентрических сфер

Поверхности с общей осью вращения называются соосными. Они пересекаются между собой по окружности. Окружность пересечения проецируется в отрезок прямой, если общая ось поверхностей параллельна плоскости проекций (рис.29). Эта аксиома положена в основу решения задач способом вспомогательных сфер. Метод концентрических сфер применяют в случае, если оси обеих поверхностей вращения параллельны одной плоскости проекций или одна ось является проецирующей прямой, а вторая – линией уровня.

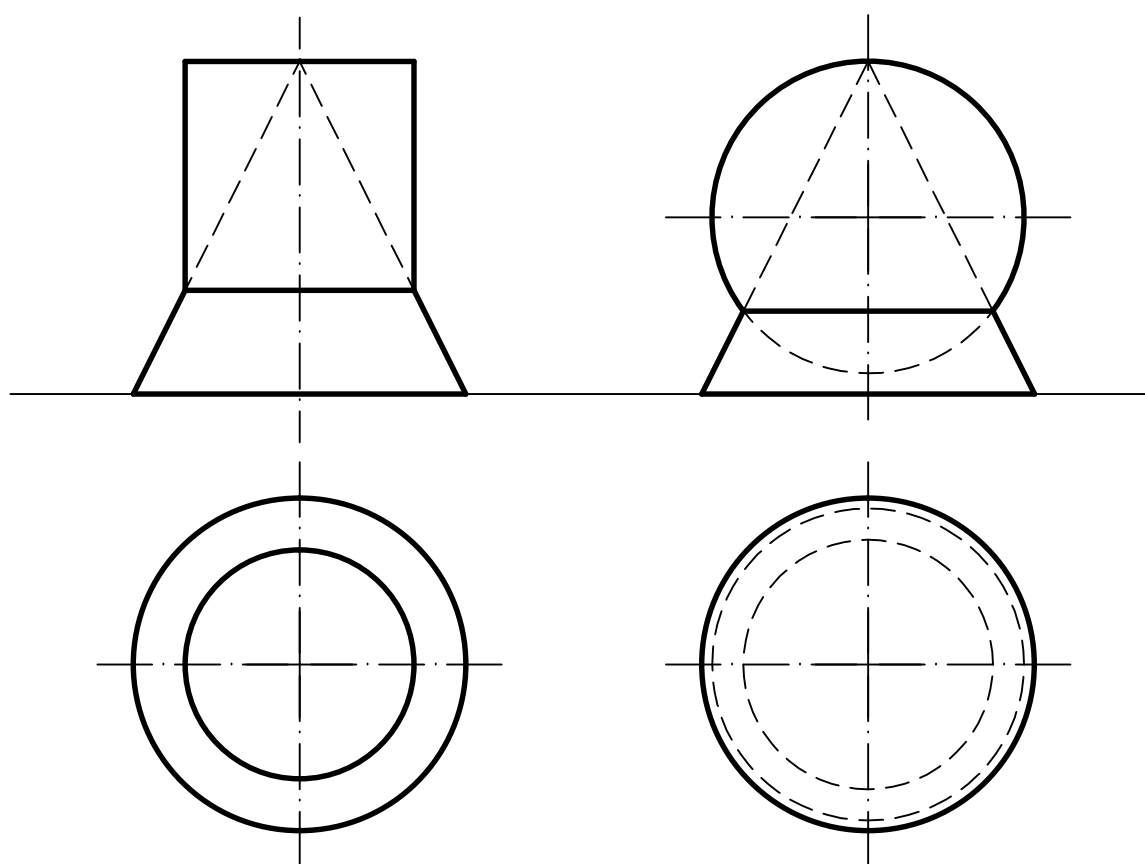


рис.29

Обе поверхности вращения пересекают вспомогательной сферой, центр которой находится в точке пересечения их осей. Вспомогательная сфера пересекает поверхности по окружностям, которые проецируются на плоскость проекций в отрезки прямых. При пересечении этих окружностей определяют некоторые точки линии пересечения.

Пример. Два конуса (рис.30) имеют общую плоскость симметрии Λ , параллельную плоскости Π_2 . Очерки конусов, лежащие в плоскости общей симметрии Λ , пересекаются в точках 1, 2, 3, 4. За центр сфер принимаем точку пересечения осей конусов O . Радиус минимальной сферы R_{min} равен расстоянию от точки O (O_2) до точки касания сферы с фронтальным очерком конуса Δ .

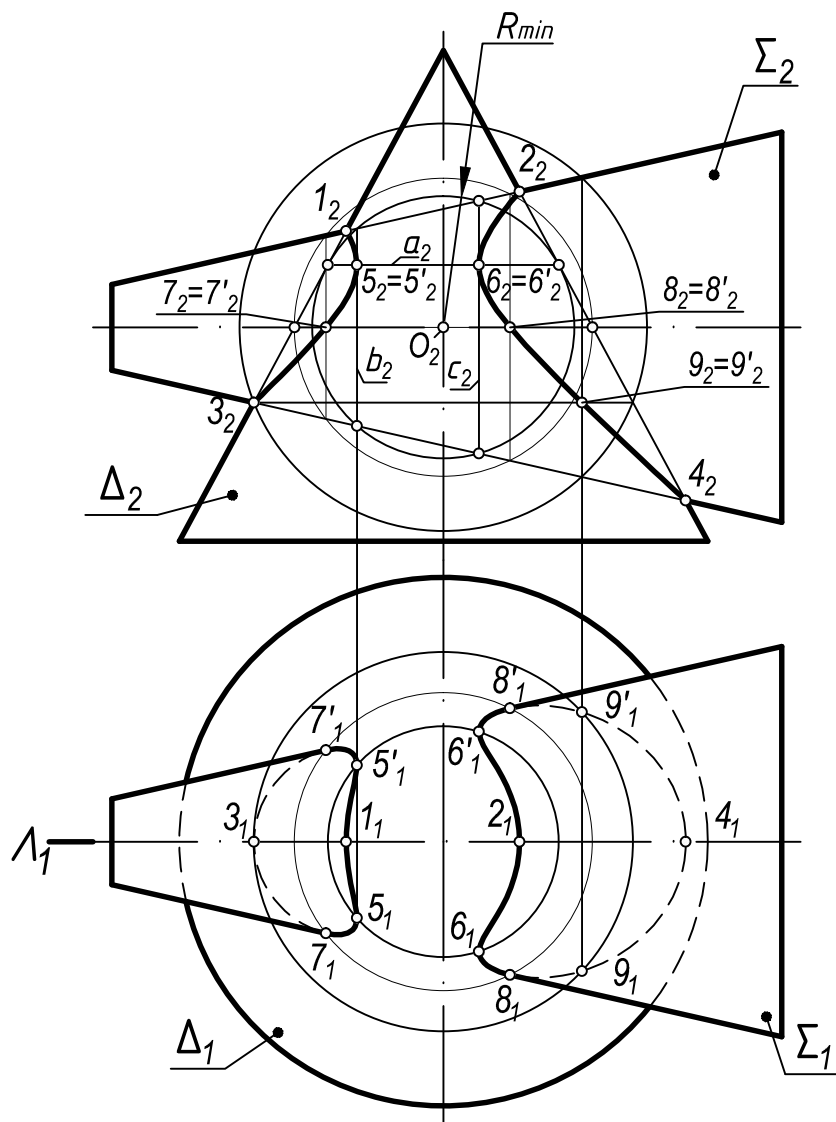
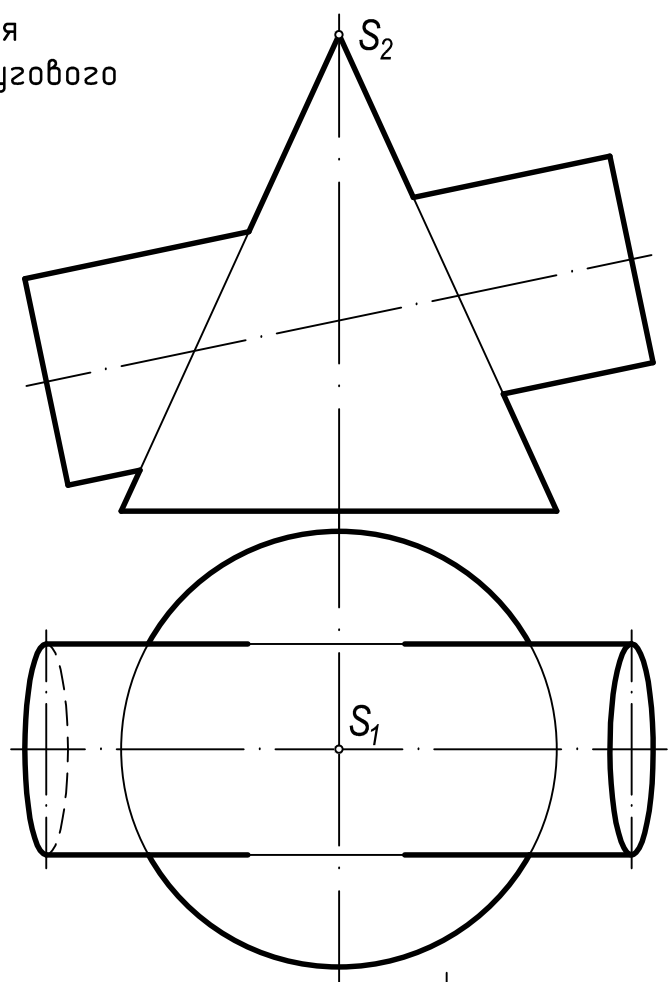
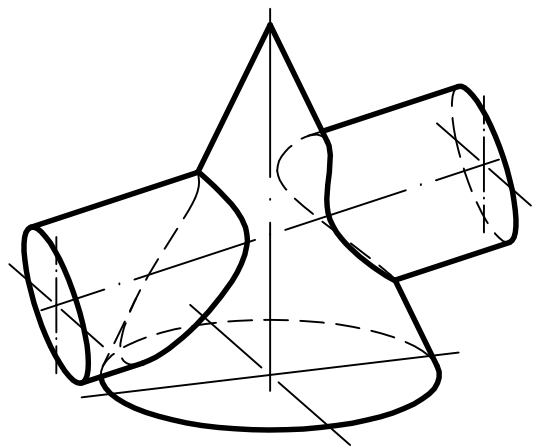


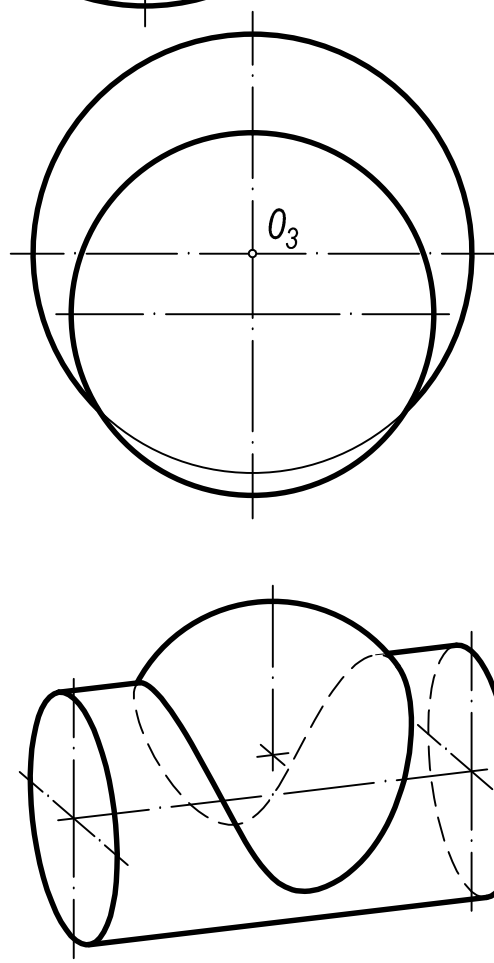
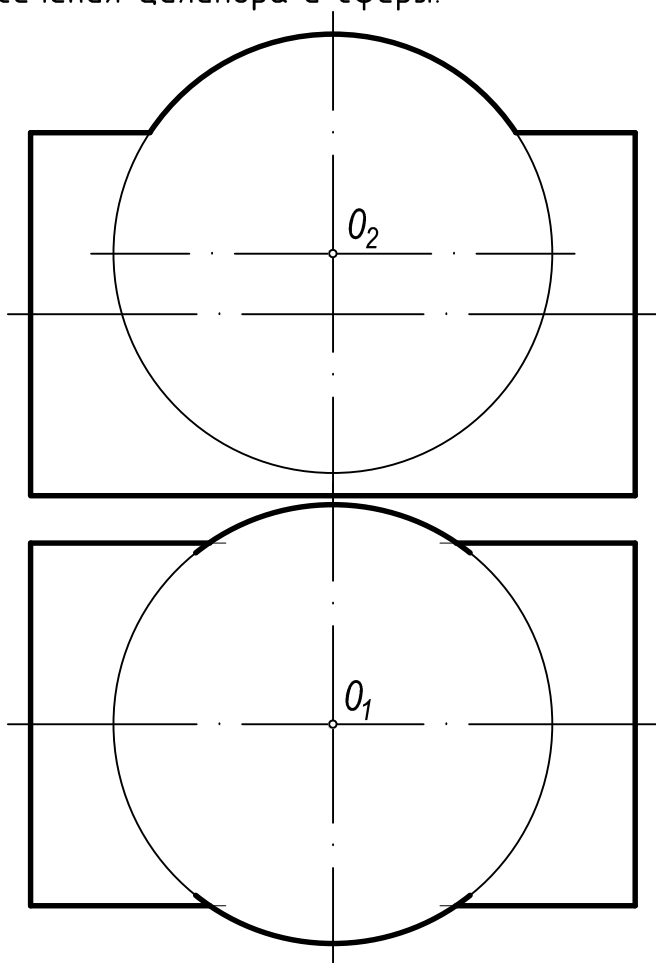
рис.30

Сфера R_{min} касается конуса Δ по окружности a (a_2), и пересекает конус Σ по двум окружностям b (b_2) и c (c_2). Окружности пересекаются в точках 5, 5' и 6, 6'. Вторую сферу проведём через точки пересечения фронтального очерка конуса Δ с осью конуса Σ . Эта сфера определит 7, 7', 8, 8' – точки смены видимости линии пересечения для плоскости проекций Π_1 . Следующая сфера радиуса $|O_2 - Z_2|$ определит пару точек 9 и 9'. Соединив в плоскости проекций Π_2 точки линии пересечения, отметим, что получились две замкнутых пространственных кривых линии, которые на плоскость проекций Π_2 проецируются в виде плоской кривой второго порядка – гиперболы. Вид пересечения – проницание.

82. Построить линии пересечения кривых поверхностей: прямого кругового конуса и цилиндра.



83. Построить линию пересечения цилиндра и сферы.



10.3. Способ вспомогательных эксцентрических сфер

Необходимо отметить следующую закономерность: если оси поверхностей вращения второго порядка пересекаются и параллельны плоскости проекций, то линия их пересечения проецируется на эту плоскость в виде плоской кривой второго порядка.

На рис.31 представлено произвольное круговое сечение m (m_2) тора плоскостью Σ (Σ_2). Центры всех сфер, которые могут пересечь тор по этой окружности, располагаются на прямой l (l_2), проходящей через центр C (C_2) окружности m перпендикулярно её плоскости Σ (Σ_2). В качестве примера построена произвольная сфера с центром в точке O (O_2) на прямой l и радиусом R . Для построения линии пересечения двух поверхностей вращения, у которых оси пересекаются и составляют плоскость уровня, а круговые сечения одной из поверхностей не параллельны друг другу используют сферы различных центров и радиусов. Это способ вспомогательных эксцентрических сфер.

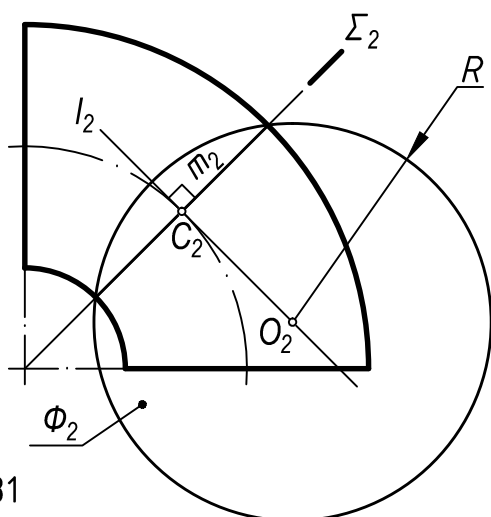


рис.31

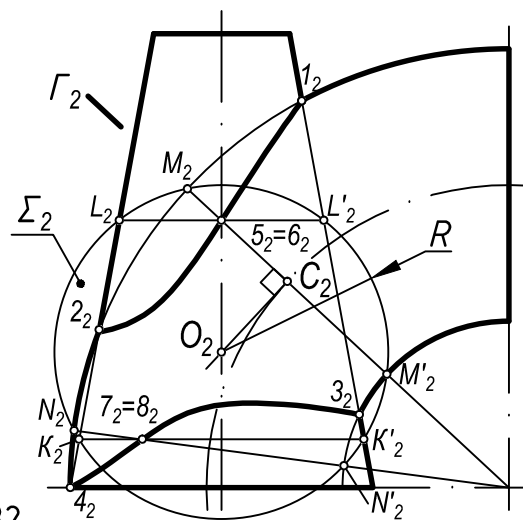
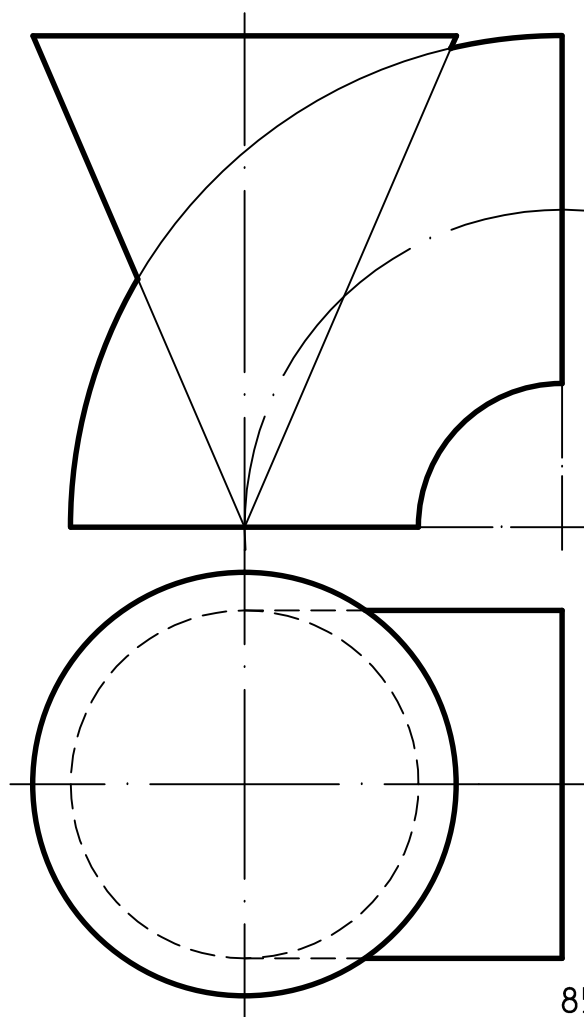
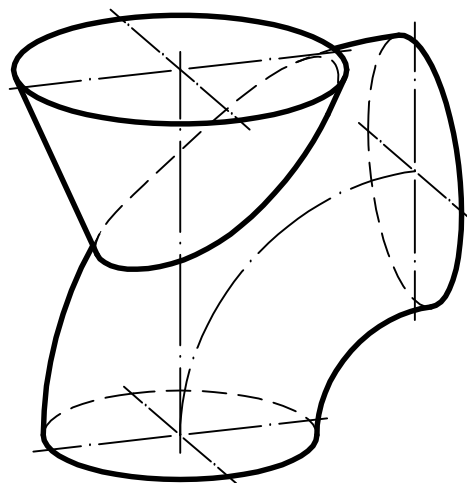


рис.32

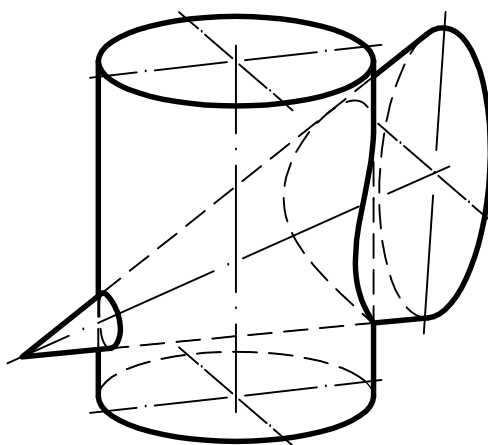
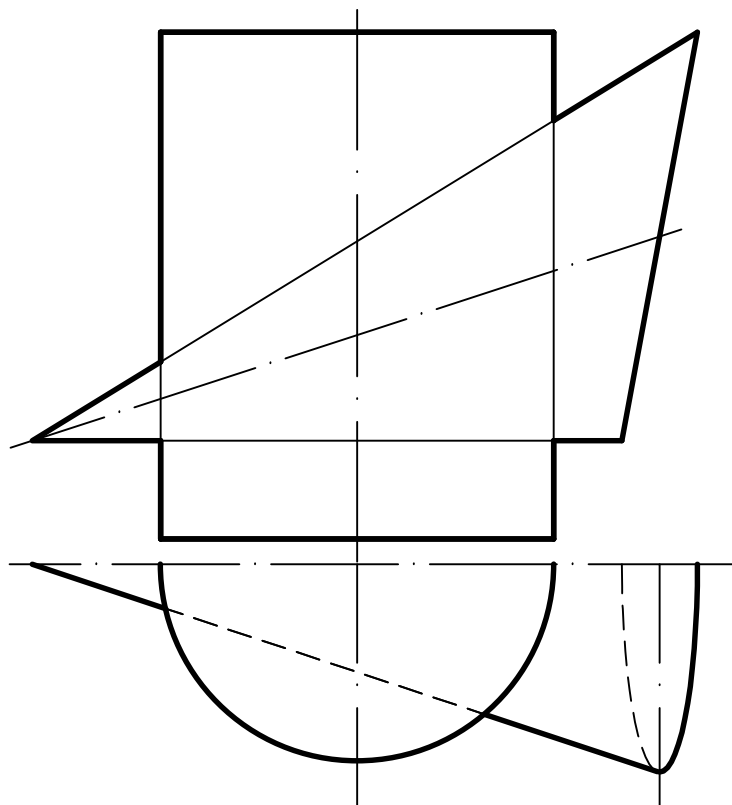
Проекция линии пересечения конуса вращения и тора (рис.32) построена способом вспомогательных эксцентрических сфер. Для определения центра вспомогательной сферы Σ (Σ_2), пересекающей обе поверхности по окружностям нужно: провести произвольную фронтальную проекцию окружности тора MM' ($M_2M'_2$), полученную при пересечении тора фронтально проецирующей плоскостью Γ (Γ_2) и через середину её проекции C_2 , восстановить перпендикулярную плоскости окружности прямую OC (O_2C_2). Центр сферы – точка O (O_2) получен в результате пересечения перпендикуляра с осью вращения конуса. Из точки O (O_2) проводят вспомогательную сферу Σ радиуса $|O_2M_2|$, которая пересечёт тор ещё по одной окружности NN' , а конус по двум окружностям LL' и KK' . Каждая пара окружностей пересекаются в двух общих точках 5, 6, и 7, 8, принадлежащих линиям пересечения поверхностей конуса и тора. Точки 1,2,3,4, линии пересечения найдены пересечением фронтальных очерков, которые лежат в плоскости общей симметрии, параллельной плоскости Π_2 .



84. Построить линию пересечения кривых поверхностей: прямого кругового конуса и тора.



85. Построить во фронтальной проекции линию пересечения прямого кругового цилиндра и эллиптического конуса.



10.4. Частные случаи пересечения поверхностей второго порядка

Две поверхности второго порядка в общем случае пересекаются по пространственной кривой линии четвёртого порядка. В некоторых частных случаях биквадратная кривая линия распадается на две плоские кривые второго порядка. Опуская доказательства, перечислим некоторые теоремы и примеры.

Теорема 1. Если две поверхности второго порядка пересекаются по одной плоской кривой, то существует другая плоская кривая, по которой они пересекаются.

На рис.33 изображены фронтальные проекции сферы Φ_2 и эллиптического цилиндра Σ_2 , имеющие общую окружность m_2 с центром в точке O_2 . Плоскость общей симметрии поверхностей, образованная осью цилиндра i и центром сферы C , параллельна плоскости проекций Π_2 . Общая окружность m – это одна из плоских кривых второго порядка распадающейся линии пересечения. Плоскость второй плоской кривой пересечения, перпендикулярная плоскости общей симметрии, спроецируется на плоскость Π_2 в виде отрезка прямой n_2 . Для её построения следует соединить точки пересечения очерков поверхностей A и B .

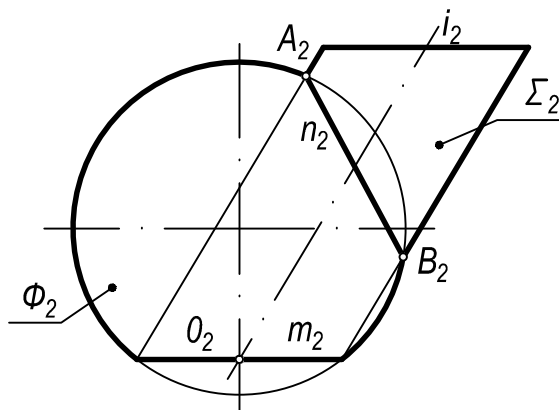


рис.33

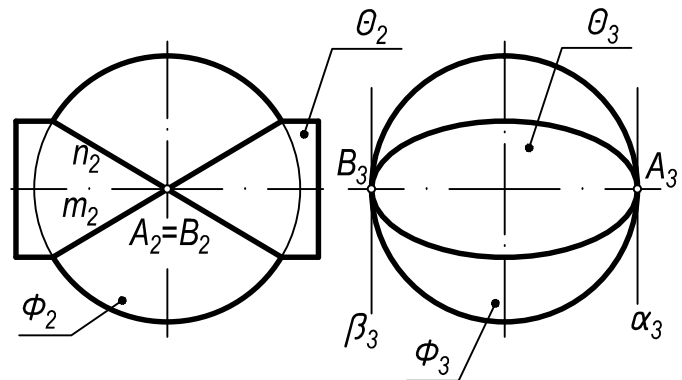


рис.34

Теорема 2. Если две поверхности второго порядка имеют касание в двух точках A и B , то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка, плоскости которых проходят через отрезок AB , соединяющий точки касания.

На рис.34 показаны пересекающиеся по двум окружностям сфера Φ и эллиптический цилиндр Θ . Точки касания A и B принадлежат соответственно касательным плоскостям α , β .

Теорема 3 (теорема Г. Монжа). Если две поверхности второго порядка описаны около третьей или вписаны в неё, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка. Плоскости этих кривых проходят через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания.

В соответствии с этой теоремой линии пересечения конуса и цилиндра (рис.35), описанных около сферы, будут плоскими кривыми – эллипсами.

Фронтальные проекции линий пересечения изображаются прямыми A_2B_2 и C_2D_2 . Теорема Монжа находит применение при конструировании трубопроводов. Вписывание сферы в цилиндры одинакового диаметра позволяет быстро определить их пересечение.

Также по этой теореме легко построить пересечения крестового свода. Два полуцилиндра равного диаметра, имеющие общую точку и касательную плоскость, пересекаются по двум плоским кривым – полуэллипсам.

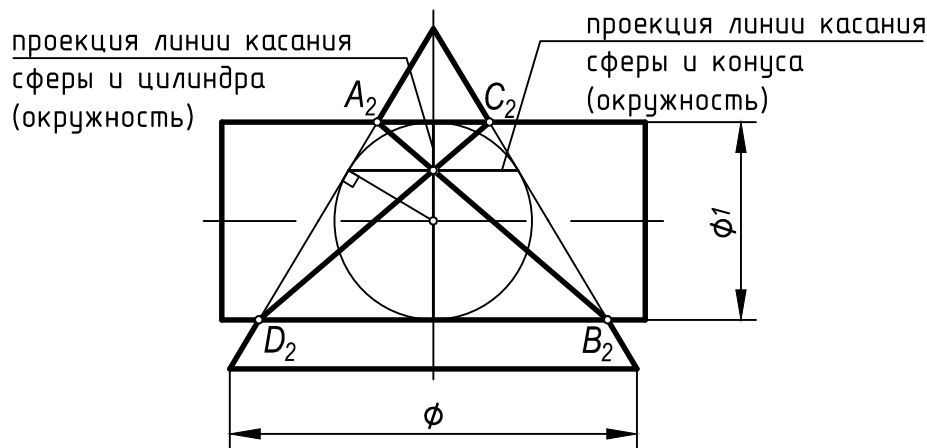


рис.35

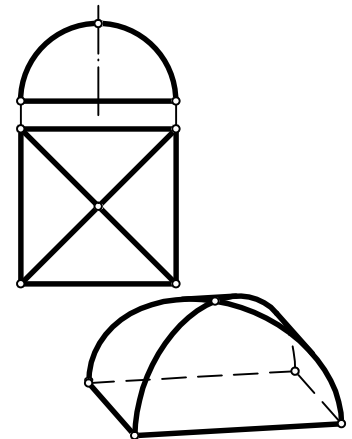
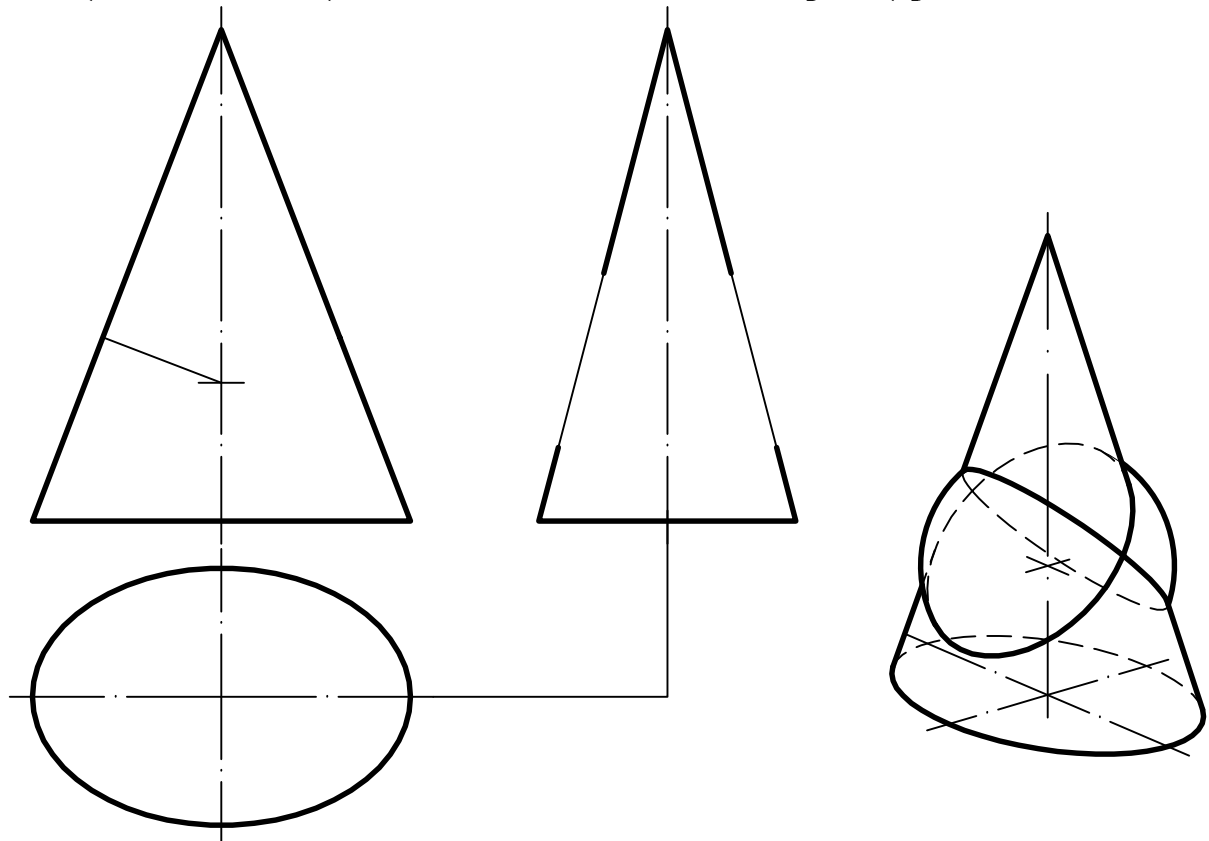


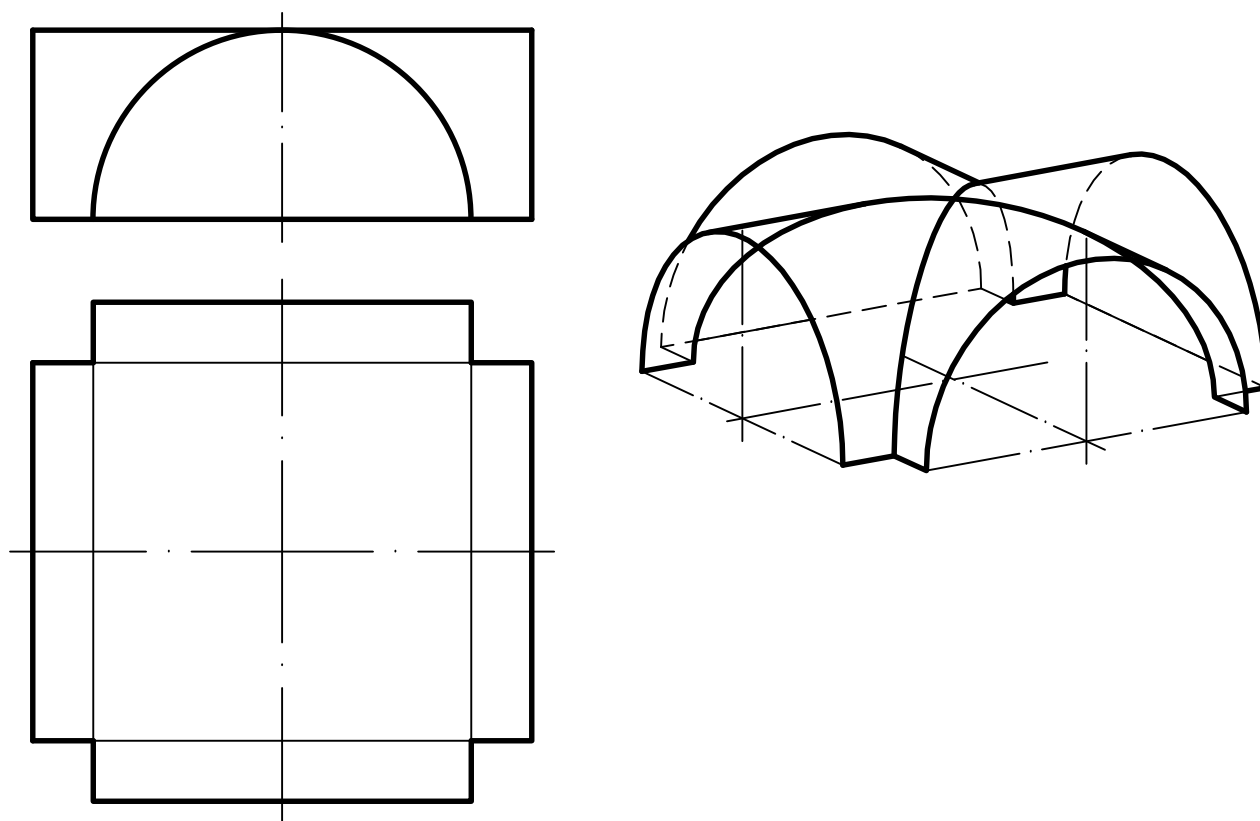
рис.36

Эта закономерность имеет важное значение при проектировании различных архитектурных форм и пространственных конструкций, например сводов, на основе поверхностей второго порядка, так как упрощает выполнение сопряжений этих поверхностей (рис.36).

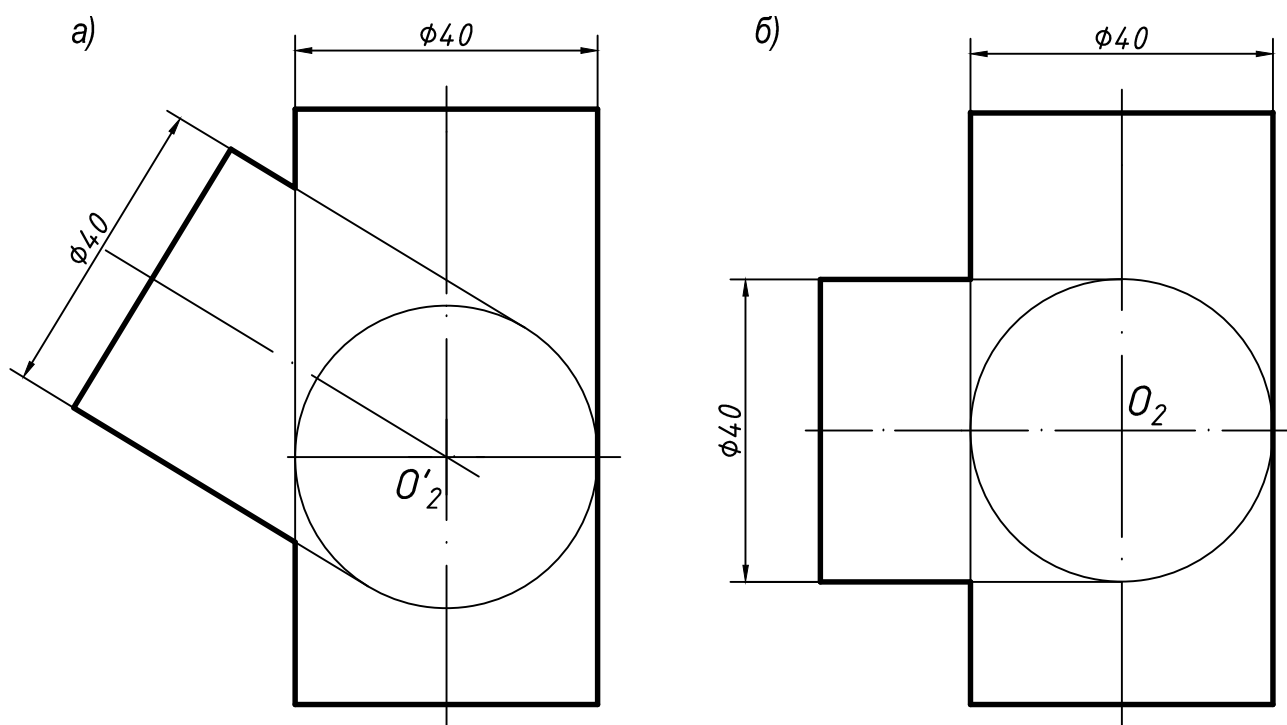
86. Построить на поверхности эллиптического конуса круговые сечения.



87. Построить линии пересечения цилиндров равных диаметров.



88. Построить линии пересечения заданных поверхностей вращения.



11. КОМПЛЕКСНЫЕ ЗАДАЧИ

Комплексными называют задачи, искомым элементом которых должен отвечать нескольким условиям. Условия объединяют в отдельные геометрические множества, каждое из которых выполняет часть условий задачи. Эти множества, пересекаясь друг с другом, позволяют найти ответ.

Пример. Через точку A провести прямую l , пересекающую прямую m и параллельную плоскости $\Gamma(a \cap b)$ (рис.37). Искомая прямая l :

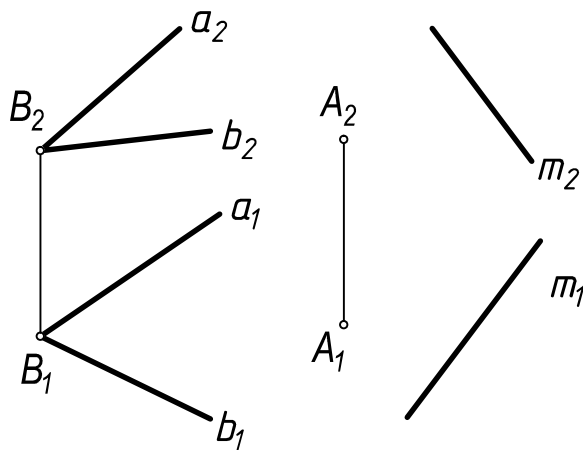


рис.37

1. проходит через точку A ;
2. пересекает прямую m ;
3. параллельна плоскости $\Gamma(a \cap b)$.

Объединив эти условия, получим два множества.

Первое множество – плоскость $\Delta(A, m)$, отвечает двум первым условиям. $\Delta(A, m)$ задана на чертеже точкой A и прямой m . (рис.38,а)

Второе множество – плоскость Γ' удовлетворяет первому и третьему условиям. Плоскость Γ' параллельна плоскости $\Gamma(a \cap b)$ и проходит через точку A . (рис.38,б). Задача сводится к построению линии пересечения Δ и Γ' .

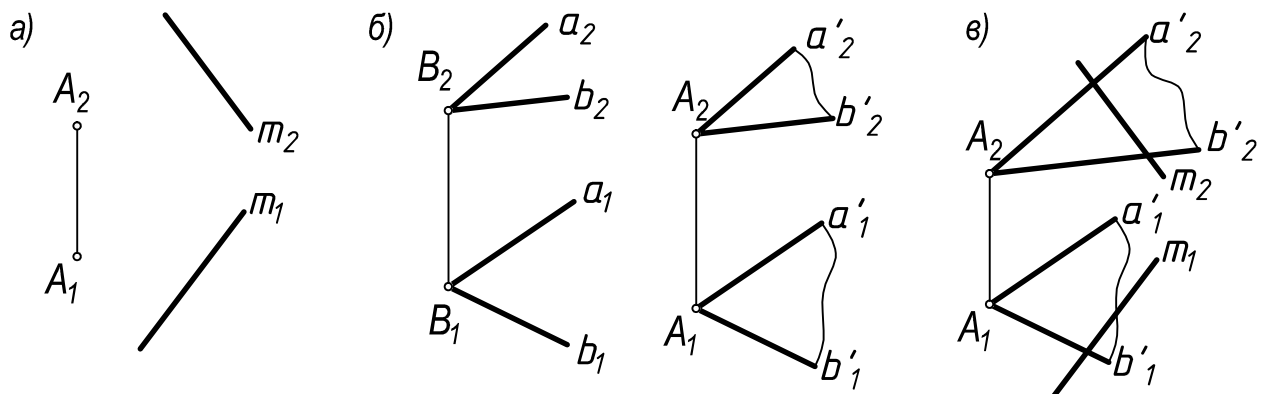


рис.38

Решим каждое из определенных множеств как отдельную задачу:

Решение первого множества: через точку A можно провести множество прямых l , пересекающих прямую m . Этим множеством является плоскость Δ , содержащая точку A и прямую m .

$$1. \{l' : (l' \ni A, l' \cap m) \} \Rightarrow \Delta(A, m).$$

Решение второго множества: через точку A можно провести множество прямых l , параллельных плоскости $\Gamma(a \cap b)$. Множеством таких прямых является плоскость Γ' , параллельная плоскости $\Gamma(a \cap b)$ и проходящая через точку A .

$$2. \{l' : (l' \ni A, l' \parallel \Gamma(a \cap b)) \} \Rightarrow \Gamma' \ni A, \Gamma' \parallel \Gamma(a \cap b).$$

Определим искомую геометрическую фигуру – прямую l , как результат взаимного пересечения множеств Δ и Γ' (рис.38,б).

$$3. \Delta(A, m) \cap \Gamma' = l$$

Линия пересечения плоскостей Δ и Γ' является искомой прямой l . Определение множеств называют анализом условий задачи. Запишем анализ в виде символов:

1. $\{l^i : (l^i \in A, l^i \cap m)\} \Rightarrow \Delta(A, m)$.
2. $\{l^i : (l^i \in A, l^i \parallel \Gamma(a \cap b))\} \Rightarrow \Gamma' \in A, \Gamma' \parallel \Gamma(a \cap b)$.
3. $\Delta(A, m) \cap \Gamma' = l$

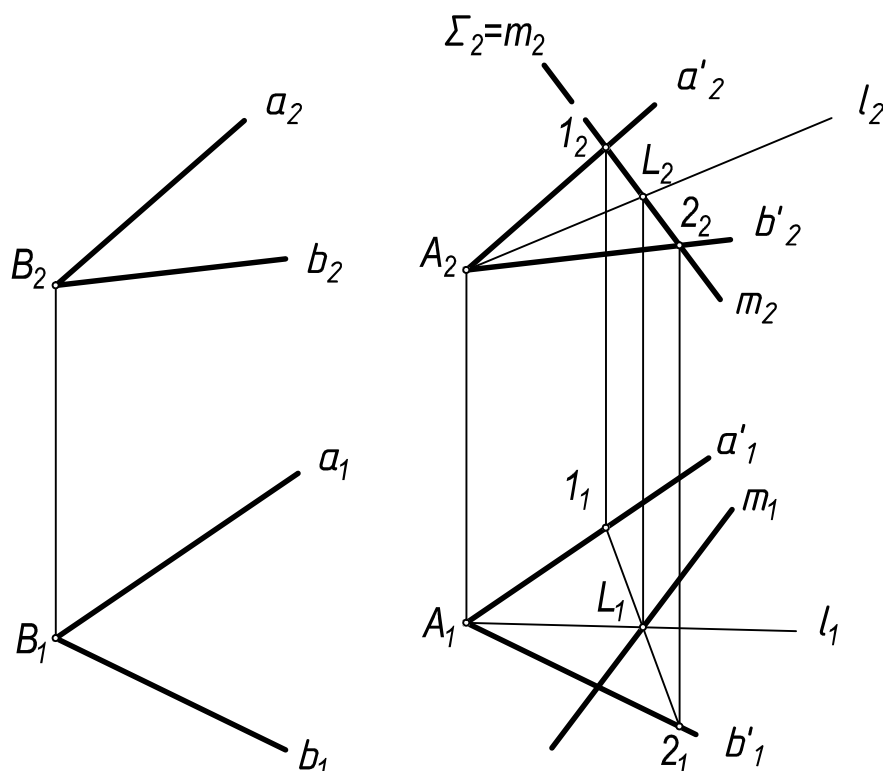
Определим искомую геометрическую фигуру прямую l , как результат взаимного пересечения множеств Δ и Γ' . Далее, на основании составленного анализа, решаем задачу и записываем алгоритм решения, то есть задаём на комплексном чертеже определённые анализом множества и пошагово записываем в виде символов выполняемые действия.

Ещё раз обратите внимание на то, что в анализе первые два пункта – определение множеств (геометрических фигур), а в алгоритме – построение этих фигур на комплексном чертеже. В этой задаче построение плоскостей Δ и Γ' .

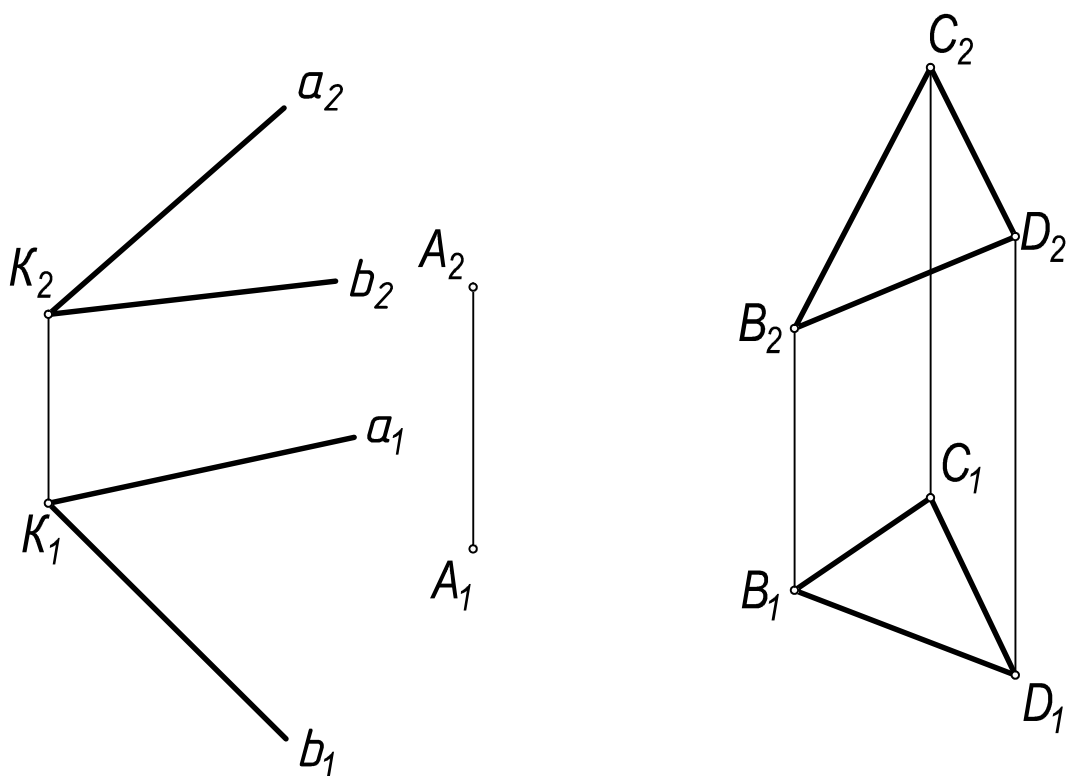
На основании выполняемых на комплексном чертеже построений составляем алгоритм:

1. $\Delta(A, m)$ – задана на чертеже.
2. $\Gamma' \in A, \Gamma' (a' \cap b')$.
3. $\Delta(A, m) \cap \Gamma' (a' \cap b') = l$

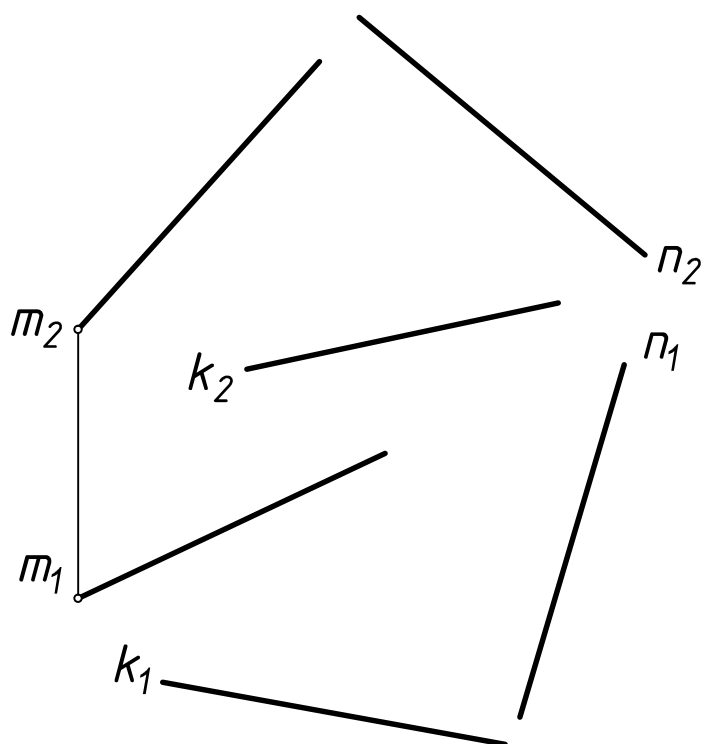
Решение задачи:



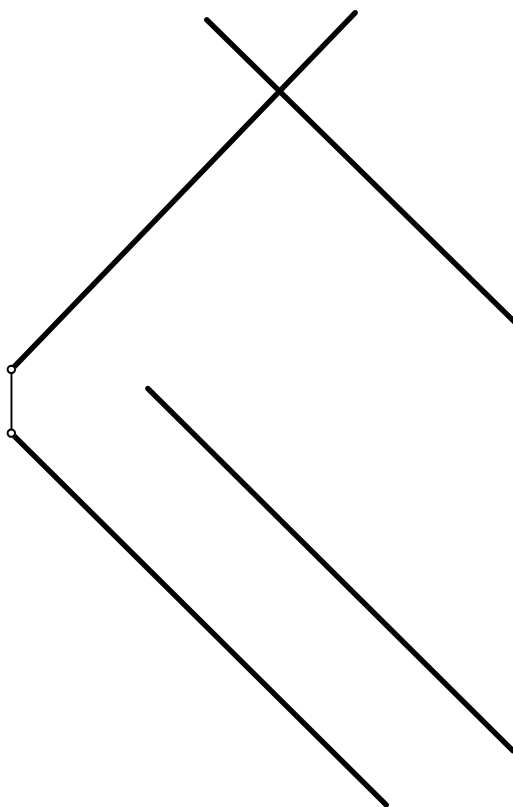
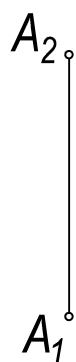
Внимание! Ко всем задачам записать в символической форме анализ и алгоритм.
 89. Через точку A провести прямую l параллельную плоскости $\Gamma(a \cap b)$ и $\Delta(BCD)$.



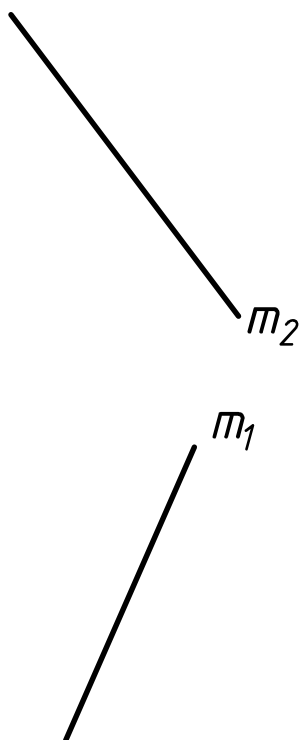
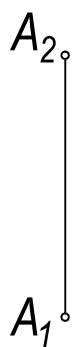
90. Провести прямую l , пересекающую прямые m и n и параллельную прямой k .



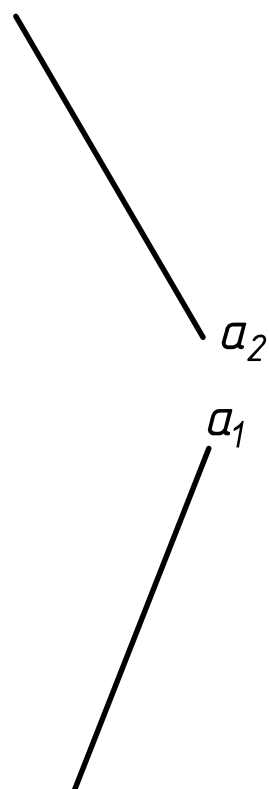
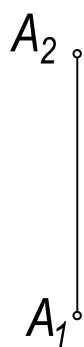
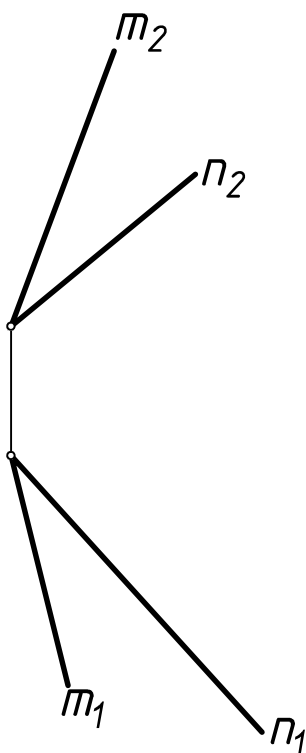
91. Через точку A провести прямую l пересекающую скрещивающиеся прямые a и b .



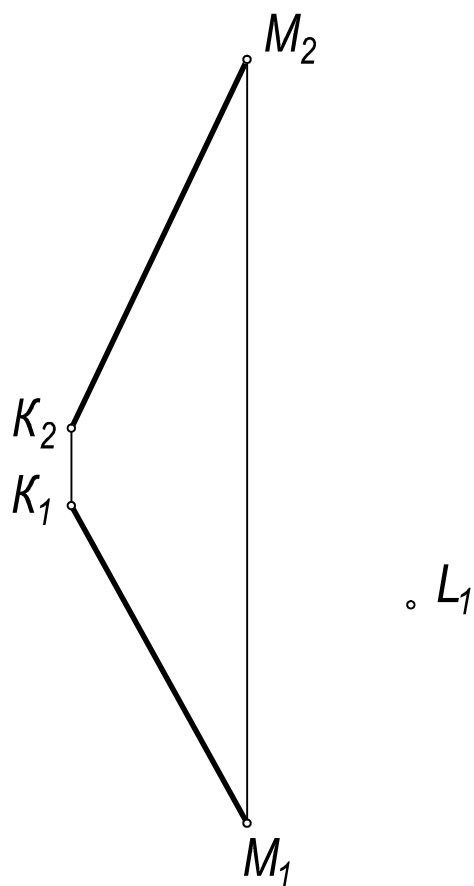
92. Через точку A провести прямую l , перпендикулярную прямой m и пересекающую эту прямую.



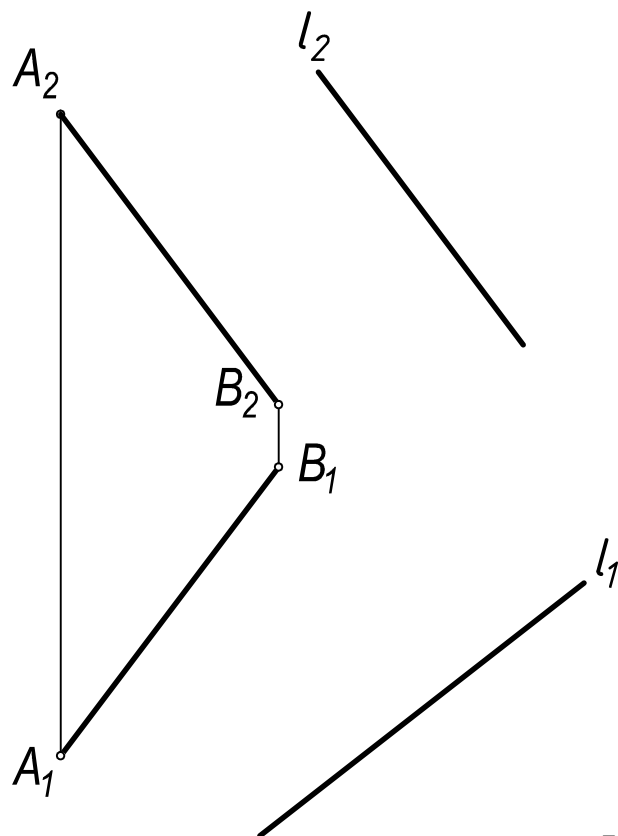
93. Через точку A провести прямую l , параллельную плоскости Γ ($m \cap n$) и перпендикулярную прямой a .



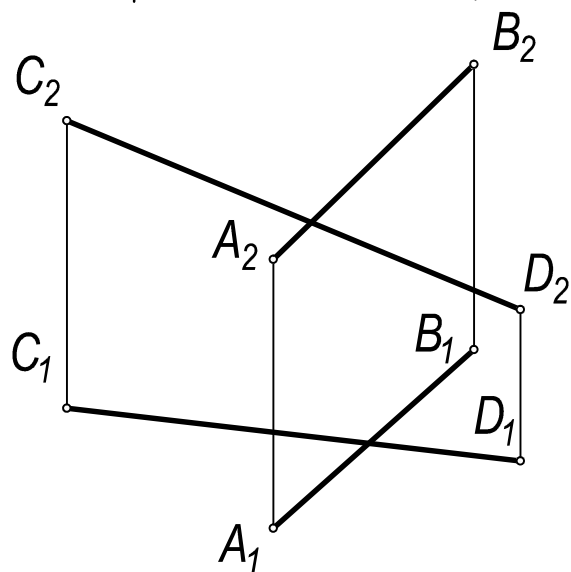
94. Построить ромб $KLMN$ по заданной диагонали KM и горизонтальной проекции вершины L .



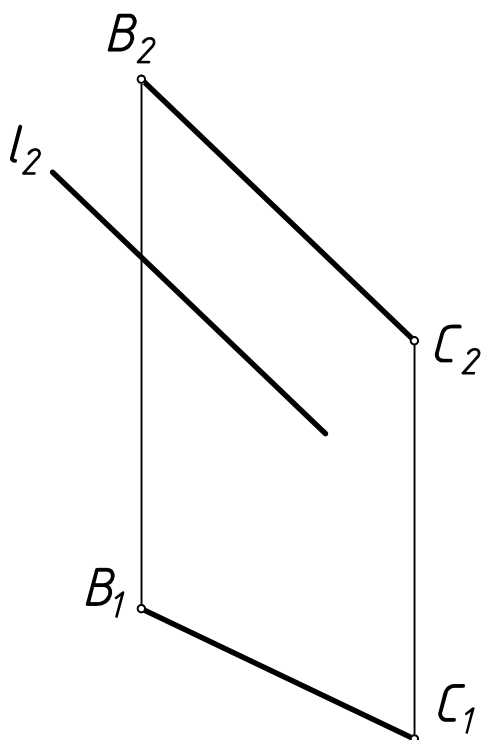
95. Построить равнобедренный треугольник ABC с основанием AB и вершиной C на прямой l . (См. задачу № 25, тема 3.)



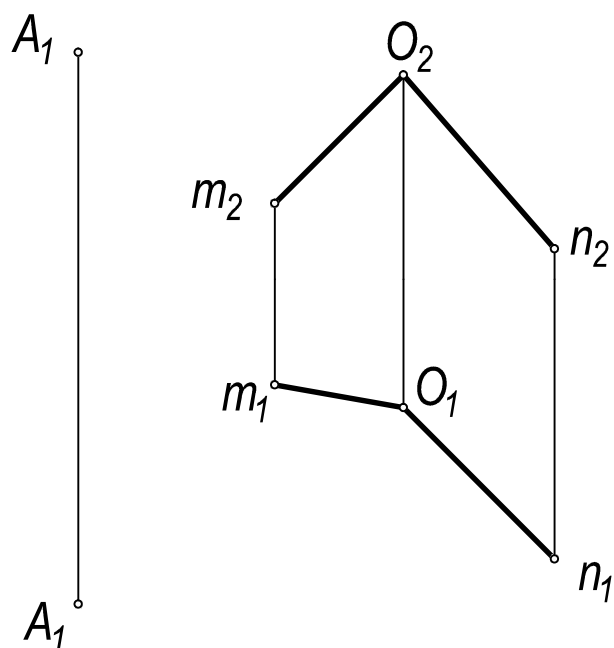
96. На прямой CD найти точки, отстоящие от прямой AB на расстоянии 20 мм.



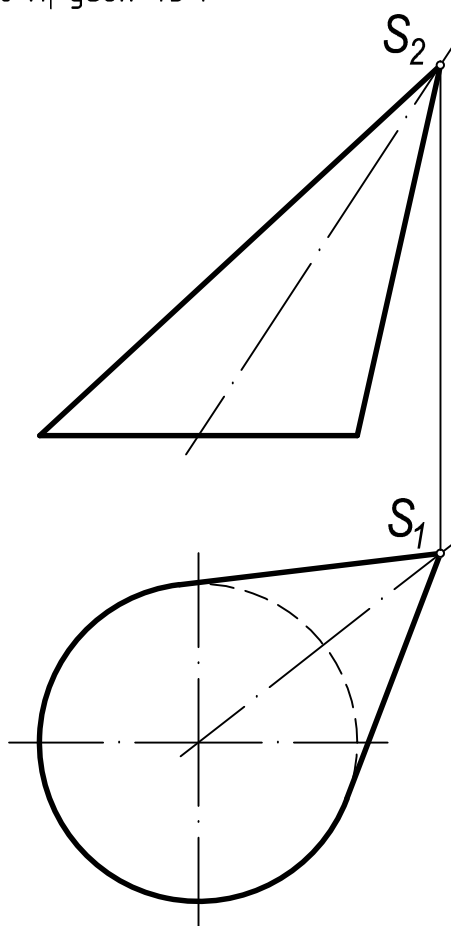
97. Построить недостающую проекцию прямой l , параллельной прямой BC , если расстояние между ними равно 25 мм.



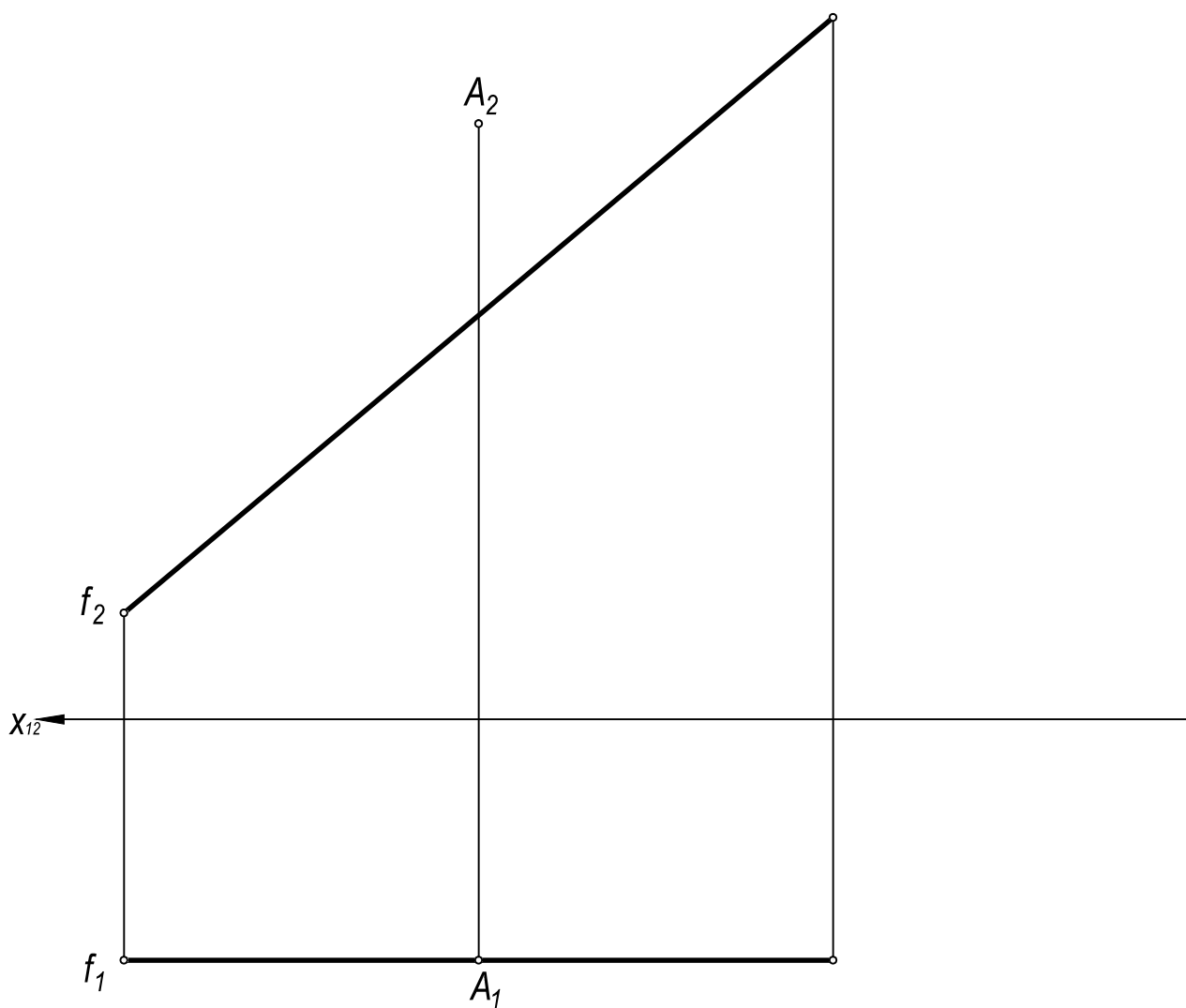
98. Через точку A провести прямую, параллельную плоскости $\Gamma(m \cap n)$, под углом 60° к плоскости Π_1 .

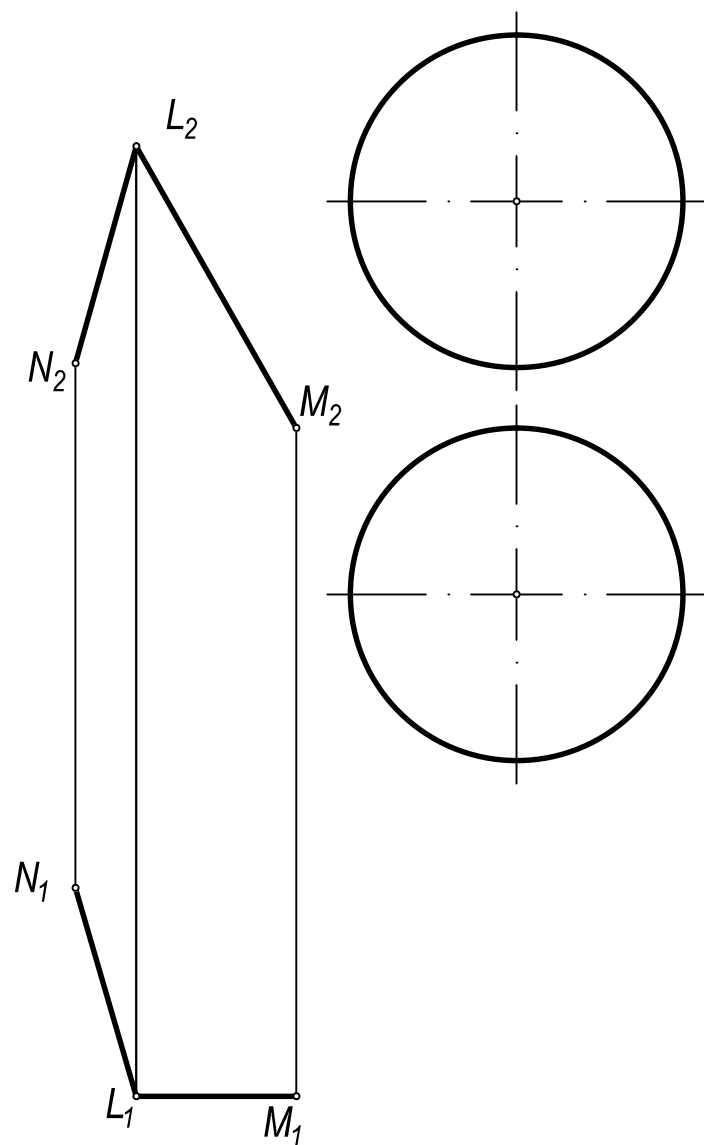


99. На поверхности наклонного эллиптического конуса определить образующие, которые составляют с плоскостью Π_1 угол 45° .

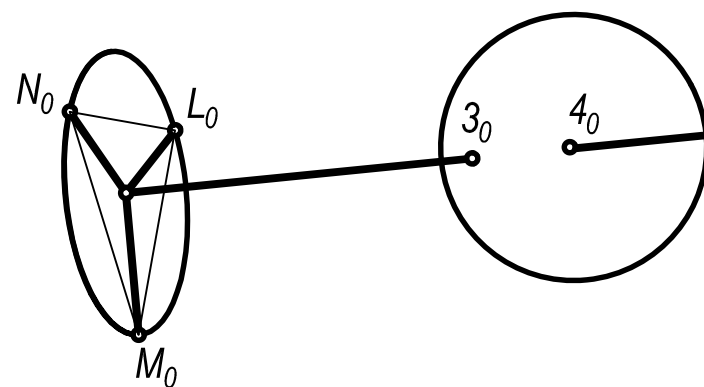


100. Найти множество точек, удалённых от прямой f на расстояние 20 мм. и от точки A – на расстояние 25 мм. Построить проекции введённых геометрических фигур в системе плоскостей Π_2/Π_1 .





101. На поверхности данной сферы найти точки, равноудалённые от точек L, M, N.



РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

(составлена в соответствии с Государственным стандартом высшего профессионального образования и примерной программой дисциплины)

I. Введение

1. Предмет начертательной геометрии. Теоретико-множественный подход к геометрическим фигурам.
2. Метод проецирования:
 - а) центральное проецирование; дополнение евклидова пространства несобственными элементами;
 - б) параллельное проецирование; основные свойства;
 - в) ортогональное (прямоугольное проецирование);
 - г) прямая и обратная задачи начертательной геометрии, обратимость чертежа.

II. Комплексные чертежи геометрических фигур

1. Комплексный чертёж точки. Осный и безосный способы построения комплексного чертежа.
2. Комплексные чертежи линий:
 - 2.1. Комплексные чертежи прямых линий:
 - а) прямая общего положения;
 - б) определение длины отрезка прямой способом прямоугольного треугольника;
 - в) принадлежность точки прямой линии;
 - г) прямые частного положения: линии уровня, проецирующие прямые; конкурирующие точки.
 - 2.2. Комплексные чертежи плоских и пространственных ломаных.
 - 2.3. Комплексные чертежи кривых линий: (Тема для самостоятельного изучения)
 - а) кривые плоские и пространственные, закономерные и не закономерные, алгебраические и трансцендентные; порядок алгебраических линий; особые точки кривых;
 - б) построение проекций; проекционные свойства кривых линий;
 - в) секущие, касательные, нормали к кривым линиям;
 - г) кривые второго порядка (эллипс, окружность, парабола, гипербола);
 - д) винтовые линии (цилиндрическая винтовая линия); геодезические линии.
3. Комплексные чертежи поверхностей:
 - 3.1. Плоскости:
 - а) плоскость общего положения, определитель, задание на чертеже; принадлежность точки и прямой плоскости; главные линии плоскости (горизонталь, фронталь, профильная прямая); построение плоских фигур при $n > 3$;
 - б) плоскости частного положения: проецирующие, плоскости уровня; принадлежность точки и прямой проецирующей плоскости.
 - 3.2. Многогранные поверхности, многогранники:
 - а) определение, сетка многогранника, формула Эйлера для выпуклых многогранников;
 - б) построение проекций многогранников, очерк проекций, определение видимости;
 - в) принадлежность точки и линии поверхности многогранника.
 - 3.3. Кривые поверхности:
 - а) закономерные и не закономерные, алгебраические и трансцендентные; порядок алгебраических поверхностей; кинематический и каркасный способы образования поверхностей;
 - б) определитель поверхности и его составные части (геометрическая и алгоритмическая);
 - в) задание поверхности на чертеже, очерк проекции поверхности;
 - г) классификация поверхностей.
 - 3.3.1. Линейчатые кривые поверхности:

- а) определение, классификация, определитель;
 - б) развёртывающиеся линейчатые поверхности (торсы, конические, цилиндрические);
 - в) неразвёртывающиеся линейчатые поверхности (поверхности с плоскостью параллелизма: цилиндр, конус, косая плоскость, прямой геликоид);
 - г) винтовые поверхности (прямой и наклонный геликоиды).
- 3.3.2. Поверхности вращения:
- а) образование, определитель;
 - б) поверхности, образованные вращением прямой (цилиндр, конус, однополостный гиперболоид);
 - в) поверхности, образованные вращением кривых второго порядка (эллипсоид, сфера, однополостный и двуполостный гиперболоиды, тор);
 - г) определение порядка поверхности;
 - д) построение проекции точек и линий, принадлежащих поверхностям.
- 3.3.3. Нелинейчатые кривые поверхности: (Тема для самостоятельного изучения)
- а) циклические и каналовые поверхности.

III. Способы преобразования комплексного чертежа

1. Основные принципы преобразования комплексного чертежа.
2. Способ замены плоскостей проекций.
3. Способ вращения вокруг проецирующих прямых и прямых уровня; плоскопараллельное перемещение (вращение без указания положения оси).
Вспомогательное проецирование. (Тема для самостоятельного изучения)
4. Преобразование указанными способами прямых общего положения в прямые уровня и проецирующие, плоскостей общего положения в плоскости проецирующие и уровня.
5. Применение способов преобразования комплексного чертежа к решению позиционных и метрических задач.

IV. Позиционные задачи

1. Задачи, выражающие отношения между геометрическими фигурами:
 - 1.1. Задачи на принадлежность точки и линии поверхности
 - 1.2. Относительное положение прямых:
 - а) прямые параллельные;
 - б) прямые пересекающиеся;
 - в) прямые скрещивающиеся.
 - 1.3. Относительное положение прямой и плоскости, двух плоскостей:
 - а) прямые, параллельные плоскости;
 - б) параллельные плоскости.
 - 1.4. Взаимно перпендикулярные прямые и плоскости:
 - а) проекции прямого угла; линии наибольшего наклона;
 - б) прямая перпендикулярная к плоскости;
 - в) взаимно перпендикулярные плоскости;
 - г) взаимно перпендикулярные плоскости общего положения.
2. Задачи, в которых определяются общие элементы (точки и линии) геометрических фигур:
 - 2.1. Определение общих элементов простейших геометрических фигур из условия принадлежности (одна из фигур или обе занимают проецирующее положение):
 - а) построение точки пересечения прямой общего положения с проецирующей плоскостью;
 - б) построение точки пересечения плоскости общего положения с проецирующей прямой;
 - в) построение точки пересечения плоскости общего положения с проецирующей плоскостью;
 - г) построение линии пересечения двух проецирующих плоскостей.

- 2.2. Первая позиционная задача (построение точек пересечения линии и поверхности);
- а) общая схема решения;
 - б) принцип выбора вспомогательной поверхности, составление алгоритма;
 - в) построение точки пересечения прямой общего положения с плоскостью общего положения;
 - г) построение точки пересечения прямой общего и частного положения с поверхностью многогранника;
 - д) построение точек пересечения прямой общего и частного положения с кривой поверхностью (конуса, цилиндра, сферы, тора и др.);
 - е) составление алгоритма решения указанных задач, запись его в символической форме, определение видимости на комплексном чертеже.
- 2.3. Вторая позиционная задача (построение линии пересечения двух поверхностей):
- 2.3.1. Основные теоретические положения:
- а) виды линий пересечения;
 - б) классификация точек линии пересечения;
 - в) способ построения точек, принадлежащих линии пересечения;
 - г) общая схема решения задачи;
 - д) виды вспомогательных поверхностей и их выбор.
- 2.3.2. Построение линии пересечения поверхностей способом вспомогательных плоскостей:
- а) двух плоскостей общего положения;
 - б) многогранника с плоскостью частного и общего положения;
 - в) кривой поверхности с плоскостью частного и общего положения;
 - г) конические сечения – виды и построения;
 - д) двух многогранников;
 - е) многогранной и кривой поверхностей;
 - ж) двух кривых поверхностей.
- 2.3.3. Построение линии пересечения двух кривых поверхностей способом вспомогательных сфер:
- а) соосные поверхности вращения, построение линии их пересечения;
 - б) обоснование способа сфер;
 - в) построение линии пересечения двух поверхностей вращения, оси которых пересекаются и принадлежат плоскости уровня, способом концентрических сфер;
 - г) построение линии пересечения двух кривых поверхностей, имеющих круговые сечения и общую плоскость симметрии, способом эксцентрических сфер.
- 2.3.4. Особые случаи пересечения поверхностей второго порядка:
- а) порядок линии пересечения поверхностей второго порядка в общем случае и возможность её распада на кривые более низких порядков;
 - б) теоремы (три), содержащие признаки распада кривой четвёртого порядка на две кривые второго порядка;
 - в) примеры применения указанных теорем к решению задач.

V. Метрические задачи. (Тема для самостоятельного изучения)

- Определения действительных величин и формы геометрических фигур, расстояний и углов между ними по их метрически искажённым проекциям:
- а) задачи на определение расстояний между геометрическими фигурами;
 - б) задачи на определение действительных величин плоских геометрических фигур и углов между ними;
 - в) задачи на построение в плоскости общего положения геометрических фигур по заданным размерам;

г) применение для решения указанных задач способов преобразования комплексного чертежа и теоретических положений темы «Взаимно перпендикулярные прямые и плоскости».

VI. Комплексные задачи

Задачи, в которых на искомый элемент наложены два и более условий:

- а) общая схема решения;
- б) стадии решения: анализ, алгоритм, исследование, построение на комплексном чертеже;
- в) примеры решения задач.

VII. Построение развёрток поверхностей (точных, приближенных, условных).

(Тема для самостоятельного изучения)

- 1. Общие понятия и определения:
 - а) какие поверхности называются развёртывающимися;
 - б) что называется развёрткой поверхности;
 - в) основные свойства развёрток;
 - г) какие поверхности обладают свойством развёртываемости.
- 2. Построение развёрток пирамидальных и конических поверхностей.
- 3. Построение развёрток призматических и цилиндрических поверхностей.
- 4. Построение условных развёрток неразвёртывающихся поверхностей (способ аппроксимации).
- 5. Решение метрических задач с помощью развёрток.

VIII. Проекции теней.

- 1. Тени в ортогональных проекциях:
 - а) направление световых лучей, контуры собственной и падающей теней геометрической фигуры;
 - б) построение теней пространственных фигур (многогранников, конусов, цилиндров);
 - в) построение теней на фасаде здания. (Тема для самостоятельного изучения)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Четверухин, Н.Ф. Курс начертательной геометрии / Н.Ф. Четверухин. – М.: Высшая школа, 2002.
2. Короев, Ю.И. Начертательная геометрия / Ю.И. Короев – М.: Стройиздат, 2010.
3. Начертательная геометрия: учебник / под ред. Н.Н. Крылова – М.: Высшая школа, 2009.
4. Короткий, В.А. Начертательная геометрия. Конспект лекций: учебное пособие / В.А. Короткий, Л.И. Хмарова, И.В. Буторина – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2014.
5. Дукмасова, В.С. Методика решения задач по начертательной геометрии: учебное пособие / В.С. Дукмасова, В.А. Краснов. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2003.