

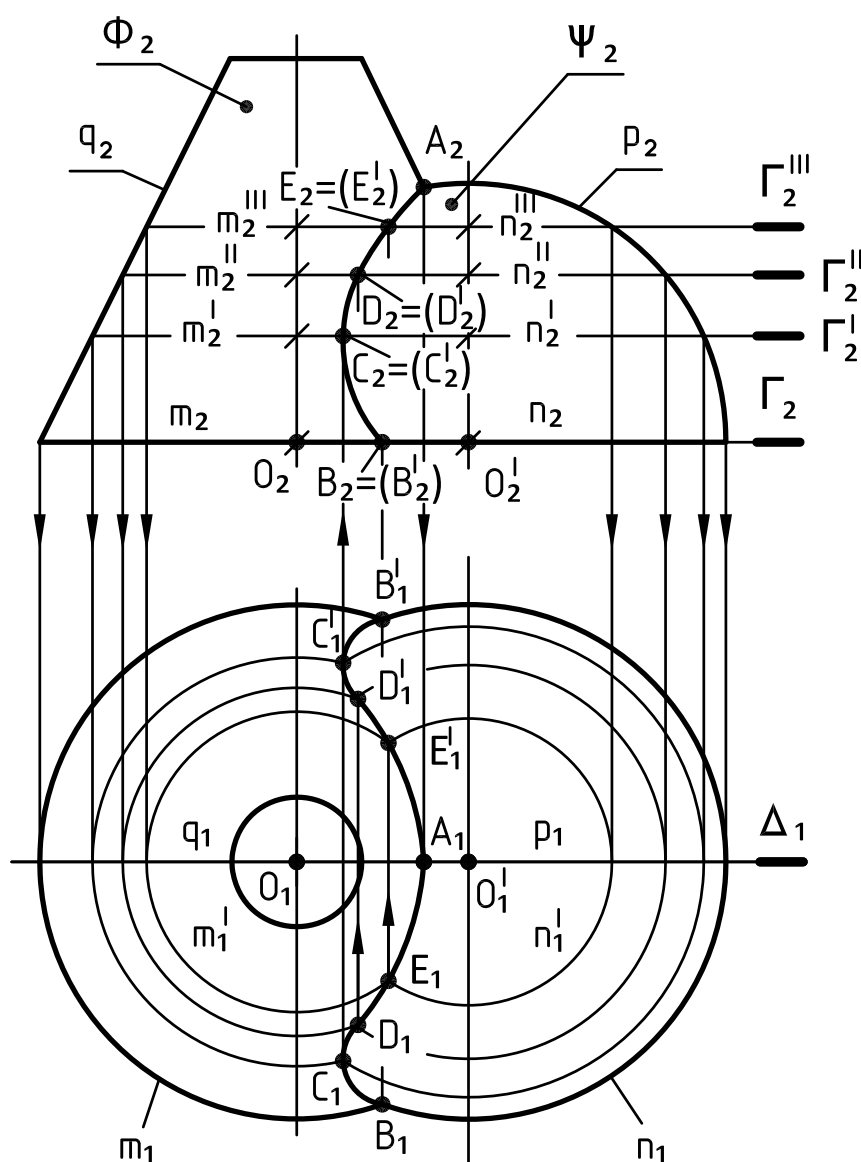
Н.С. Кувшинов
Т.Н. Скоцкая
И.Л. Костюнина

514.18(07)

К885

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Сборник задач



Челябинск
2013

Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра графики

514.18(07)
К885

Н.С. Кувшинов, Т.Н. Скоцкая, И.Л. Костюнина

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Сборник задач

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2013

УДК 515(075.8) + 514.18(075.8)

К 885

*Одобрено
учебно-методической комиссией
архитектурно-строительного факультета*

Рецензенты:
С.В. Евсеенков, И.Г. Торбеев

Кувшинов, Н.С.

К885

Начертательная геометрия. Сборник задач / Н.С. Кувшинов, Т.Н. Скоцкая, И.Л. Костюнина. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2013. – 103 с.

Сборник задач предназначен для использования в качестве раздаточного материала студентам на практических занятиях и для самостоятельной работы.

В сборнике представлены краткие теоретические положения начертательной геометрии, примеры решения типовых задач, задачи для самостоятельного решения и библиографический список литературы.

Сборник задач соответствует требованиям государственных образовательных стандартов по курсу начертательной геометрии в вузах и предназначен для самостоятельной работы студентов, обучающихся по укрупненной группе специальностей и направлений подготовки "Инженерное дело, технологии и технические науки" очной и заочной формы обучения.

УДК 515(075.8) + 514.18(075.8)

© Издательский центр ЮУрГУ, 2013

ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия является тем разделом геометрии, который изучает теоретические основы методов построения изображений (проекций) геометрических фигур на какой-либо поверхности и способы решения различных позиционных и метрических задач, относящихся к этим фигурам, при помощи их изображений.

Начертательная геометрия входит в состав обязательных общеобразовательных дисциплин вузов, поэтому практически невозможно представить современного инженера без знаний основ теории изображений.

Роль начертательной геометрии в подготовке специалистов и в решении прикладных задач возрастает прямо пропорционально с развитием науки и техники.

Сборник задач ориентирован для использования в качестве раздаточного материала студентам на практических занятиях и для самостоятельной работы.

По аналогии с "классическими" сборниками задач по начертательной геометрии, например [9], в работе представлены:

1) краткие теоретические положения начертательной геометрии: комплексные чертежи точки и плоскости; основные сведения о кривых линиях, многогранниках и кривых поверхностях; изображение пространственных фигур на плоскости; принадлежность точки и линии поверхности; способы преобразования комплексного чертежа; способы решения позиционных задач; построение разверток поверхностей и др.;

2) многочисленные примеры решения типовых задач;

3) задачи для самостоятельного решения;

4) библиографический список литературы.

При составлении сборника задач были использованы:

1) учебно-методические материалы кафедры графики Южно-Уральского государственного университета [1, 2, 3];

2) сведения из других литературных источников [4–18].

Составители данной работы: Т.Н. Скоцкая – темы 1, 2, 3, 4, 7, 8; И.Л. Костюнина – темы 5, 6, 10, 11, 12; Н.С. Кувшинов – тема 9.

Содержание сборника задач соответствует положениям Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования Министерства Образования Российской Федерации.

Сборник задач предназначен для самостоятельной работы студентов, обучающихся по укрупненной группе специальностей и направлений подготовки "Инженерное дело, технологии и технические науки" очной и заочной формы обучения.

УКАЗАНИЯ

Задачи №№

14, 18"б", 22"б""в", 23"а", 25, 32, 35, 50, 52, 63, 64, 70, 75, 76, 81, 90 и 92
обязательному решению не подлежат!

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СИМВОЛИКА

1. $A, B, C, D, \dots, 1, 2, 3, 4, \dots$ – точки, обозначаются прописными буквами латинского алфавита или арабскими цифрами.
2. $a, b, c, d, \dots$ – прямые и кривые линии, обозначаются строчными буквами латинского алфавита.
3. $\Gamma, \Delta, \Theta, \Lambda, \Pi, \Sigma, \Phi, \Psi, \Omega$ – поверхности (в т.ч. плоскости), прописные буквы греческого алфавита.
4. Плоскость проекций, прописная буква Π (пи) греческого алфавита:
 Π_1 – горизонтальная плоскость проекций;
 Π_2 – фронтальная плоскость проекций;
 Π_3 – профильная плоскость проекций;
 $\Pi_4, \Pi_5, \dots$ – дополнительные плоскости проекций.
5. Проекция оригинала (геометрической фигуры) обозначается той же буквой, что и оригинал, но с нижним индексом плоскости проекций: A_1 – проекция (горизонтальная) точки A на плоскость Π_1 ; a_2 – проекция (фронтальная) прямой a на плоскость Π_2 ; Σ_3 – проекция (профильная) плоскости Σ на плоскость Π_3 .
6. (A, B) – прямая, проходящая через точки A и B .
7. $[A, B]$ – отрезок прямой, ограниченный точками A и B .
8. $|A, B|$ – натуральная величина отрезка AB (равная оригиналу).
9. $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$ – углы; $\angle ABC$ – угол с вершиной в точке B ; $\angle$ – прямой угол.
10. $=$ – совпадение, равенство, результат действия.
11. $\equiv$ – тождество.
12. $\cong$ – конгруэнтность.
13. $\div$ – скрещивание.
14. $\parallel$ – параллельность.
15. $\perp$ – перпендикулярность.
16. $\cap$ – пересечение множеств.
17. $\in$ или $\ni$ – принадлежность. $A \in a$ – точка A принадлежит прямой a .
18. $\subset$ или $\supset$ – включение (является частью, подмножеством).
19. $\Leftrightarrow$ – эквивалентность.
20. $\wedge$ – соответствует союзу "и".
21. $\Rightarrow$ – следует, логическое следствие "если ..., то ...".
22. $/$ – отрицание, наличие в символе смысла частицы "не" ($\nparallel, \neq, \nless, \nlesssim$).

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

1. Приступать к решению задач следует после изучения соответствующей темы курса по учебной литературе и конспекту лекций.
2. Все графические построения в тетради выполняются карандашом при помощи чертёжных инструментов и принадлежностей.
3. Искомые и вспомогательные точки, линии и плоскости должны быть обозначены.
4. Искомые геометрические фигуры обводятся цветными карандашами.
5. Все линии, буквы, цифры, вспомогательные знаки выполняются в соответствии с ГОСТ 2.303–68, 2.304–81. Надписи выполнять только карандашом.
6. Зачтённая преподавателем тетрадь предъявляется на экзамене по начертательной геометрии.

Тема 1. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЁЖ ТОЧКИ. КООРДИНАТЫ ТОЧКИ. ОСНОВЫ И БЕЗОСНОВЫ СПОСОБЫ ИЗОБРАЖЕНИЯ

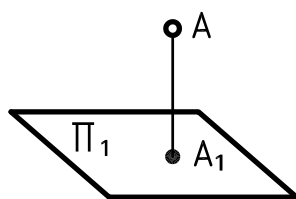


Рис. 1.1

Ортогональной (или прямоугольной) проекцией точки A на плоскость Π_1 называют основание A_1 перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость Π_1 (рис. 1.1). Точку A называют оригиналом, плоскость Π_1 – плоскостью проекций, прямую AA_1 – проецирующей прямой точки A , операцию построения ортогональной проекции – ортогональным проецированием.

Возьмём в пространстве точку A и спроецируем её ортогонально на три взаимно перпендикулярные плоскости Π_1 , Π_2 и Π_3 . На рис. 1.2 дано наглядное изображение пространственной модели плоскостей проекций.

Π_1 – горизонтальная плоскость проекций;

Π_2 – фронтальная плоскость проекций;

Π_3 – профильная плоскость проекций.

Линии пересечения плоскостей проекций образуют оси координат (оси проекций):

x – ось абсцисс (широт);

y – ось ординат (глубин);

z – ось аппликат (высот).

Точку O пересечения осей принимают за начало осей координат. Положительными направлениями считают следующие:

для оси x – влево от точки O ;

для оси y – от плоскости Π_2 в сторону наблюдателя;

для оси z – вверх от точки O .

Проводя через точку A проецирующие лучи, перпендикулярные Π_1 , Π_2 и Π_3 , получим на этих плоскостях проекции точки A :

A_1 – горизонтальная проекция точки A ;

A_2 – фронтальная проекция точки A ;

A_3 – профильная проекция точки A .

Положение точки в пространстве определяется тремя координатами (x, y, z) , показывающими величины расстояний, на которые точка A удалена от плоскостей проекций. Отрезки:

$[AA_3]=[OA_x]=x_A$ – абсцисса (широта) точки A ;

$[AA_2]=[OA_y]=y_A$ – ордината (глубина) точки A ;

$[AA_1]=[OA_z]=z_A$ – аппликата (высота) точки A .

Для выполнения чертежа точки в ортогональных проекциях пространственную модель преобразуют в плоскую, совмещая плоскости Π_1 и Π_3 с плоскостью Π_2 , которую принимают за плоскость чертежа. Плоскость Π_1 вращают вокруг оси x , плоскость Π_3 вращают вокруг оси z (рис. 1.3).

На практике обычно не обозначают плоскости проекций, не ограничивают поля плоскостей проекций. Тогда плоский чертёж пространственной модели будет вы-

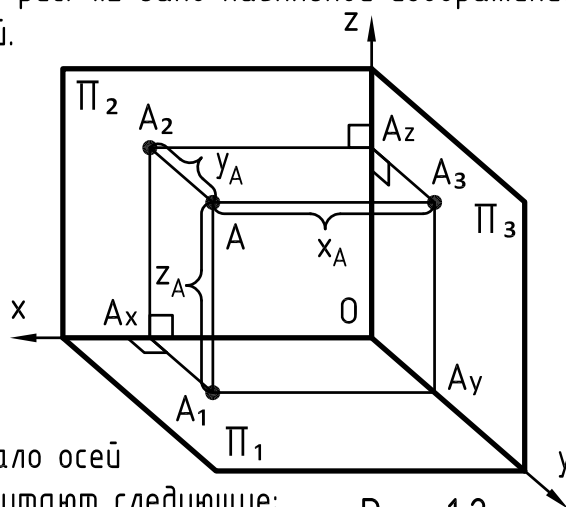


Рис. 1.2

глядеть как показано на рис. 1.4. При этом ось y занимает два положения, обозначим их y_1 и y_2 . Этот чертёж называют эюром. Эюр несёт такую же информацию, что и пространственная модель.

Комплексным чертежом (эюром Монжа) геометрической фигуры (например, точки) называют чертёж, состоящий из двух или более связанных между собой ортогональных проекций геометрической фигуры.

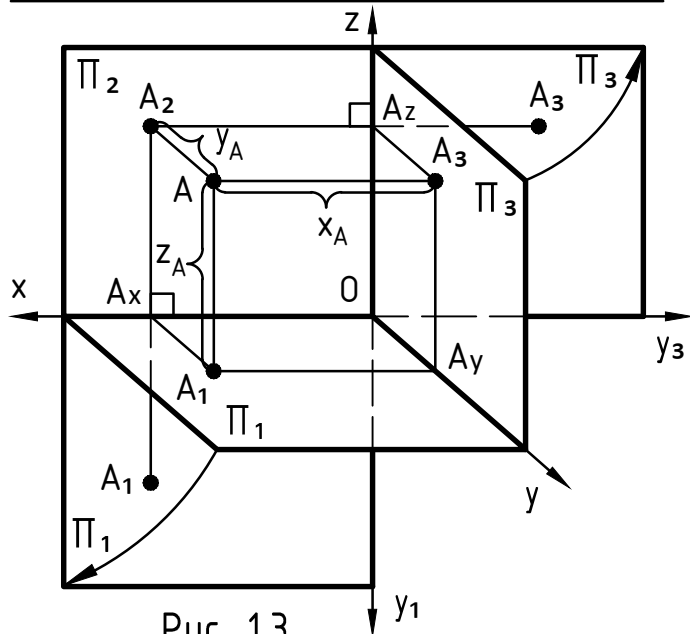


Рис. 1.3

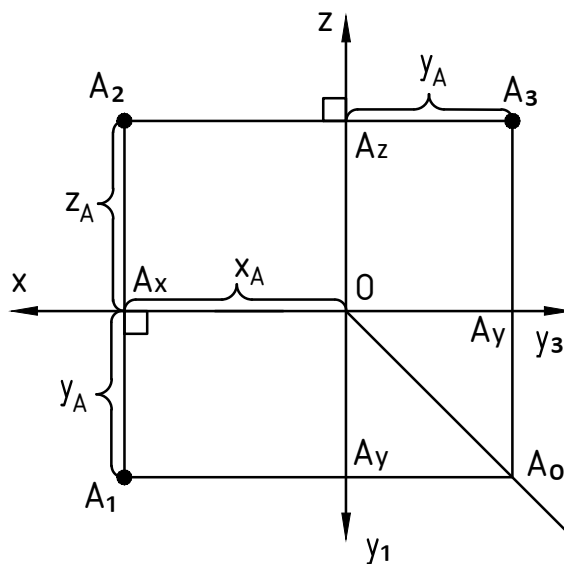


Рис. 1.4

Прямые на эюре, перпендикулярные координатным осям и проходящие через две проекции одной точки, называются линиями связи:

A_1A_2 – вертикальная линия связи;

A_2A_3 – горизонтальная линия связи;

A_1A_3 – ломаная линия связи.

Связь между горизонтальной проекцией A_1 и профильной проекцией A_3 точки A (см. рис. 1.4) установлена с помощью ломаной линии связи $A_1A_0A_3$. Точка A_0 лежит на биссектрисе угла, образованного осями xOz . Биссектрису OA_0 называют постоянной прямой чертежа и обозначают k .

Положение точки в пространстве вполне определяется заданием двух её ортогональных проекций, т.к. сочетание любых двух ортогональных проекций точки определяет значение трёх её координат x, y, z (см. рис. 1.4). Следовательно, по двум любым заданным ортогональным проекциям точки всегда можно построить её третью ортогональную проекцию.

Чаще всего строят профильную проекцию фигуры, т.е. профильные проекции точек, ей принадлежащих. При этом неоднократно повторяются одни и те же построения, которые можно представить в виде алгоритма. Для этого рассмотрим пример.

Пример 1. Даны две ортогональные проекции точки A_1 и A_2 (рис. 1.5). Построить третью проекцию точки A_3 (рис. 1.6 – результат построения).

Решение.

1. Через фронтальную проекцию точки A провести линию связи перпендикулярно оси z .
 $(A_2A_3) \perp z$.

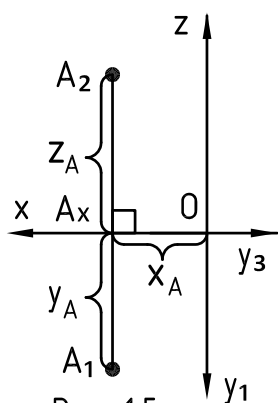


Рис. 1.5

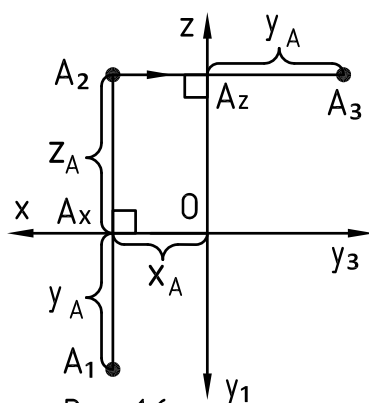


Рис. 1.6

2. Замерить расстояние, равное глубине точки A, и отложить его от оси z по проведённой линии связи.

$$y_A = [A_1 A_x] = [A_z A_3]$$

Примечание: чтобы показать на чертеже порядок построения точек, на линиях проекционной связи наносят стрелки.

Положение точки может быть задано как графически, так и аналитически. Пример графического изображения точки рассмотрен на рис. 1.5. Аналитическая форма задания точки представляет собой числовое выражение трёх координат точки в выбранных единицах длины (мм, см и другие единицы).

Пример 2. Даны (в мм) координаты точки B (20, 12, 15). Построить три проекции точки.

Решение.

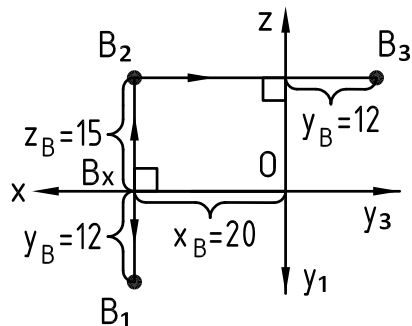


Рис. 1.7

1. Положение горизонтальной проекции B₁ определяется координатами $x_B=20$; $y_B=12$. Для её построения (рис. 1.7) от точки O на оси x откладывают отрезок $x_B=20$ и получают точку B_x. Через точку B_x вниз проводят линию связи, на ней откладывают отрезок $y_B=12$, получают B₁.
2. Положение фронтальной проекции B₂ определяется координатами $x_B=20$ и $z_B=15$. Отложив от точки B_x по вертикальной линии связи отрезок $z_B=15$, получают B₂.

3. Профильную проекцию точки B получают по алгоритму – см. пример 1 и рис. 1.6.

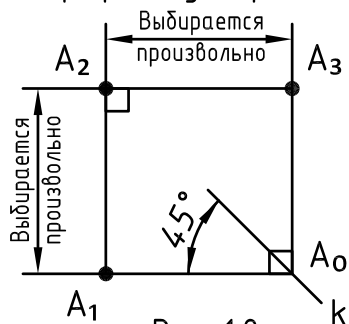


Рис. 1.8

В тех случаях, когда нет необходимости в определении положения оригинала относительно координатной системы плоскостей проекций, оси проекций на эюре не указывают. На безосном комплексном чертеже условия связи между проекциями точки сохраняются (рис. 1.8).

Пример 3. Задана (рис. 1.9) система взаимосвязанных точек A и B. Точка A задана тремя проекциями (A₁, A₂, A₃), точка B – двумя (B₁, B₂). Требуется найти профильную проекцию B₃.

Решение. При отсутствии на чертеже осей всегда можно по данным двум проекциям

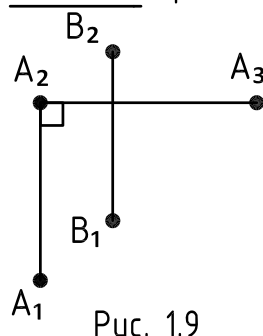


Рис. 1.9

точки определить третью проекцию, если на чертеже имеются три проекции хотя бы одной точки. В нашем случае три проекции у точки A. Такую точку называют базовой. Для построения искомой проекции B₃ используем постоянную прямую k чертежа, проведённую как биссектрису угла A₁A₀A₃ (рис. 1.10).

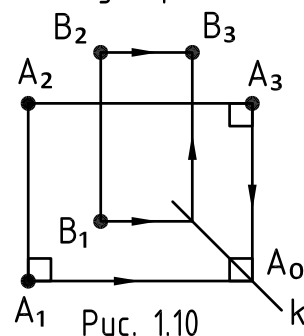
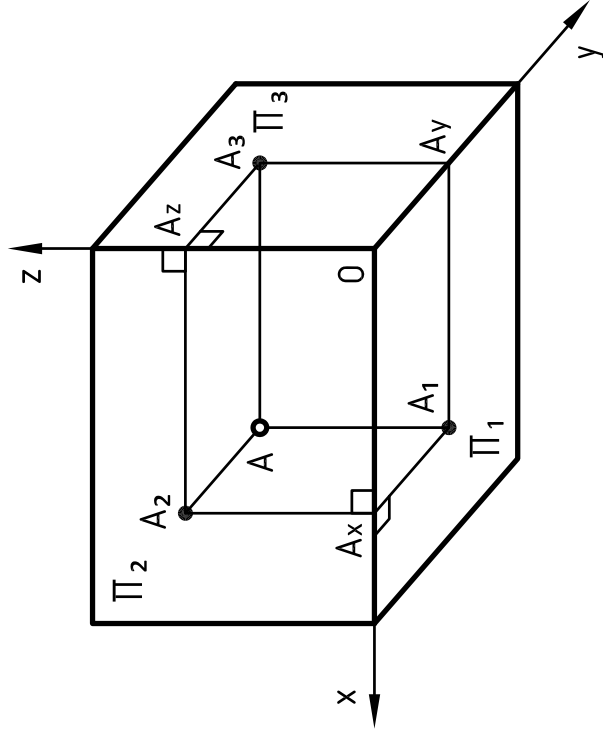


Рис. 1.10

1. Дано наглядное изображение трёх взаимно перпендикулярных плоскостей проекций Π_1 , Π_2 , Π_3 и точки A пространства, выполненное в косоугольной диметрии (известной из курсов геометрии и черчения средней школы). Коэффициенты искажения по осям x и z равны 1, по оси y коэффициент искажения 0,5 (искажения учитываются при построении комплексного чертежа точки).

а) на наглядном изображении обозначить отрезки, определяющие расстояние точки A до плоскостей проекций.



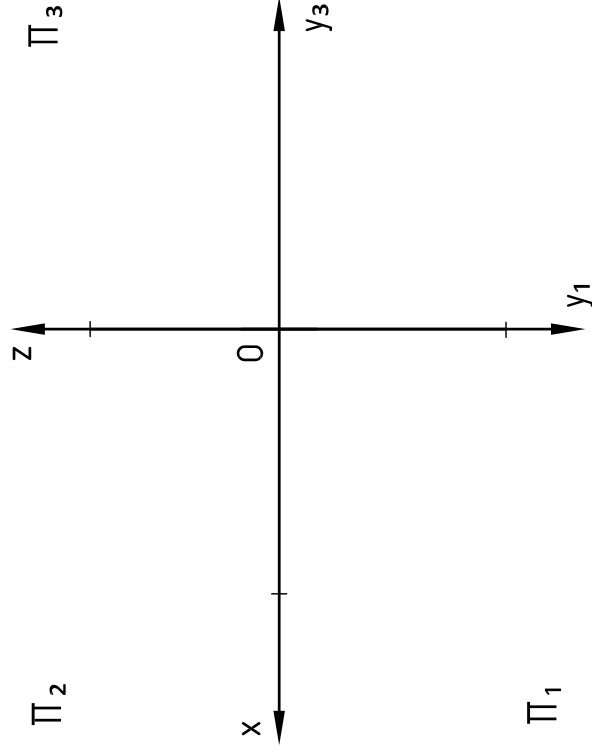
1. Записать название плоскостей проекций.

Π_1 - _____

Π_2 - _____

Π_3 - _____

б) построить комплексный чертеж точки A . Обозначить отрезки, определяющие расстояние точки A до плоскостей проекций. Подписать названия линий связи.



2. Записать название проекций точки A .

A_1 - _____

A_2 - _____

A_3 - _____

2. Построить комплексный чертёж точек A и B, если: $X_A = 50\text{мм}$, $Y_A = 30\text{мм}$, $Z_A = 40\text{мм}$,

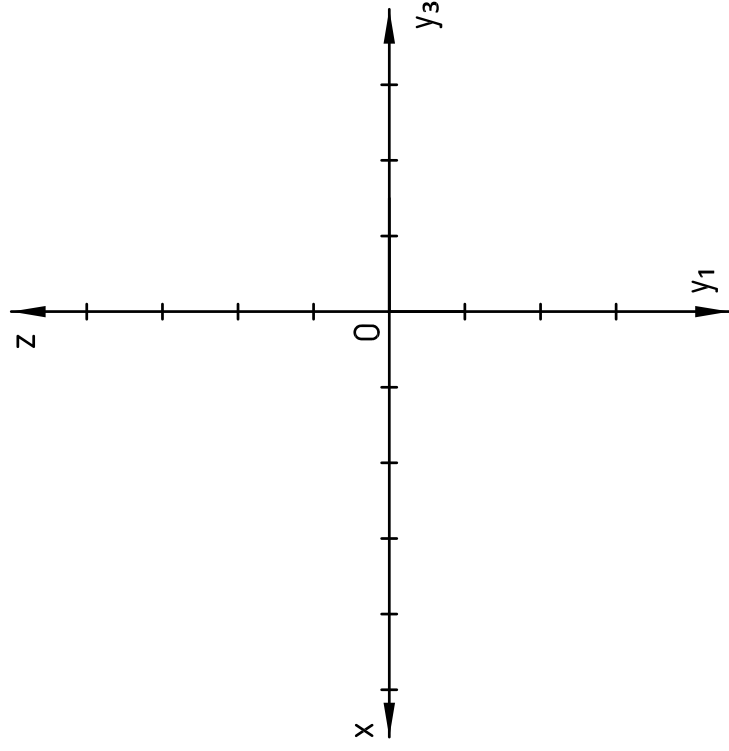
$X_B = 20\text{мм}$, $Y_B = 15\text{мм}$, $Z_B = 10\text{мм}$.

Отметить на чертеже и записать разность расстояний точек A и B до плоскостей проекций:

разность широт $X_A - X_B =$ _____

разность глубин $Y_A - Y_B =$ _____

разность высот $Z_A - Z_B =$ _____



3. Заданы горизонтальные и фронтальные проекции взаиморасположенных точек A, B и C. Построить профильные проекции заданных точек.

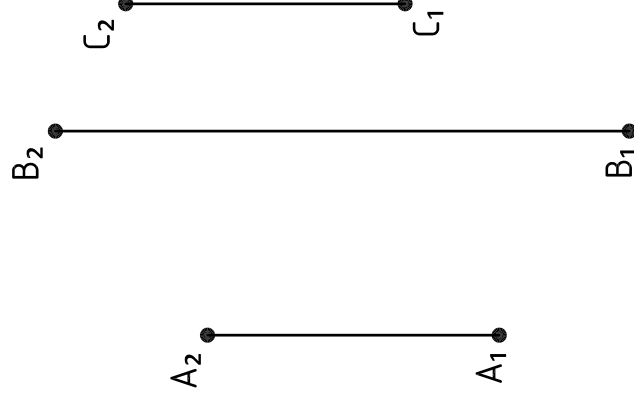
Недостающие профильные проекции точек могут быть найдены с помощью линии преломления. Для этого одну из заданных точек примем за базовую, расположив её профильную проекцию на произвольном расстоянии (см. рис. 1.8), т.е. начертим отсутствующую горизонтальную линию связи.

За базовую примем точку, у которой наименьшая глубина. У точки C наименьшая глубина (расстояние вдоль оси Y), т.к. горизонтальные проекции точек A_1 и B_1 расположены ниже горизонтальной проекции точки C_1 . Следовательно, искомые профильные проекции точек A_2 и B_2 будут расположены правее профильной проекции точки C_2 .

Примем точку C за базовую, начертим горизонтальную линию связи C_2C_3 . Расстояние C_2C_3 можно выбрать небольшим (для данного чертежа $\approx 25...30\text{мм}$) и чертёж будет компактным.

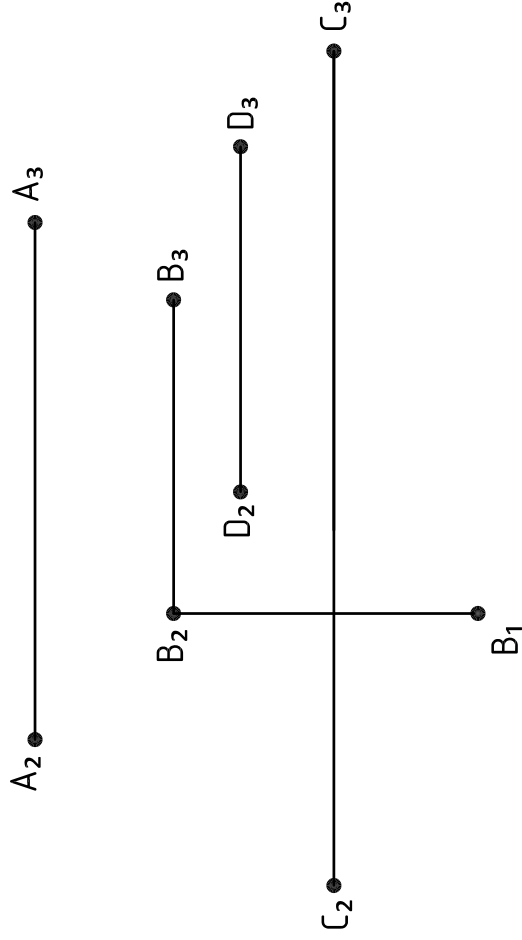
Для точки C начертим ломаную линию связи и постоянную прямую чертежа к (линию преломления).

Остальные построения выполним при помощи полученной линии преломления (см. рис. 1.10).

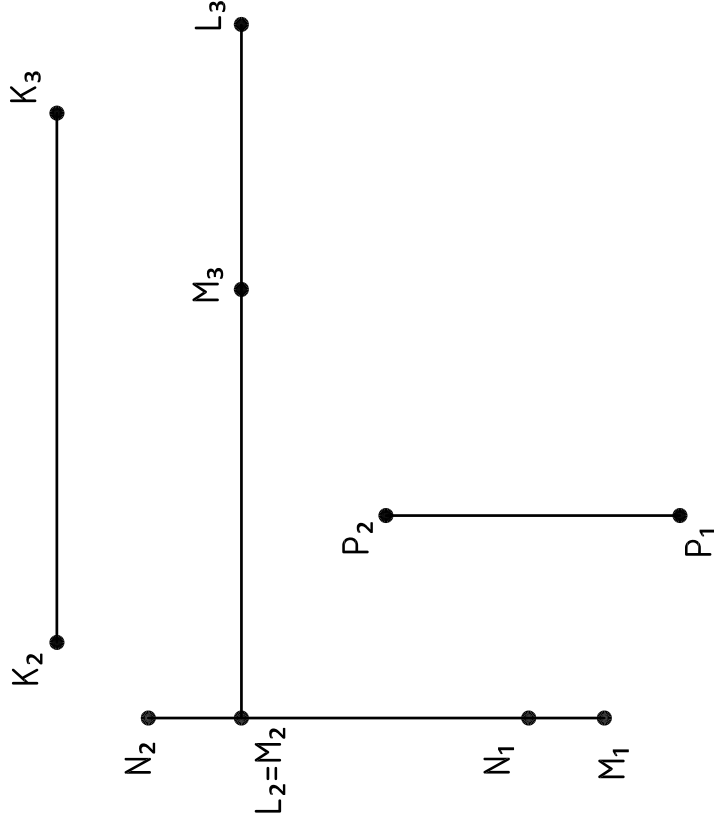


4. Заданы фронтальные и профильные проекции взаимосвязанных точек A, B, C и D . Построить горизонтальные проекции заданных точек.

Точка B принята за базовую, т.к. у неё наименьшая глубина, поэтому искомые горизонтальные проекции A_1, C_1, D_1 будут располагаться ниже B_1 , и чертёж будет компактным. Отметим на профильной плоскости проекций разность глубин, например, между профильной проекцией базовой точки B и профильной проекцией точки A : $(y_A - y_B)$. Затем по этой разности глубин построим горизонтальную проекцию A_1 . Остальные построения выполнить аналогично.



5. Задан комплексный чертёж взаимосвязанных точек $K (K_2, K_3)$; $L (L_2, L_3)$; $M (M_1, M_2, M_3)$; $N (N_1, N_2)$; $P (P_1, P_2)$. Построить недостающие проекции точек.



Тема 2. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЁЖ ПРЯМОЙ. ВЗАИМОПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ТОЧКИ И ПРЯМОЙ. ПРЯМЫЕ ОБЩЕГО И ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ

Линия есть непрерывное однопараметрическое множество точек. Простейшей линией является прямая. При ортогональном проецировании на плоскость прямая в общем случае проецируется (рис. 2.1) в прямую. На эюре прямая может быть задана проекциями

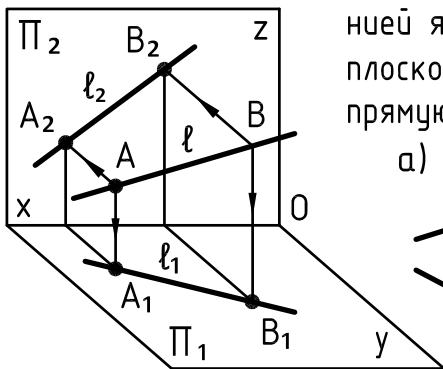


Рис. 2.1

прямой (рис. 2.2, а), проекциями двух точек прямой (рис. 2.2, б), проекциями отрезка прямой (рис. 2.2, в).

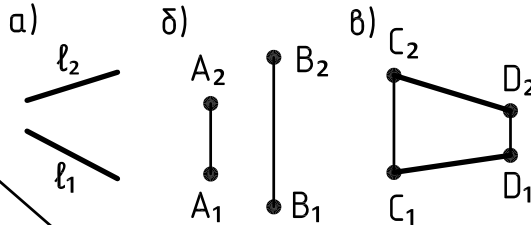


Рис. 2.2

Для построения проекции прямой достаточно найти проекции двух её различных точек и соединить их прямой линией.

Возможны два случая взаимного расположения точки и прямой.

Пример 1. Если точка A принадлежит прямой l, то её проекции на эюре (рис. 2.3) принадлежат одноимённым проекциям прямой, т.е.

$$A \in l \Rightarrow A_1 \in l_1 \wedge A_2 \in l_2$$

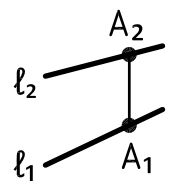


Рис. 2.3

Пример 2. Если хотя бы одна из проекций точки не принадлежит одноимённой проекции прямой, то данная точка в пространстве не принадлежит прямой (рис. 2.4), т.е.

$$B \notin l \Rightarrow B_1 \notin l_1 \wedge B_2 \notin l_2$$

$$C \notin l \Rightarrow C_1 \notin l_1 \wedge C_2 \notin l_2$$

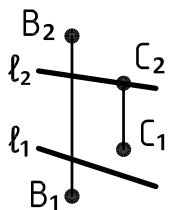


Рис. 2.4

Прямая может занимать в пространстве различные положения.

Прямая общего положения не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций (прямая AB на рис. 2.1). Проекция такой прямой (рис. 2.5) - прямые. Проекция прямой общего положения занимают на эюре произвольное положение т.е. они не параллельны и не перпендикулярны осям проекций. Каждая из проекций меньше самого отрезка AB.

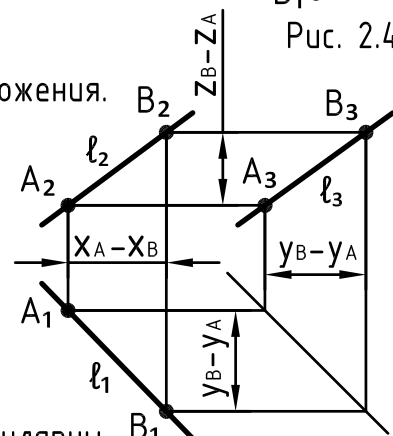


Рис. 2.5

Прямые частного положения параллельны или перпендикулярны одной из плоскостей проекций.

Прямая уровня - прямая, параллельная одной из плоскостей проекций. Такая прямая проецируется на эту плоскость без искажения. На эту же плоскость проецируются без искажения углы, которые эта прямая образует с остальными двумя плоскостями проекций. Угол наклона прямой уровня к Π_1 обозначают α , к Π_2 - β , к Π_3 - γ .

Прямых уровня три вида:

- а) горизонталь $h \parallel \Pi_1$ (наглядное изображение - рис. 2.6, эюр - рис. 2.7);
- б) фронталь $f \parallel \Pi_2$ (наглядное изображение - рис. 2.8, эюр - рис. 2.9);
- в) профильная прямая $p \parallel \Pi_3$ (наглядное изображение - рис. 2.10, эюр - рис. 2.11).

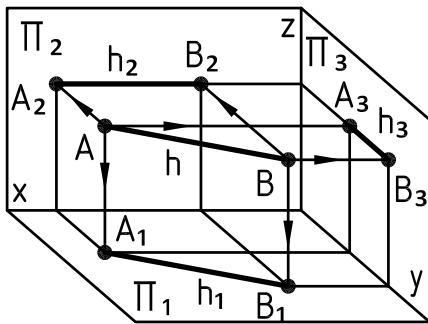


Рис. 2.6

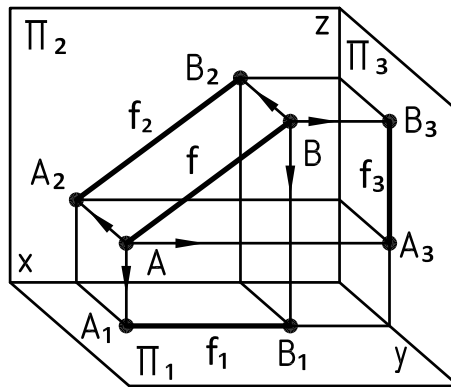


Рис. 2.8

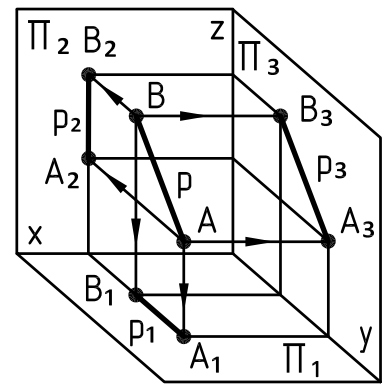


Рис. 2.10

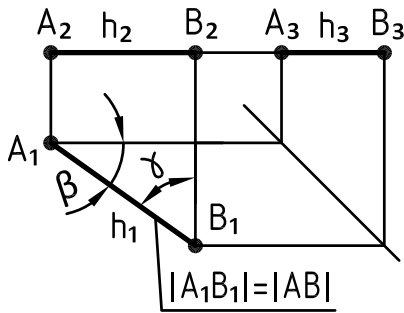


Рис. 2.7

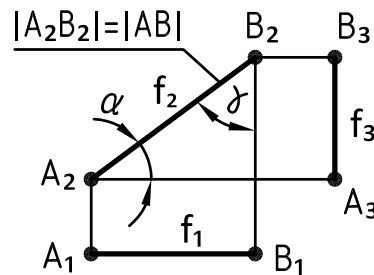


Рис. 2.9

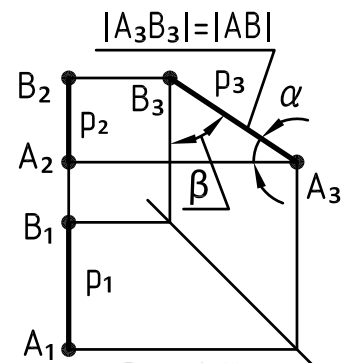


Рис. 2.11

Все точки прямых уровня имеют равные или глубины (фронталь), или высоты (горизонталь), или широты (профильная прямая уровня). Поэтому соответствующие проекции линий уровня параллельны проекциям определённых осей координат: $f_1 \parallel x$; $h_2 \parallel x$; $p_2 \parallel z$; $p_1 \parallel y_1$.

Прямая, перпендикулярная одной из плоскостей проекций, называется проецирующей прямой. Такая прямая проецируется на эту плоскость в точку (вырождается в точку), на две остальные плоскости проецируется в натуральную величину.

Проецирующих прямых три вида:

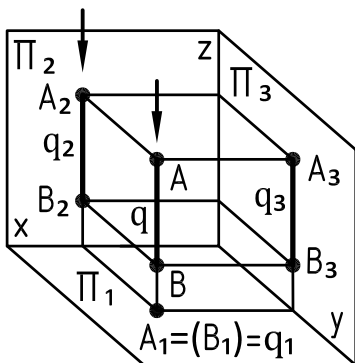


Рис. 2.12

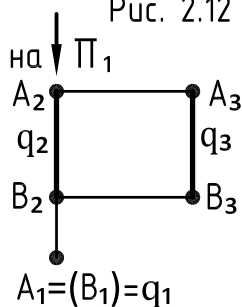


Рис. 2.13

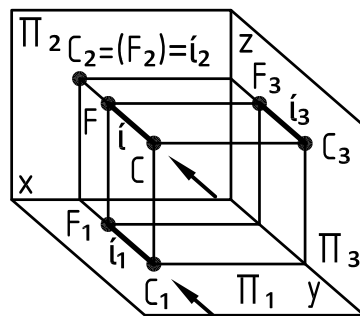


Рис. 2.14

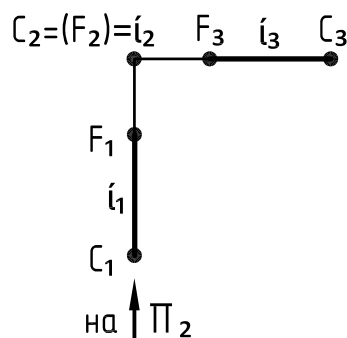


Рис. 2.15

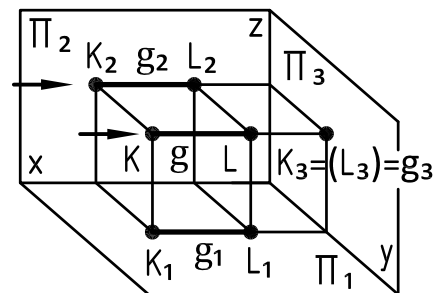


Рис. 2.16

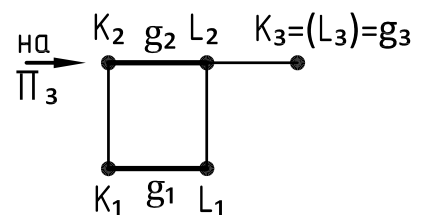


Рис. 2.17

- а) горизонтально-проецирующая прямая перпендикулярна Π_1 (наглядное изображение – рис. 2.12, эюр – рис. 2.13);
 б) фронтально-проецирующая прямая перпендикулярна Π_2 (наглядное изображение – рис. 2.14, эюр – рис. 2.15);
 в) профильно-проецирующая прямая перпендикулярна Π_3 (наглядное изображение – рис. 2.16, эюр – рис. 2.17).

Конкурирующие точки – точки, лежащие на одной проецирующей прямой. Точка, которая лежит первой по направлению проецирования, перекрывает на плоскости проекций все остальные точки данной проецирующей прямой. Они становятся невидимыми. Это свойство конкурирующих точек применяется для определения видимости точек и линий на чертежах. Проекцию невидимой точки заключают на эюре в круглые скобки.

Пример 3. Точки А и В (см. рис. 2.12 и 2.13) являются горизонтально конкурирующими; точка В находится под точкой А и, следовательно, невидима.

Пример 4. Точки С и F (см. рис. 2.14 и 2.15) – фронтально конкурирующие. Ближе к наблюдателю (и дальше от плоскости Π_2) точка С, поэтому точка F невидима.

Пример 5. Точки К и L (см. рис. 2.16 и 2.17) – профильно конкурирующие. Ближе к наблюдателю (и дальше от плоскости Π_3) точка К, поэтому точка L невидима.

Две прямые в пространстве могут пересекаться (иметь общую точку), быть параллельными (иметь несобственную общую точку) или скрещиваться, т.е. не пересекаться и не быть параллельными (не иметь общих точек).

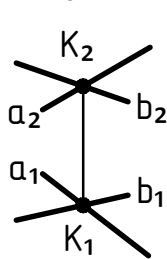


Рис. 2.18

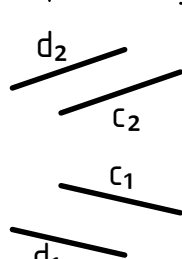


Рис. 2.19

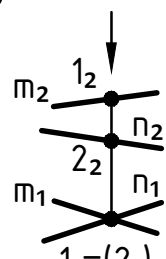


Рис. 2.20

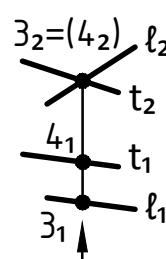


Рис. 2.21

Пример 6. Две прямые а и b (рис. 2.18) пересекаются в точке К (имеют общую точку). На эюре одноимённые проекции пересекающихся прямых пересекаются и точки их пересечения лежат на одной линии связи: $a \cap b = K \Leftrightarrow a_1 \cap b_1 = K_1 \wedge a_2 \cap b_2 = K_2$.

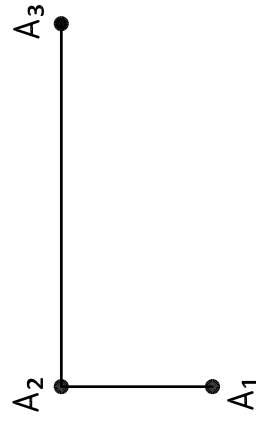
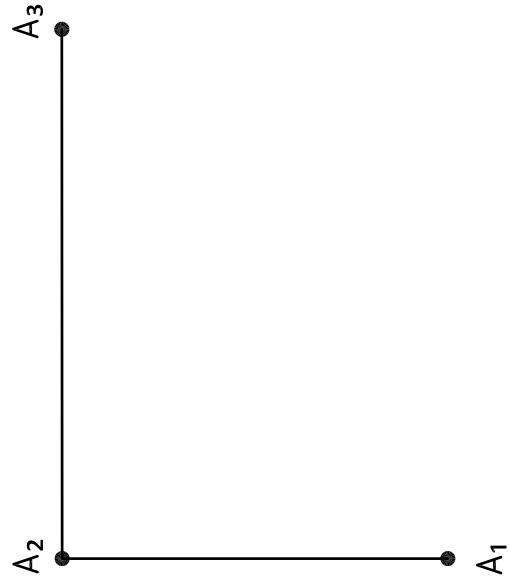
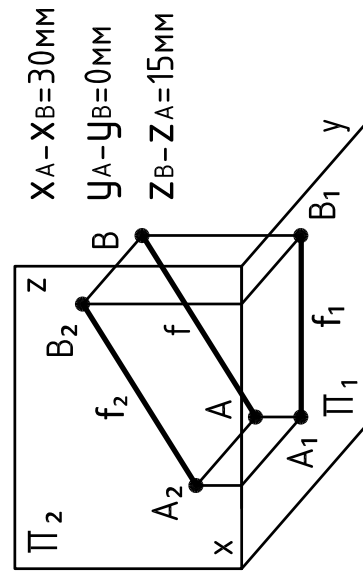
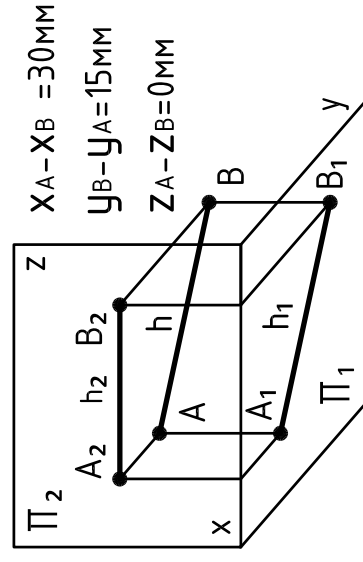
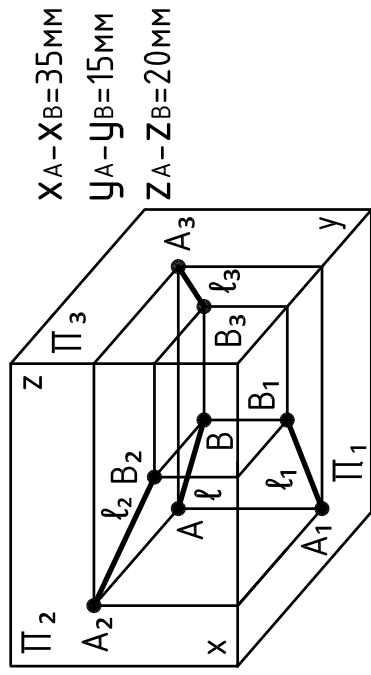
Пример 7. Две прямые d и c (рис. 2.19) параллельны, следовательно одноимённые их проекции параллельны: $d \parallel c \Leftrightarrow d_1 \parallel c_1 \wedge d_2 \parallel c_2$.

Пример 8. Две прямые m и n (рис. 2.20) скрещивающиеся. Точка пересечения их горизонтальных проекций является совпадающими проекциями двух конкурирующих точек 1 и 2. На Π_1 проекция точки 1 закрывает собой проекцию точки 2, т.к. точка 1 расположена выше точки 2 (т.е. её проекция на Π_2 расположена выше проекции точки 2). Точка 1 принадлежит прямой m, поэтому можно сказать, что прямая m в этом месте расположена над прямой n (по отношению к плоскости проекций Π_1).

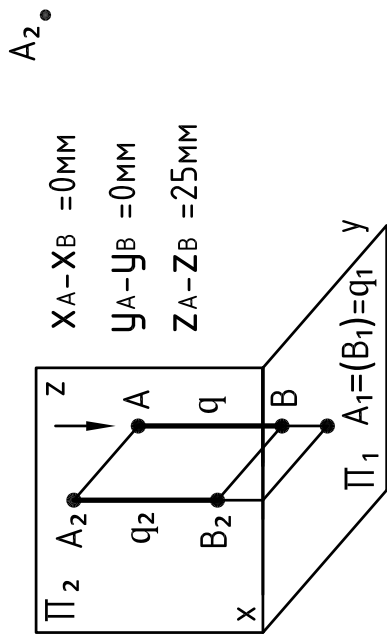
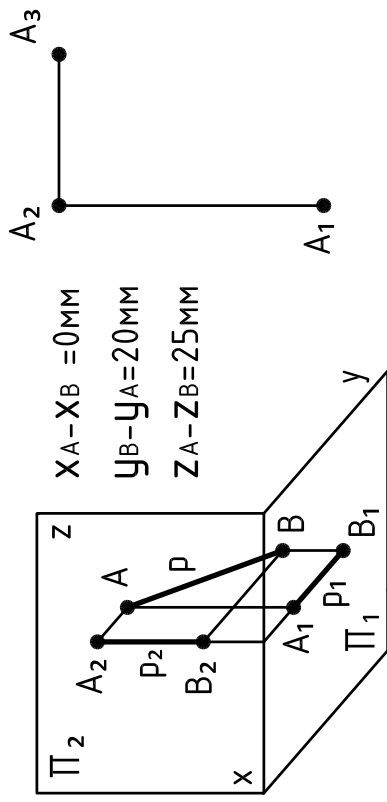
Пример 9. Две прямые l и t (рис. 2.21) скрещивающиеся. Точка пересечения их фронтальных проекций является совпадающими проекциями двух конкурирующих точек 3 и 4. На Π_2 проекция точки 3 закрывает собой проекцию точки 4, т.к. точка 3 расположена ближе к наблюдателю (её горизонтальная проекция 3₁ расположена перед горизонтальной проекцией 4₁ и дальше от оси x). Точка 3 принадлежит прямой l, поэтому можно сказать, что прямая l расположена в этом месте перед прямой t (по отношению к плоскости проекций Π_2).

6. Построить комплексный трёхпроекционный чертёж прямой AB по разности координат двух её точек A и B . В каждом случае записать название прямой. Указать на чертежах линий уровня истинные величины отрезков прямых AB и углы их наклона к плоскостям проекций (см. оформление чертежей линий уровня на рис. 2.7, 2.9, 2.11).

а) $\ell(A,B)$ - _____ б) $h(A,B)$ - _____ в) $f(A,B)$ - _____

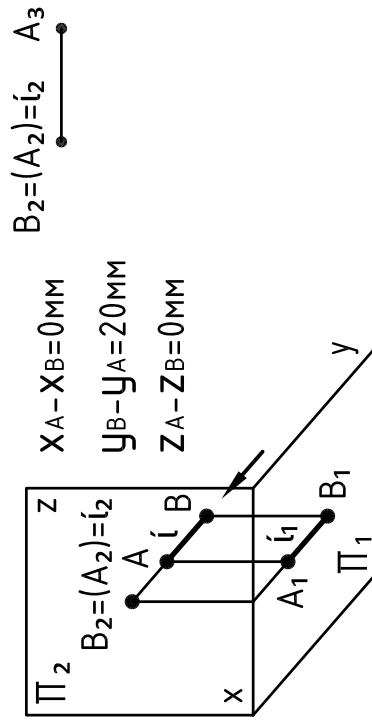


з) р (A,B)-



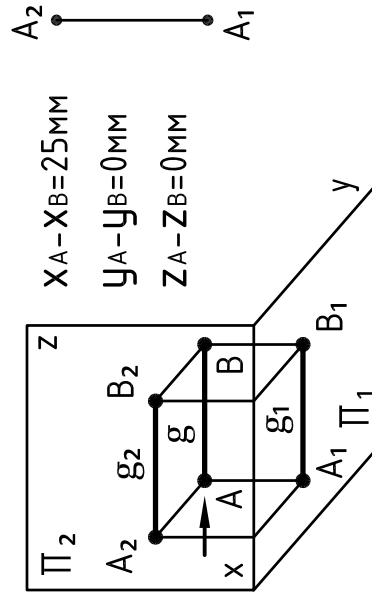
Записать название пары точек A и B:

е) і (A,B)-



Записать название пары точек A и B:

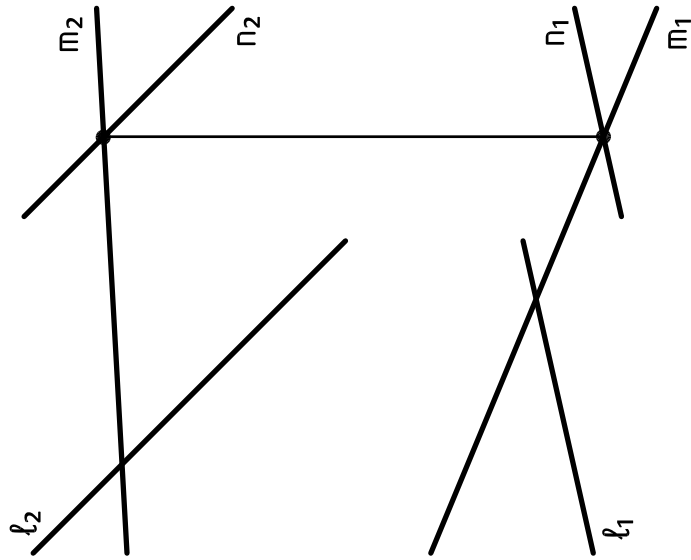
ж) g (A,B)-



Записать название пары точек A и B:

7. Определить относительное положение прямых ℓ , m , n .

Прямые ℓ и n - _____
 Прямые m и n - _____
 Прямые ℓ и m - _____



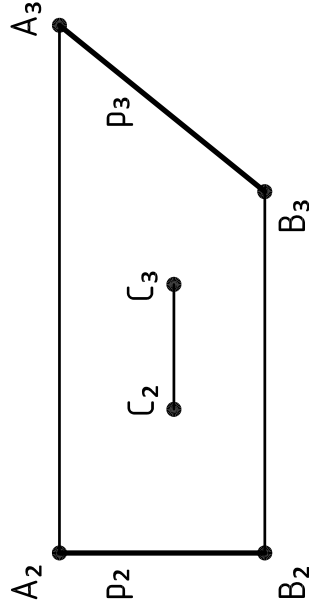
При помощи конкурирующих точек определить взаимное положение скрещивающихся прямых относительно:

Π_1 _____
 Π_2 _____

8. Заданы фронтальная и профильная проекции профильной прямой p и точки C вне её.

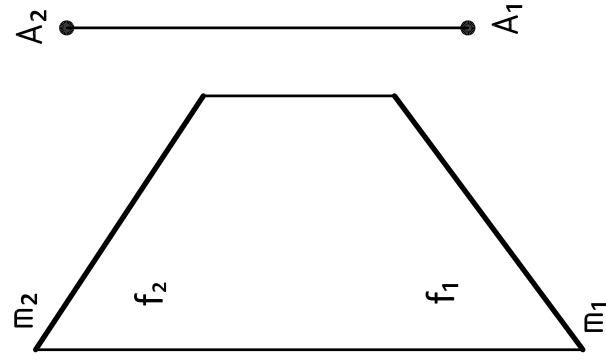
Построить горизонтальную проекцию профильной прямой p .

Через точку C провести горизонталь h , пересекающую прямую p в точке D ($D = p \cap h$).

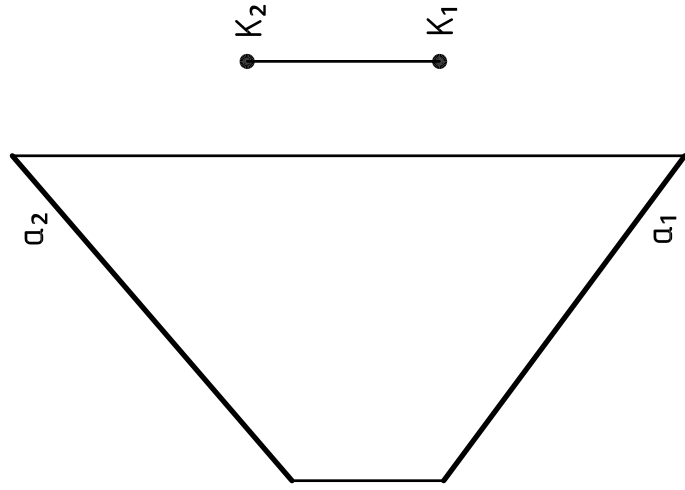


9. Заданы прямая m и точка A вне её. Через точку A провести:

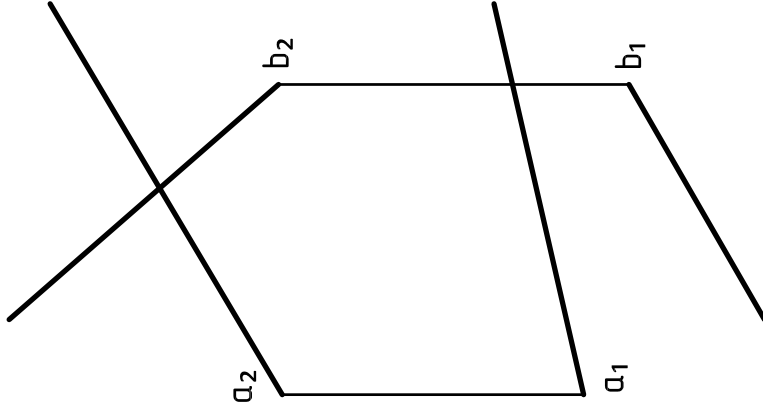
-прямую n , параллельную прямой m ;
 -фронталь f , пересекающую прямую m .



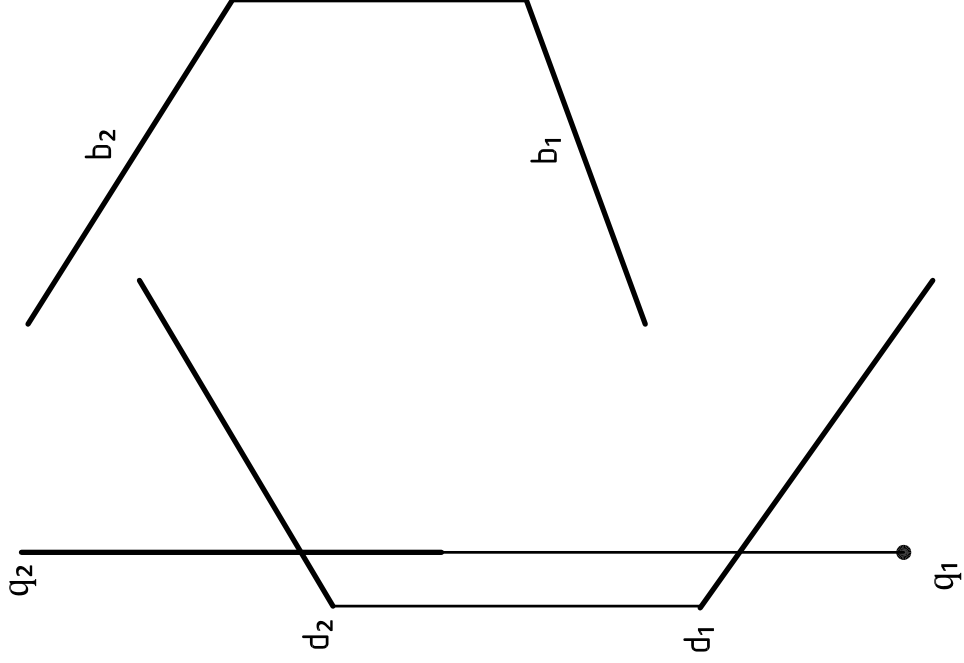
10. Заданы прямая a и точка K вне её. Через точку K провести прямую b , скрещивающуюся с прямой a . Прямая b должна проходить над прямой a .



11. Построить проекции фронтально-проецирующей прямой $\acute{c}$, пересекающей скрещивающиеся прямые a и b .



12. Построить проекции прямой a , параллельной прямой b и пересекающей горизонтально-проецирующую прямую d и прямую c .



Тема 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

Одна из основных метрических задач – определение на комплексном чертеже натуральной величины отрезка прямой общего положения и углов его наклона к плоскостям проекций. Для её решения часто используют способ прямоугольного треугольника.

Рассмотрим отрезок $[AB]$ прямой общего положения (рис. 3.1). Построим горизонтальную (A_1B_1) и фронтальную (A_2B_2) проекции этой прямой.

Рассмотрим трапецию ABB_1A_1 , где $AA_1=z_A$ и $BB_1=z_B$. Из точки A_1 проведём линию, параллельную AB , которая в пересечении с линией проекционной связи даст точку B_0 и отрезок $A_1B_0=|AB|$. Построили прямоугольный треугольник $A_1B_1B_0$, где:

- гипотенуза A_1B_0 равна длине отрезка $[AB]$;
- один катет A_1B_1 является горизонтальной проекцией отрезка $[AB]$;
- второй катет B_1B_0 равен разности координат ($z_B - z_A$) точек A и B по оси z .

Из рис. 3.1 видно, что длину отрезка $[AB]$ можно получить и с помощью фронтальной проекции отрезка. В этом случае за один катет прямоугольного треугольника $A_2B_2A_0$ принимается отрезок A_2B_2 , за другой – разность координат ($y_A - y_B$) точек A и B по оси y .

Таким образом, натуральная величина отрезка может быть определена как гипотенуза прямоугольного треугольника, одним катетом которого является проекция отрезка на какой-либо плоскости проекций, а другим – разность расстояний концов отрезка до этой же плоскости.

Угол наклона прямой к плоскости проекций – это угол между прямой и её проекцией. Следовательно, определяя натуральную величину отрезка прямой способом прямоугольного треугольника, одновременно можно найти и угол её наклона к плоскости проекций. Угол между гипотенузой и соответствующей проекцией отрезка равен углу наклона этой прямой к данной плоскости проекций.

На рис. 3.2 показан пример определения натуральной величины отрезка AB (наглядное изображение отрезка – см. рис. 3.1) и углов наклона его к плоскостям проекций Π_1 (угол α) и Π_2 (угол β). Отрезок задан проекциями A_1B_1 и A_2B_2 .

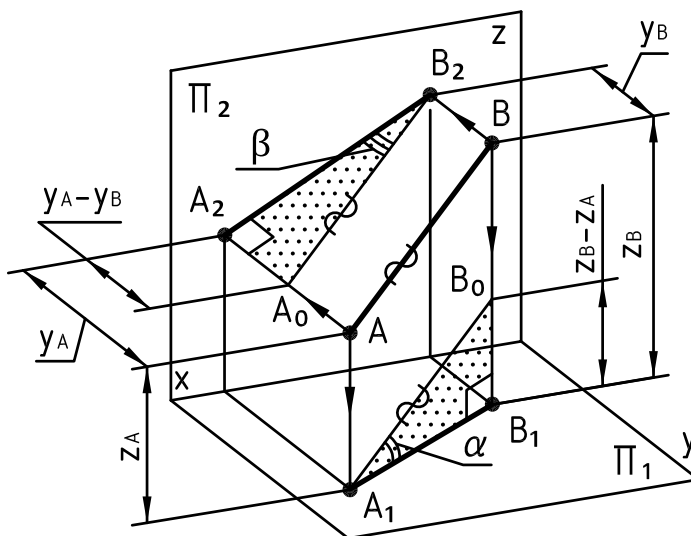


Рис. 3.1

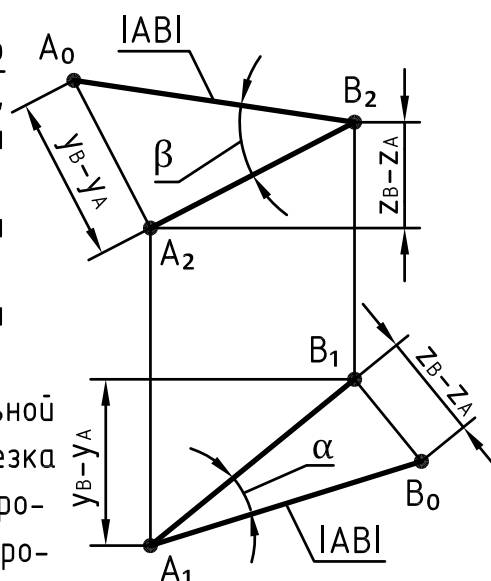
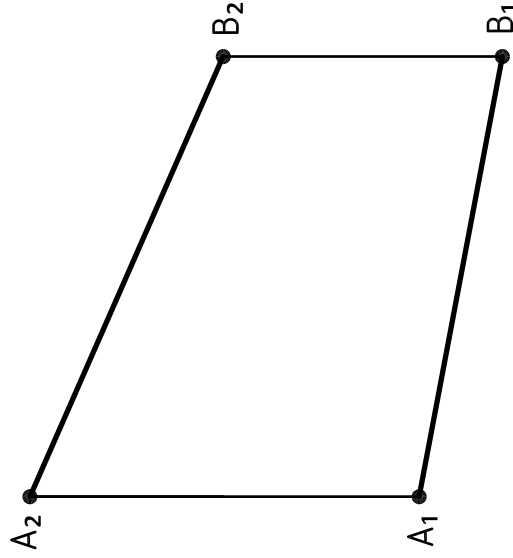
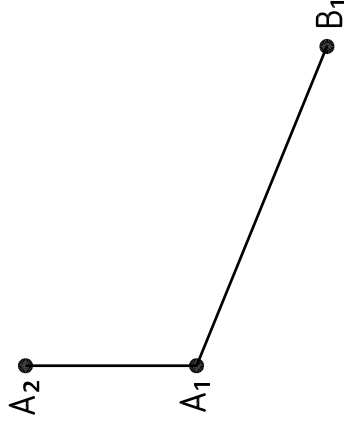


Рис. 3.2

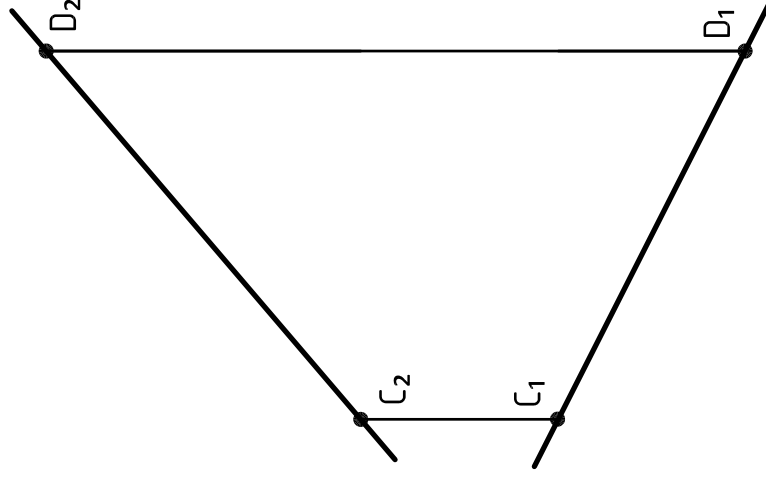
13. Определить на комплексном чертеже истинную величину отрезка $[AB]$ и углы его наклона к плоскостям Π_1 и Π_2 .



14. Задана система точек $A(A_1, A_2)$ и $B(B_1)$. Построить недостающую фронтальную проекцию точки B , если расстояние между ними равно 55 мм.



15. На отрезке CD прямой общего положения отложить от точки C вправо отрезок длиной 45 мм. Полученную точку обозначить F . Построить проекции F_1 и F_2 точки F .



Тема 4. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЁЖ ПЛОСКОСТИ. ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ТОЧКИ И ПРЯМОЙ ПЛОСКОСТИ. ПЛОСКОСТИ ОБЩЕГО И ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ

Плоскость является простейшей поверхностью. Плоскость в пространстве определяется тремя точками, не лежащими на одной прямой. Поэтому на комплексном чертеже плоскость можно задать: проекциями трёх точек (рис. 4.1); проекциями прямой и точки вне её (рис. 4.2); проекциями пересекающихся прямых (рис. 4.3); проекциями параллельных прямых (рис. 4.4); проекциями плоской фигуры (рис. 4.5).

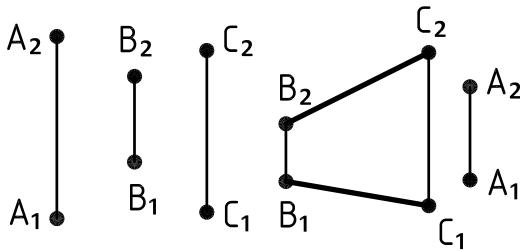


Рис. 4.1

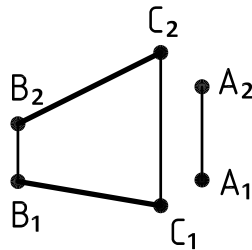


Рис. 4.2

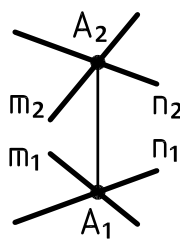


Рис. 4.3

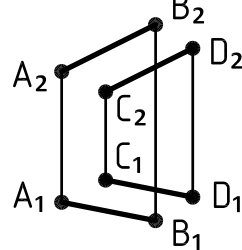


Рис. 4.4

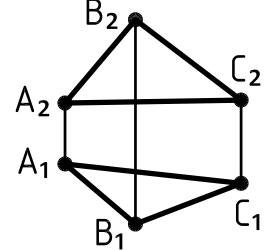


Рис. 4.5

На комплексном чертеже используют различные варианты задания плоскости, в основе которых лежит задание проекций трёх её точек. Для указания способа задания плоскости рядом с буквенным обозначением плоскости в скобках пишутся обозначения тех элементов, которыми она задана, например: $\Gamma(A, B, C)$ – см. рис. 4.1; $\Delta(BC, A)$ – см. рис. 4.2; $\Theta(m \cap n)$ – см. рис. 4.3; $\Lambda(AB \parallel CD)$ – см. рис. 4.4, $\Sigma(\triangle ABC)$ – см. рис. 4.6.

Плоскость может занимать различные положения относительно плоскостей проекций. Плоскость, не параллельная и не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций, называется плоскостью общего положения (рис 4.6).

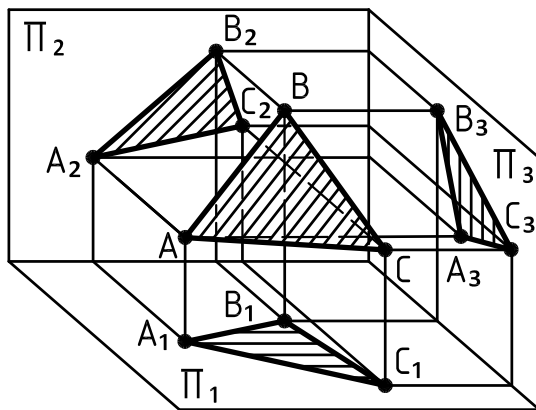


Рис. 4.6

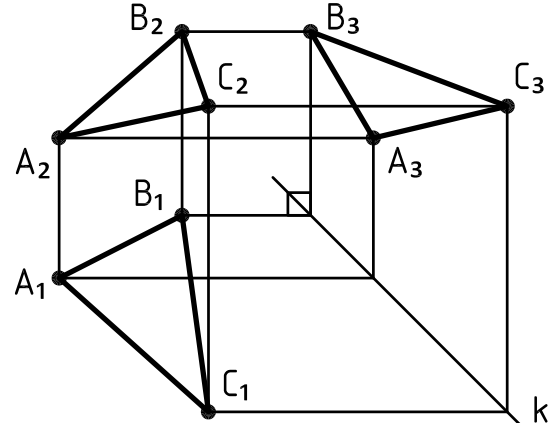


Рис. 4.7

Плоская фигура, занимающая общее положение в пространстве, проецируется на все плоскости проекций с искажением (рис. 4.6 и 4.7).

К числу основных задач, решаемых на плоскости, относят: построение любой прямой в плоскости, построение в плоскости некоторой точки, построение недостающей проекции точки, проверка принадлежности точки плоскости. Построение проекций точек и прямых, принадлежащих какой-либо плоскости, выполняется на основании известных из курса планиметрии признаков (условий) принадлежности.

1. Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в этой

плоскости.

2. Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки, принадлежащие данной плоскости.

3. Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через точку, принадлежащую данной плоскости, и параллельна прямой, находящейся в этой плоскости.

Построение любой прямой в плоскости.

Пример 1. Построить произвольную прямую m , принадлежащую плоскости $\Sigma(a \cap b)$ – рис. 4.8, а.

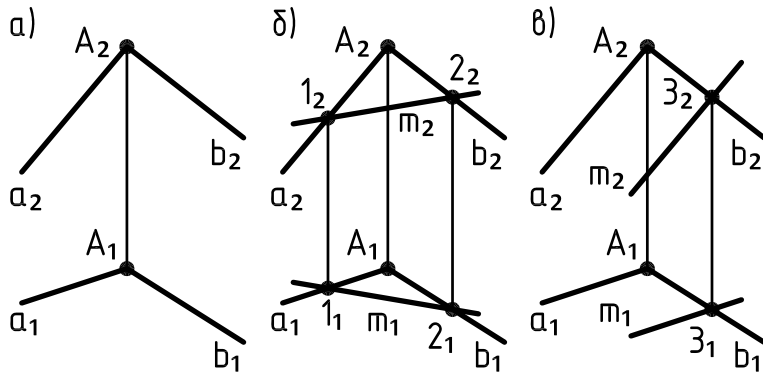


Рис. 4.8

Решение 1. Прямая принадлежит плоскости, если она имеет с плоскостью две общие точки. Поэтому задаёмся (рис. 4.8, б) на прямых a (a_1, a_2) и b (b_1, b_2) произвольными точками $1(1_1, 1_2)$, $2(2_1, 2_2)$ и проводим (рис. 4.8, в) через них прямую $m(m_1, m_2)$.

Решение 2. Построим (рис. 4.8, в) прямую m , проходящую через

точку, принадлежащую одной из заданных прямых, (например, точку 3 , принадлежащую прямой b) и параллельную другой заданной прямой (прямой a).

Построение в плоскости некоторой точки.

Пример 2. Взять на плоскости $\Sigma(\triangle ABC)$ произвольную точку K (рис. 4.9, а).

Решение. Проводим в плоскости треугольника ABC (рис. 4.8, б) вспомогательную прямую $LM(L_1M_1, L_2M_2)$, имеющую с плоскостью две общие точки $L(L_1, L_2)$ и $M(M_1, M_2)$ и на ней берём произвольную точку $K(K_1, K_2)$. Последняя и принадлежит заданной плоскости.

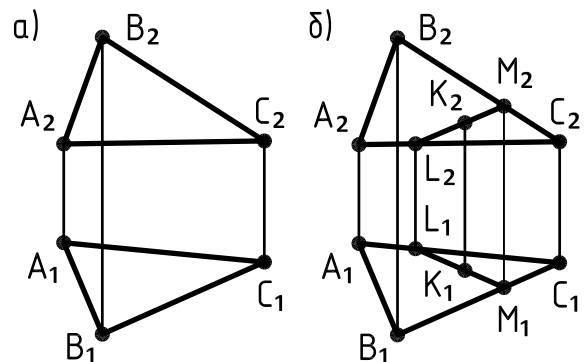


Рис. 4.9

Построение недостающей проекции точки.

Пример 3. Заданы плоскость $\Theta(m \cap n)$ и горизонтальная проекция точки K , принадлежащей этой плоскости (рис. 4.10, а). Построить её фронтальную проекцию, пользуясь фронталью f .

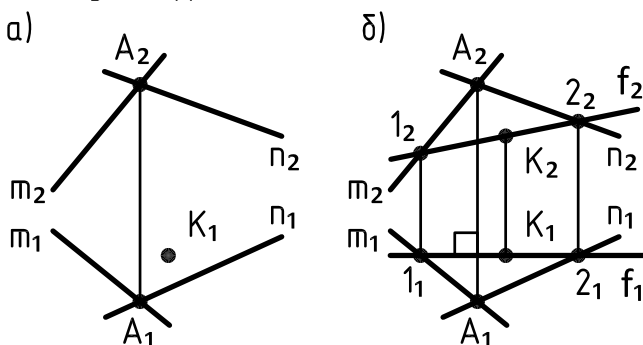


Рис. 4.10

Решение. Проведём через точку K_1 параллельно оси проекций x горизонтальную проекцию f_1 фронтали, которая не пересекает прямые m_1 и n_1 в точках 1_1 и 2_1 . Находим точки 1_2 и 2_2 на прямых m_2 и n_2 и проводим через них фронтальную проекцию f_2 фронтали. Фронталь принадлежит заданной плоскости. Проводим вертикальную линию связи и определяем точку K_2 на прямой f_2 .

Пример 4. Заданы плоскость $\Delta(m \parallel n)$ и точка K (рис. 4.11, а) пространства. Определить, принадлежит ли точка K плоскости.

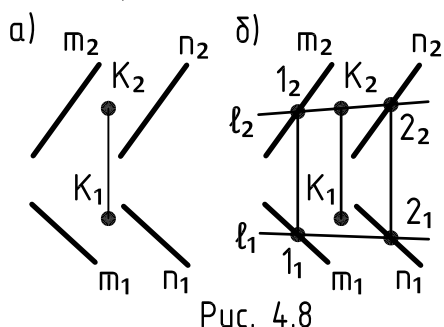


Рис. 4.8

Решение. Проведём (рис. 4.11, б) через фронтальную проекцию K_2 прямую ℓ_2 . Считая, что прямая ℓ принадлежит плоскости $\Delta(m \parallel n)$, построим её горизонтальную проекцию ℓ_1 по точкам пересечения 1 и 2. Как видим (рис. 4.8, б), прямая ℓ_1 не проходит через точку K_1 . Следовательно, точка не принадлежит плоскости Δ , то есть $K \notin \Delta(m \parallel n)$.

Плоскости частного положения подразделяются на проецирующие плоскости и плоскости уровня.

Проецирующая плоскость перпендикулярна к одной из плоскостей проекций. Такая плоскость изображается на плоскости проекций, к которой она перпендикулярна, в виде прямой линии (вырождается в прямую). Любые точки, линии или фигуры, лежащие в ней, проецируются на плоскость проекций на эту линию. Указанное свойство проецирующих плоскостей позволяет весьма просто строить в проецирующей плоскости произвольную точку, прямую или фигуру, а также проводить через точку и прямую проецирующую плоскость.

Проецирующую плоскость можно задать на безосном чертеже одной её вырожденной в прямую проекцией, которая определяет положение плоскости в пространстве.

Угол между проецирующей плоскостью и неперпендикулярной ей плоскостью проекций проецируется в натуральную величину на той плоскости проекций, которой перпендикулярна проецирующая плоскость.

Горизонтально-проецирующей называется плоскость, перпендикулярная Π_1 . Задана на рис. 4.9 двумя пересекающимися прямыми $\Theta(AC \cap AB)$.

Фронтально-проецирующей называется плоскость, перпендикулярная Π_2 . Задана

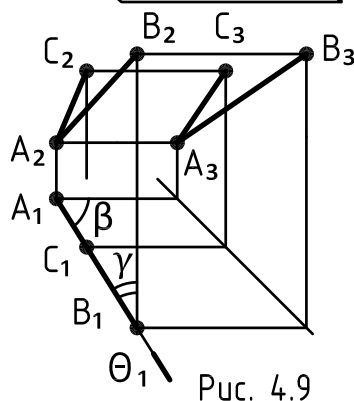
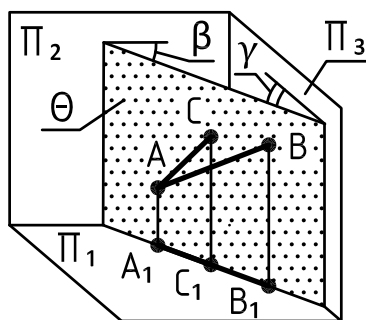


Рис. 4.9

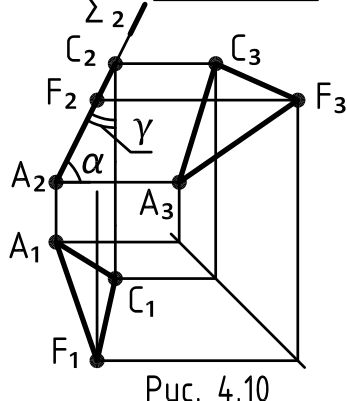
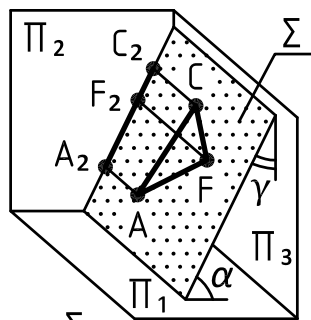


Рис. 4.10

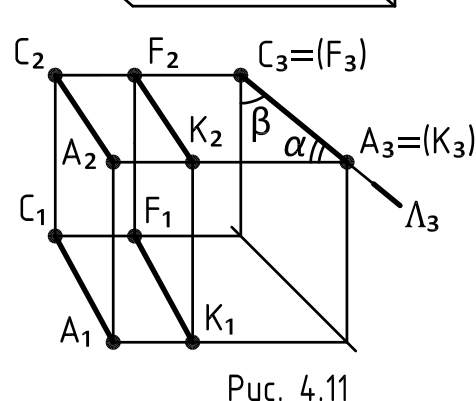
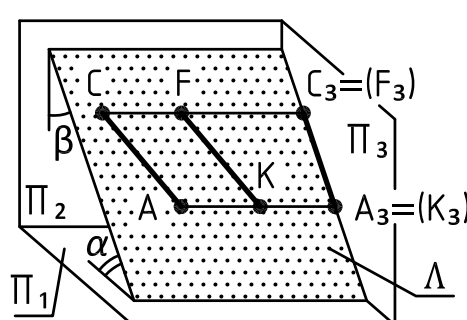


Рис. 4.11

на рис. 4.10 треугольником $\Sigma(\Delta ACF)$.

Профильно-проецирующей называется плоскость, перпендикулярная Π_3 . Задана на рис. 4.11 двумя параллельными прямыми $\Delta(AC \parallel KF)$.

Плоскость уровня параллельна одной из плоскостей проекций и, следовательно, перпендикулярна двум другим.

Горизонтальная плоскость уровня параллельна Π_1 . Задана на рис. 4.12 двумя пересекающимися прямыми $\Gamma(KF \cap LF)$.

Фронтальная плоскость уровня параллельна Π_2 . Задана на рис. 4.13 двумя пересекающимися прямыми $\Delta(NF \cap CF)$.

Профильная плоскость уровня параллельна Π_3 . Задана на рис. 4.14 двумя пересекающимися прямыми $\Psi(LC \cap FC)$.

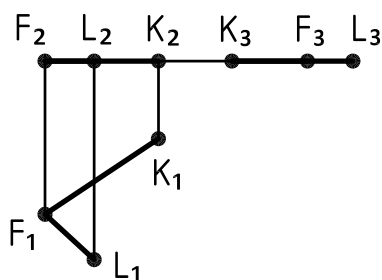
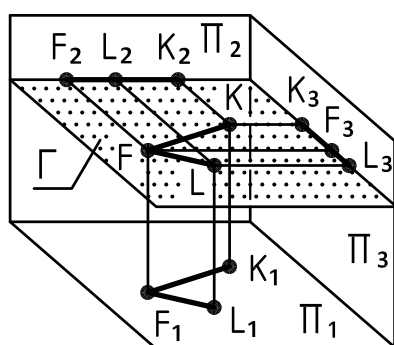


Рис. 4.12

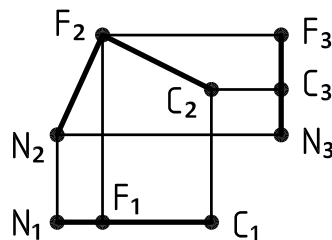
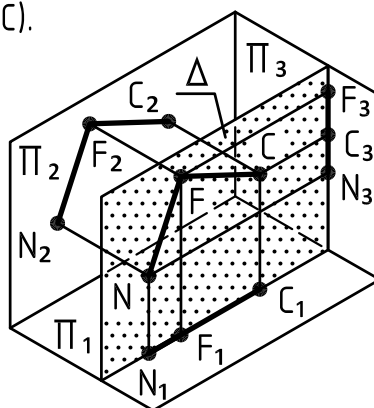


Рис. 4.13

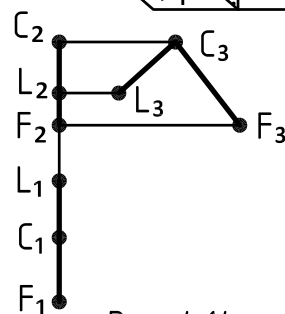
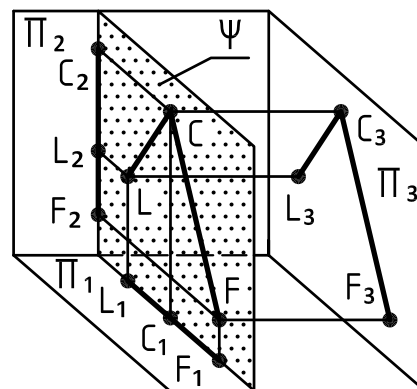


Рис. 4.14

Плоскость уровня имеет две вырожденные проекции. Плоскость уровня определяется одной из своих вырожденных проекций. Любая фигура, лежащая в плоскости уровня, проецируется без искажения на ту плоскость проекций, которой параллельна данная плоскость.

Параллельность плоскостей, прямой и плоскости.

Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым второй плоскости (рис. 4.15). $c \parallel n \wedge a \parallel m \Rightarrow \Delta(a \cap c) \parallel \Sigma(m \cap n)$.

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна прямой, принадлежащей этой плоскости (рис. 4.16). $c \subset \Sigma(a \cap b) \wedge c \parallel n \Rightarrow n \parallel \Sigma(a \cap b)$.

Главные линии плоскости – это линии уровня (горизонталь h , фронталь f , профильная прямая p), принадлежащие данной плоскости.

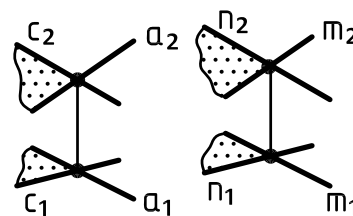


Рис. 4.15

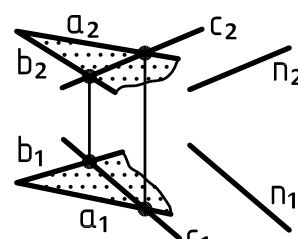


Рис. 4.16

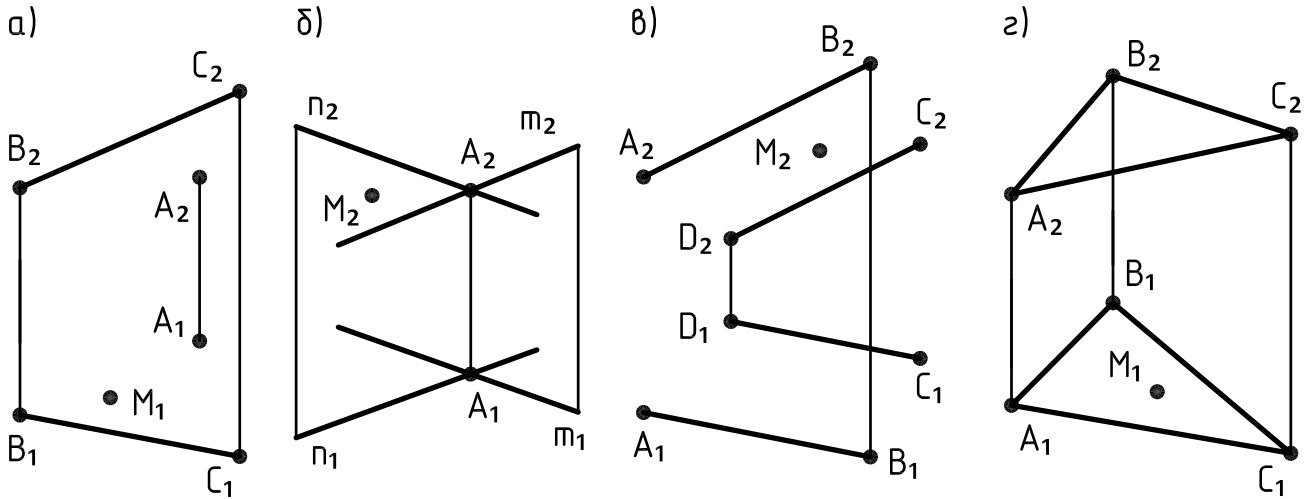
16. Построить недостающую проекцию точки М, лежащей в плоскости:

а) $\Delta(BC, A)$, заданной отрезком прямой $[BC]$ и точкой A вне его ;

б) $\Sigma(m \cap n)$, заданной двумя пересекающимися прямыми m и n ;

в) $\Theta(AB \parallel CD)$, заданной двумя параллельными прямыми AB и CD ;

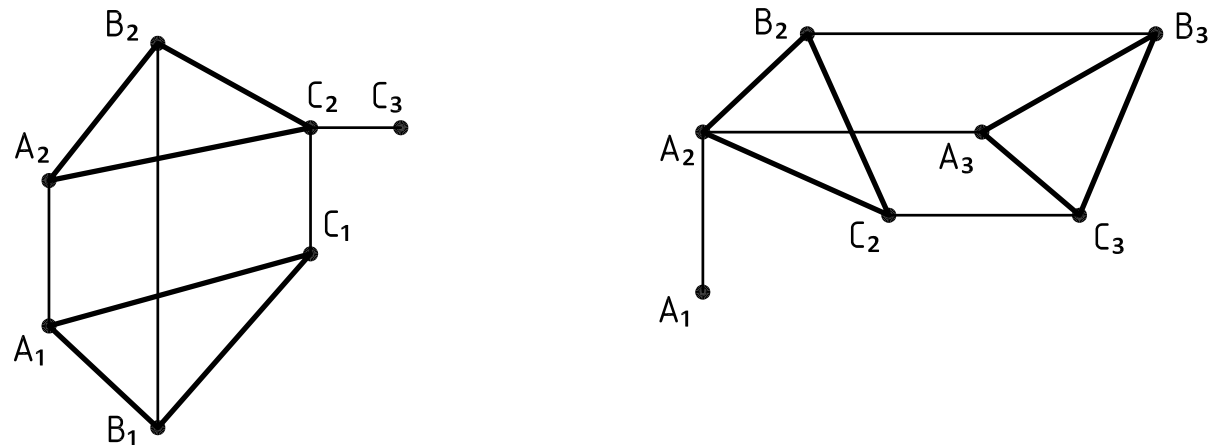
г) $\Omega(\Delta ABC)$, заданной плоской фигурой (треугольник ABC).



17. По заданным проекциям плоскости общего положения $\Sigma(\Delta ABC)$ построить недостающие:

а) профильную проекцию;

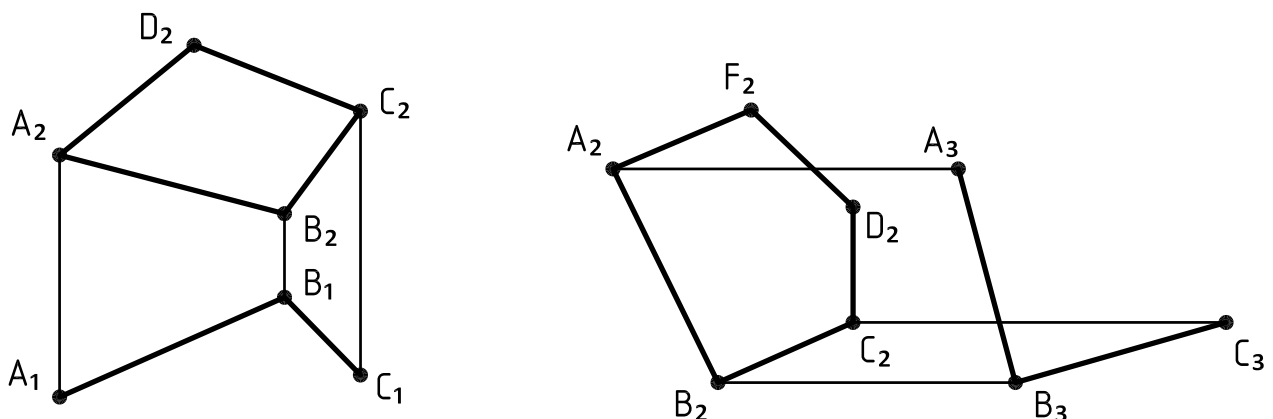
б) горизонтальную проекцию.



18. Достроить недостающие:

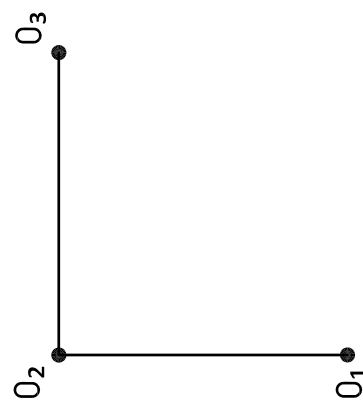
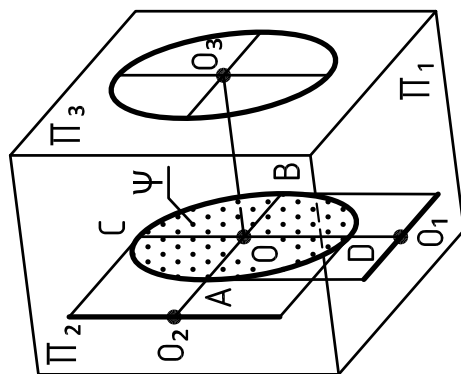
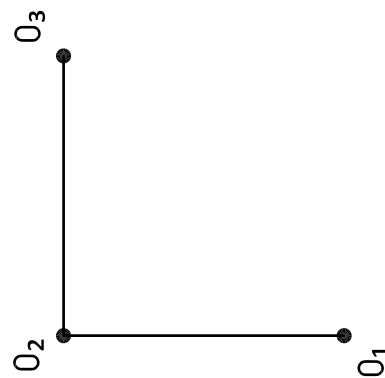
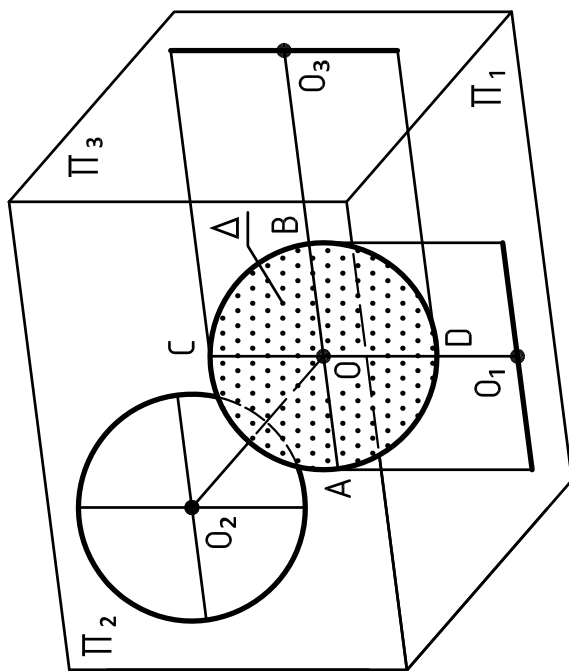
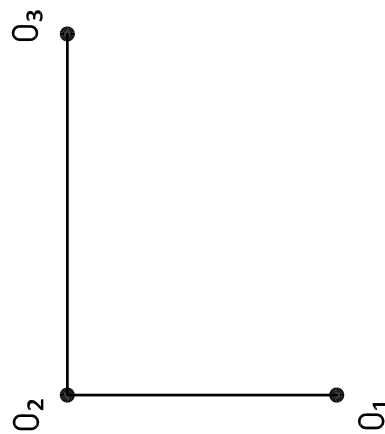
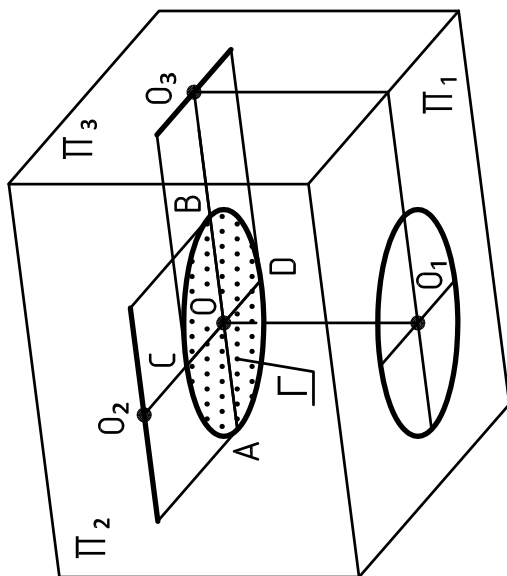
а) горизонтальную проекцию плоского четырёхугольника ABCD;

б) профильную проекцию плоского пятиугольника ABCDF.

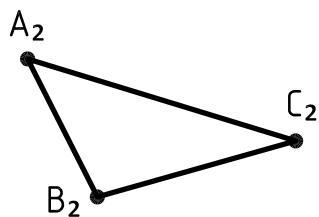


19 Плоскость уровня задана в виде круга радиусом 15 мм с центром в точке O. Построить три проекции:

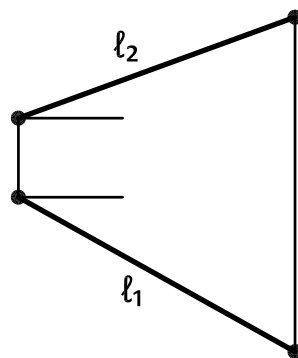
- а) горизонтальной плоскости уровня Γ ; б) фронтальной плоскости уровня Δ ; в) профильной плоскости уровня Ψ .
 На каждом комплексном чертеже плоскости (Γ, Θ, Ψ) построить проекции опорных точек A, B, C, D.



20. Построить недостающие проекции горизонтально-проецирующей плоскости $\Sigma(\triangle ABC)$, расположенной под углом $\beta=30^\circ$ к плоскости Π_2 .



21. Через прямую ℓ провести фронтально-проецирующую плоскость Σ и горизонтально-проецирующую плоскость Θ . Указать углы наклона плоскостей Σ и Θ к плоскостям проекций Π_1 , Π_2 и Π_3 .

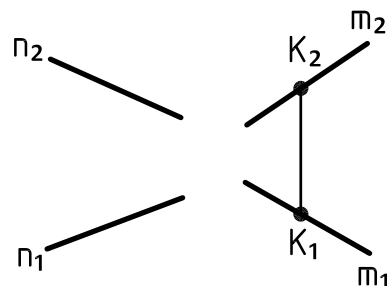
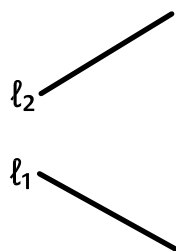
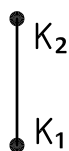
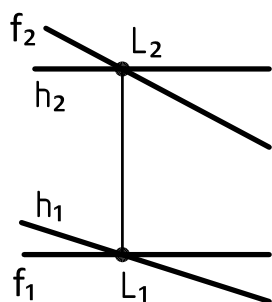


22. Параллельность прямой и плоскости:

а) Через точку K провести прямую общего положения, параллельную плоскости $\Theta(h \cap f)$;

б) Через точку K провести плоскость общего положения, параллельную прямой ℓ ;

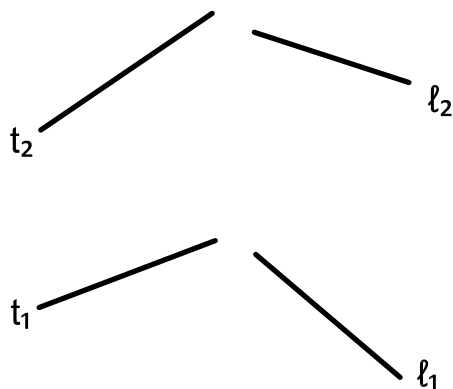
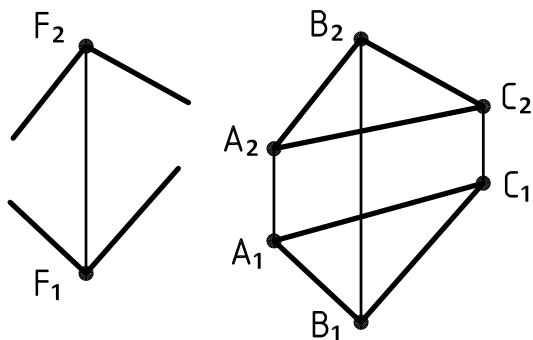
в) Через прямую m провести плоскость общего положения, параллельную прямой n .



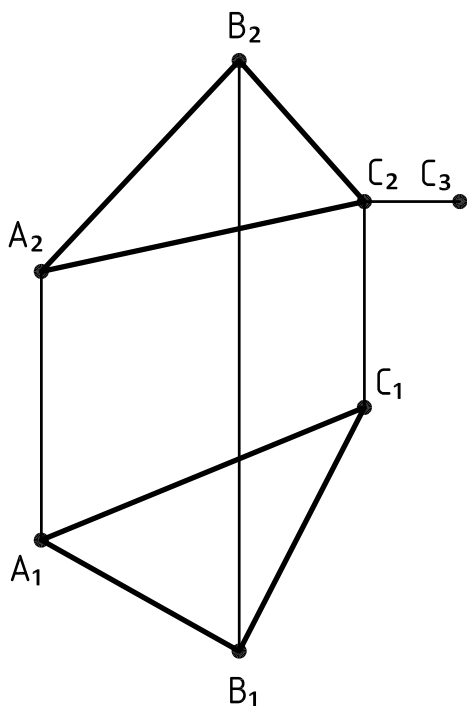
23. Параллельность плоскостей:

а) Через точку F провести плоскость Ψ , параллельную плоскости общего положения $\Sigma(\triangle ABC)$;

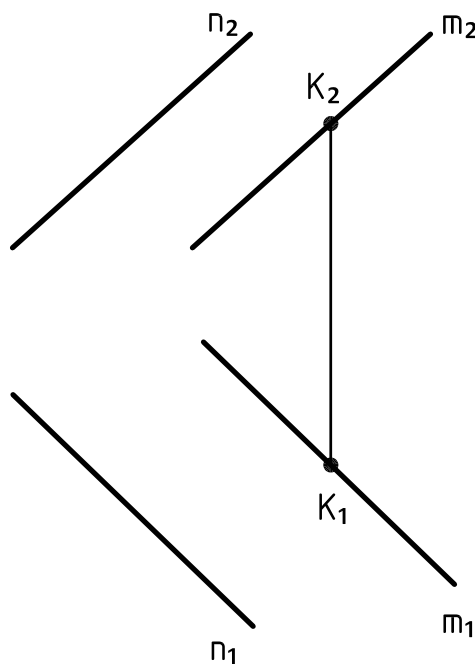
б) Через данные скрещивающиеся прямые t и ℓ провести две параллельные плоскости.



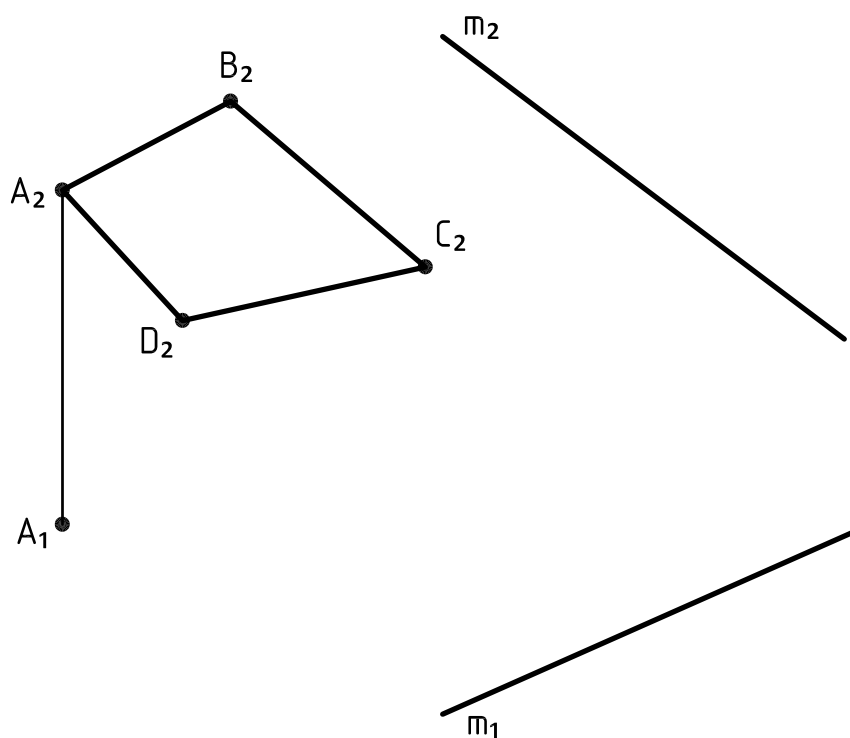
24. По заданным проекциям построить профильную проекцию плоскости $\Sigma(\triangle ABC)$. В плоскости треугольника ABC построить произвольные горизонталь h , фронталь f и профильную прямую p .



25. Через точку K провести горизонталь h и фронталь f плоскости $\Theta(m \parallel n)$.



26. Заданы плоскость $\Delta(m, A)$ и фронтальная проекция четырёхугольника ABCD, принадлежащего этой плоскости. Построить с помощью линий уровня горизонтальную проекцию четырёхугольника ABCD.



Заменяем фронтальную плоскость проекций Π_2 новой плоскостью Π_4 , перпендикулярной Π_1 и образующей с плоскостью Π_2 некоторый угол. В результате получим новую систему плоскостей проекций Π_4/Π_1 .

Плоскость Π_1 является общей для обеих систем. Новая ось проекций $X_{14} = \Pi_1 \cap \Pi_4$, а A_1 и A_4 – ортогональные проекции точки A .

При переходе от старой системы Π_2/Π_1 к новой Π_4/Π_1 остаются неизменными:

- 1) плоскость Π_1 и точка A ;
- 2) горизонтальная проекция A_1 точки A ;
- 3) расстояние от точки A до плоскости Π_1 , т.е. $AA_1 = A_{12}A_2 = A_{14}A_4$.

Рассмотрим комплексный чертеж точки A .

Проведем ось проекций X_{14} (рис. 5.2). Из точки A_1 проведем линию связи, перпендикулярную оси X_{14} . На линии связи от точки A_{14} откладываем отрезок $|A_{14}A_4| = |A_{12}A_2|$. Полученная таким образом точка A_4 является проекцией точки A на плоскость Π_4 . В новой системе плоскостей проекций Π_4/Π_1 положение точки A определяется проекциями A_1 и A_4 .

Рассмотрим замену горизонтальной плоскости проекций, т.е. преобразование системы Π_2/Π_1 в систему Π_2/Π_5 .

На рис. 5.3 изображены исходная система плоскостей проекций Π_2/Π_1 , точка A пространства и ее ортогональные проекции A_1 и A_2 .

Заменяем горизонтальную плоскость проекций Π_1 новой плоскостью Π_5 (Π_5 располагаем перпендикулярно к плоскости Π_2) и построим аналогично предыдущему точку A_5 . Из построения видим, что при замене плоскостей проекций Π_1 на Π_5 расстояние от точки до плоскости проекций Π_2 (глубина точки) сохраняется, т.е. $AA_2 = A_1A_{12} = A_5A_{25}$.

Рассматривая оба разобранные случая совместно, можно сделать следующей общий вывод: при замене одной из плоскостей проекций новой плоскостью расстояния от точек геометрического объекта до незаменяемой плоскости проекций остаются постоянными.

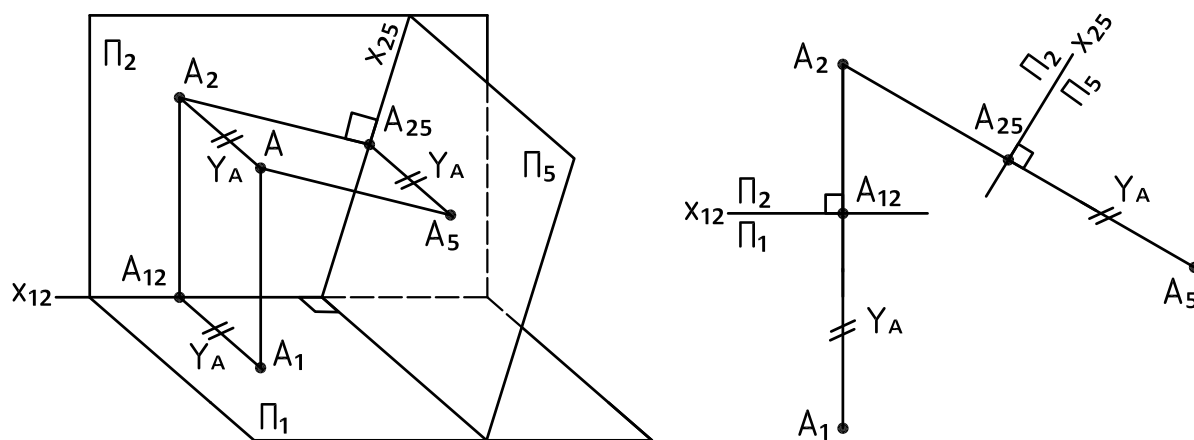
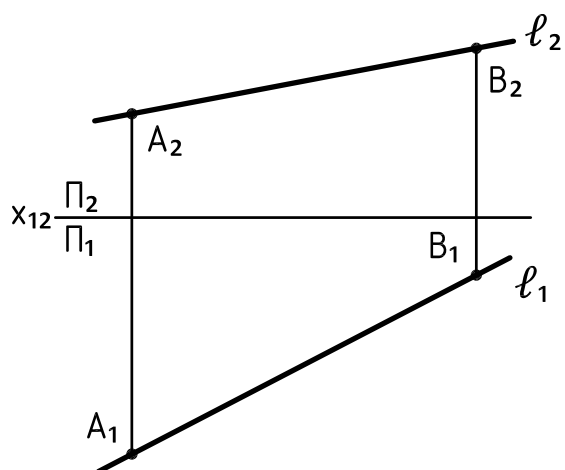
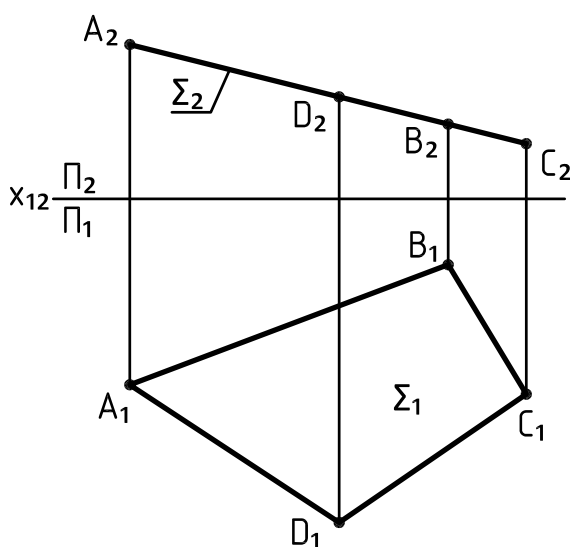


Рис. 5.3

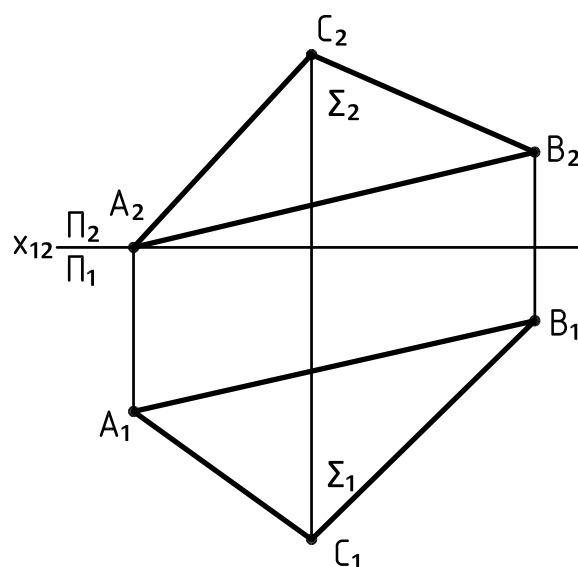
27. Преобразовать прямую ℓ общего положения в линию уровня и определить углы наклона ее к плоскостям проекций Π_1 и Π_2 .



28. Преобразовать фронтально проецирующую плоскость $\Sigma(ABCD)$ в плоскость уровня.



29. Преобразовать плоскость общего положения $\Sigma(ABC)$ в плоскость уровня.



Тема 6. ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

6.1. ПРОЕКЦИИ ПРЯМОГО УГЛА

Теорема 1. Если одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, а другая является прямой общего положения, то прямой угол проецируется на эту плоскость проекций без искажения, т.е. в прямой же угол (рис. 6.1).

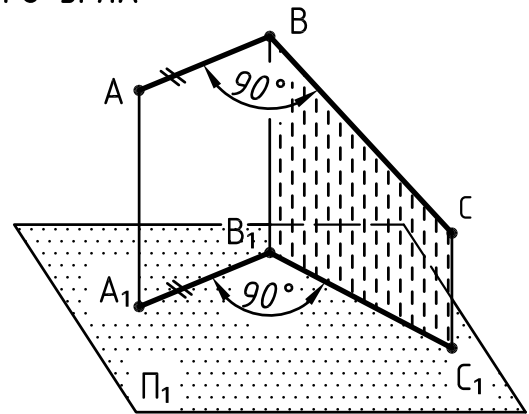


Рис. 6.1

На чертежах (рис. 6.2, 6.3) показаны проекции взаимно-перпендикулярных прямых, одна из которых является горизонталью (h). На рис. 6.2 прямые пересекающиеся, на рис. 6.3 – скрещивающиеся.

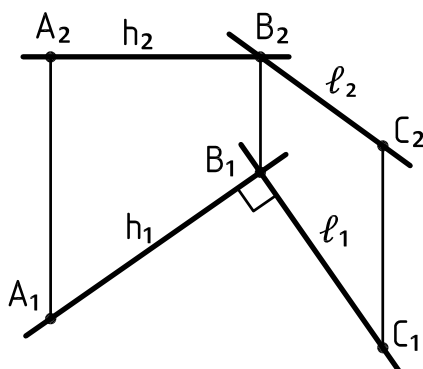


Рис. 6.2

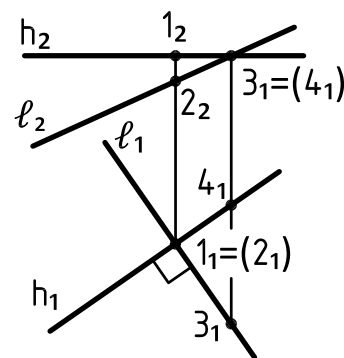


Рис. 6.3

На комплексных чертежах (рис. 6.4, 6.5) прямая m общего положения перпендикулярна фронталу $f \parallel \Pi_2$. На рис. 6.4 прямые пересекающиеся, на рис. 6.5 – скрещивающиеся.

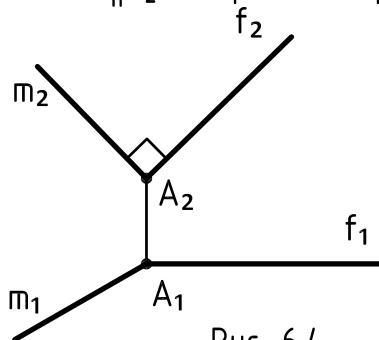


Рис. 6.4

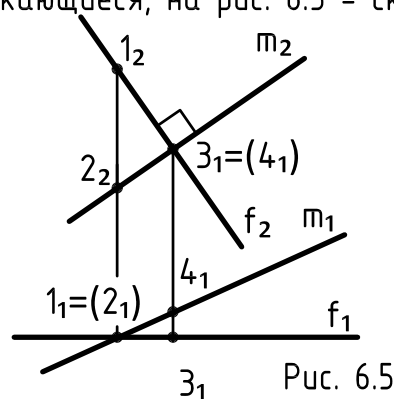


Рис. 6.5

6.2. ПРЯМАЯ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ К ПЛОСКОСТИ

Из школьного курса геометрии известно, что прямая перпендикулярна плоскости если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости.

Для задания прямой, перпендикулярной плоскости в качестве таких пересекающихся прямых естественно выбрать линии уровня – например фронталь и горизонталь. В этом случае можно воспользоваться свойствами проекций прямого угла, рассмотренными выше (см. теорему 1). Признак перпендикулярности прямой и плоскости можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 2. Если прямая перпендикулярна к плоскости в пространстве, то горизонтальная проекция прямой перпендикулярна к горизонтальным проекциям горизонталей (Рис. 6.6), а фронтальная проекция перпендикулярна к фронтальным проекциям фронталей этой плоскости.

На комплексном чертеже (рис. 6.7) рассмотрим построение прямой m , перпендикулярной к плоскости $\Sigma(ABC)$.

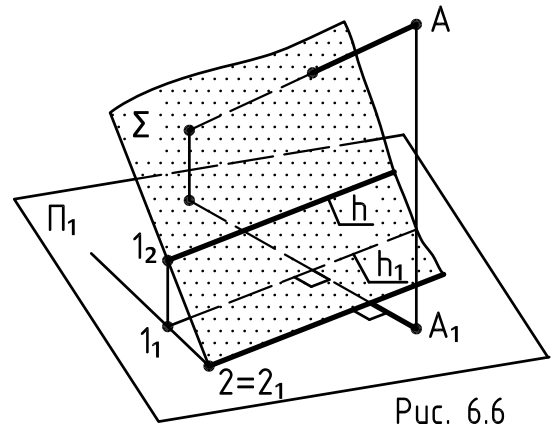


Рис. 6.6

В плоскости $\Sigma(ABC)$ построим горизонталь h и фронталь f .

Затем через точку K проведем $m_1 \perp h_1$, так как $h \parallel \Pi_1$, а $m_2 \perp f_2$, так как $f \parallel \Pi_2$ (на основании теоремы 1). Точка пересечения прямой m с плоскостью $\Sigma(ABC)$ не определялась.

6.3. ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПЛОСКОСТИ

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой (или параллельна этому перпендикуляру).

Таким образом, чтобы построить плоскость Σ , перпендикулярную к плоскости Δ , необходимо задать прямую $\ell \perp \Delta$ и через эту прямую про-

вести плоскость $\Sigma(\ell \cap m)$. Для этого прямая ℓ должна пересекать прямую m в точке C (рис. 6.8).

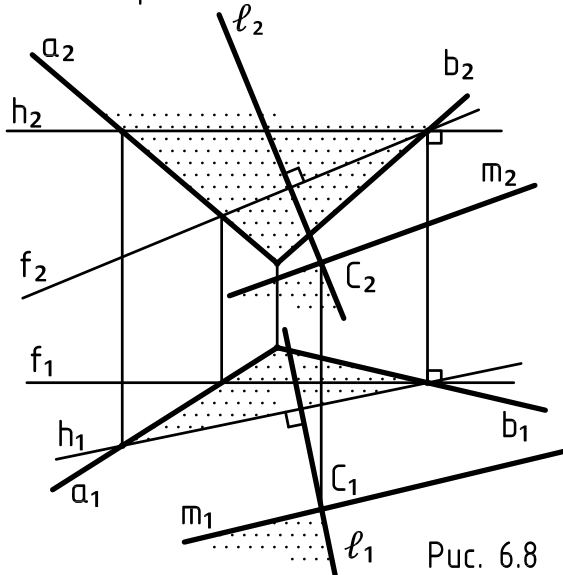


Рис. 6.8

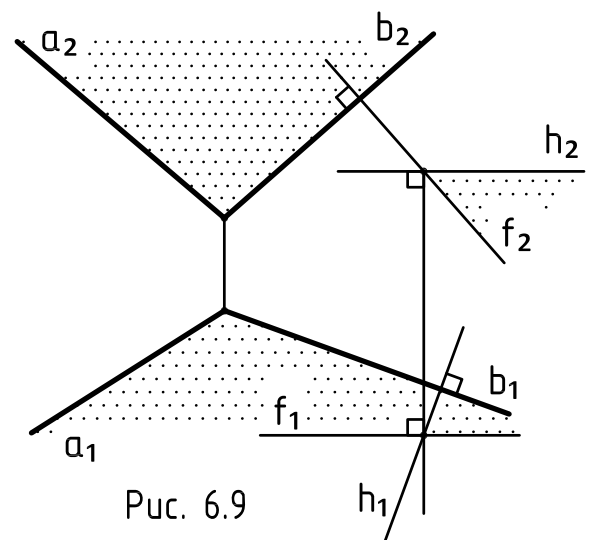


Рис. 6.9

На комплексном чертеже (см. рис. 6.8) рассмотрим построение плоскости $\Sigma(\ell \cap m)$, перпендикулярной к данной плоскости $\Delta(a \cap b)$.

Прямая $\ell \perp \Delta$, так как $\ell_1 \perp h_1$, $\ell_2 \perp f_2$ (h, f — принадлежат плоскости Δ).

Произвольная прямая m пересекает прямую ℓ в точке C .

Рассмотрим рис. 6.9, на котором изображена плоскость $\Sigma(h \cap f)$ перпендикулярная прямой b , принадлежащей плоскости $\Delta(a \cap b)$, так как горизонталь $h \perp b$ ($h_1 \perp b_1$) и фронталь $f \perp b$ ($f_1 \perp b_1$). Следовательно, плоскость $\Sigma(h \cap f)$ перпендикулярна к плоскости $\Delta(a \cap b)$.

6.4. ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

а) Прямые скрещивающиеся:

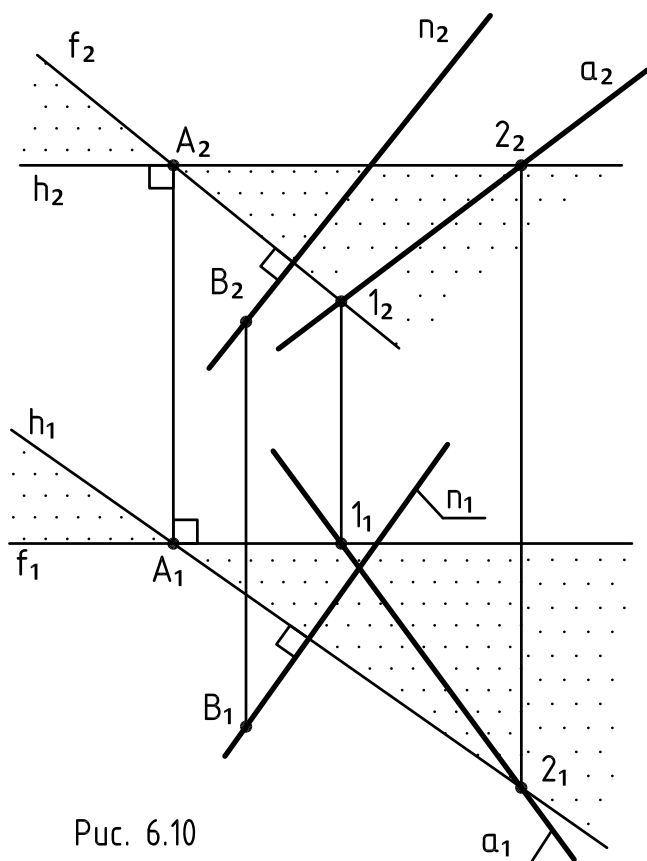


Рис. 6.10

Чтобы построить прямую, перпендикулярную к данной прямой необходимо провести плоскость, перпендикулярную к этой прямой и построить любую прямую, лежащую в этой плоскости.

На чертеже (рис. 6.10) через произвольную точку A проведена плоскость $\Sigma(h \cap f)$, перпендикулярная к данной прямой n . В этой плоскости построена произвольная прямая $a(a_1, a_2)$. Прямая $a \perp n$, так как принадлежит плоскости $\Sigma(h \cap f) \perp n$ (горизонталь $h \perp n$, фронталь $f \perp n$).

Рассмотрим случай, когда прямой угол образован двумя пересекающимися прямыми общего положения.

б) Прямые пересекающиеся:

Пример. Из точки A опустить перпендикуляр $\ell(AB)$ на прямую m общего положения (рис. 6.11).

Этот пример относится к разряду комплексных и ее решение состоит из трех этапов.

1. Анализ. Искомая прямая должна удовлетворять двум условиям:

а) Проходить через точку A и быть перпендикулярной прямой m . Этому условию соответствует множество прямых, проходящих через точку A и перпендикулярных прямой m . Это множество прямых образует плоскость $\Sigma(h \cap f) \perp m$.

б) Проходить через точку A и пересекать прямую m . Этому условию удовлетворяет множество прямых, проходящих через точку A и пересекающих прямую m . Такое множество прямых образует плоскость $\Delta(A, m)$.

в) Искомый перпендикуляр $\ell(AB)$ определится как пересечение этих двух

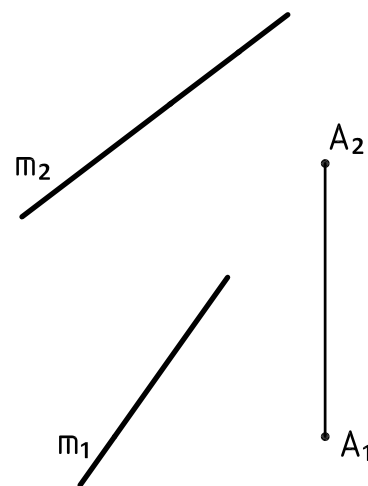


Рис. 6.11

множеств – плоскостей $\Sigma(h \cap f)$ и $\Delta(A, m)$: $\ell(AB) = \Sigma(h \cap f) \cap \Delta(A, m)$ (рис. 6.12).

На основании анализа составляем алгоритм решения данного примера:

- 1) $\Sigma(h \cap f) \ni A$, $\Sigma(h \cap f) \perp m$;
- 2) $\Delta(A, m)$;
- 3) $\ell(AB) = \Sigma \cap \Delta$.

2. Исследование. Данный пример имеет единственное решение, так как две плоскости в общем случае пересекаются по одной прямой.

3. Построение. Графическое построение примера рассмотрено на рис. 6.13.

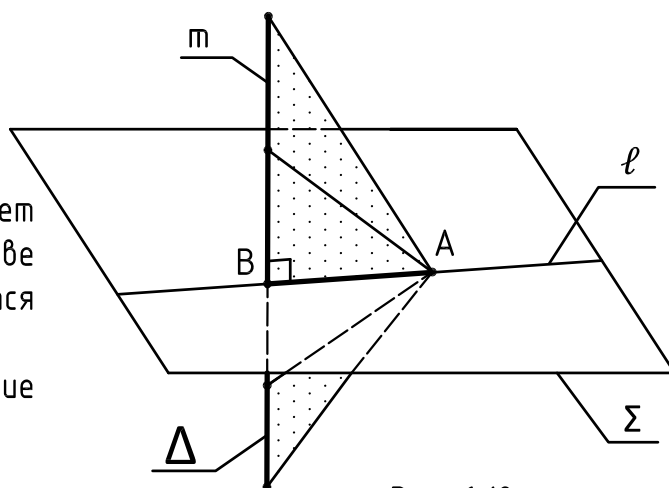


Рис. 6.12

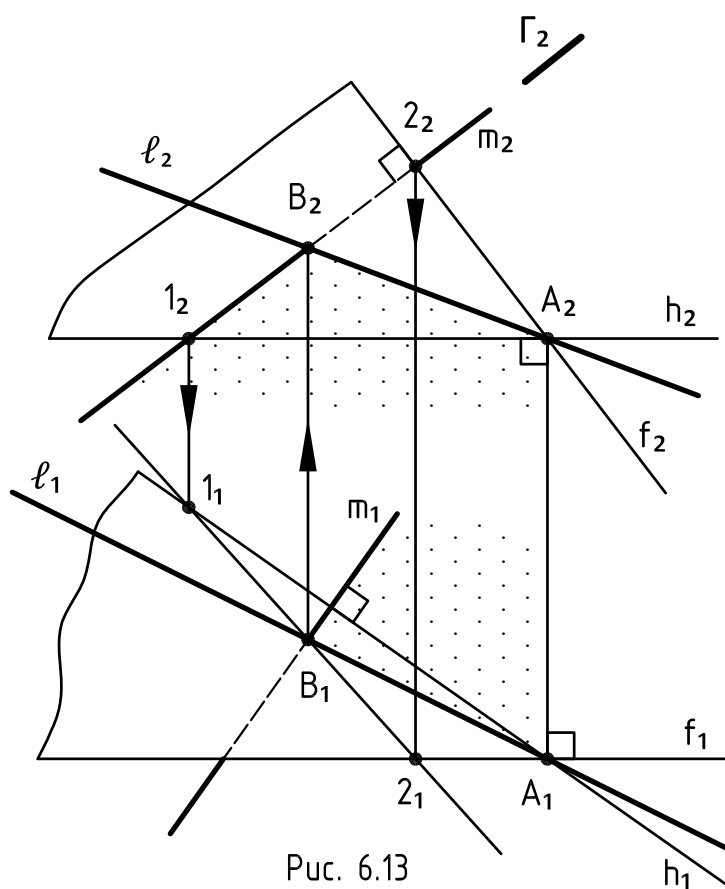


Рис. 6.13

Построение можно записать следующим алгоритмом:

- 1) $\Gamma \supset m$, $\Gamma \perp \Pi_2$;
- 2) $(1-2) = \Gamma \cap \Sigma$;
- 3) $B = (1-2) \cap m$.

Соединив точку A с точкой B, получим искомый перпендикуляр $\ell(AB)$ к прямой m общего положения.

Вывод:

Построение взаимно перпендикулярных прямых общего положения сводится к построению плоскости, перпендикулярной к заданной прямой общего положения.

Через произвольную точку A пространства проведем вспомогательную плоскость $\Sigma(h \cap f)$ перпендикулярную к прямой m, так как фронталь перпендикулярна прямой m и горизонталь перпендикулярна прямой m.

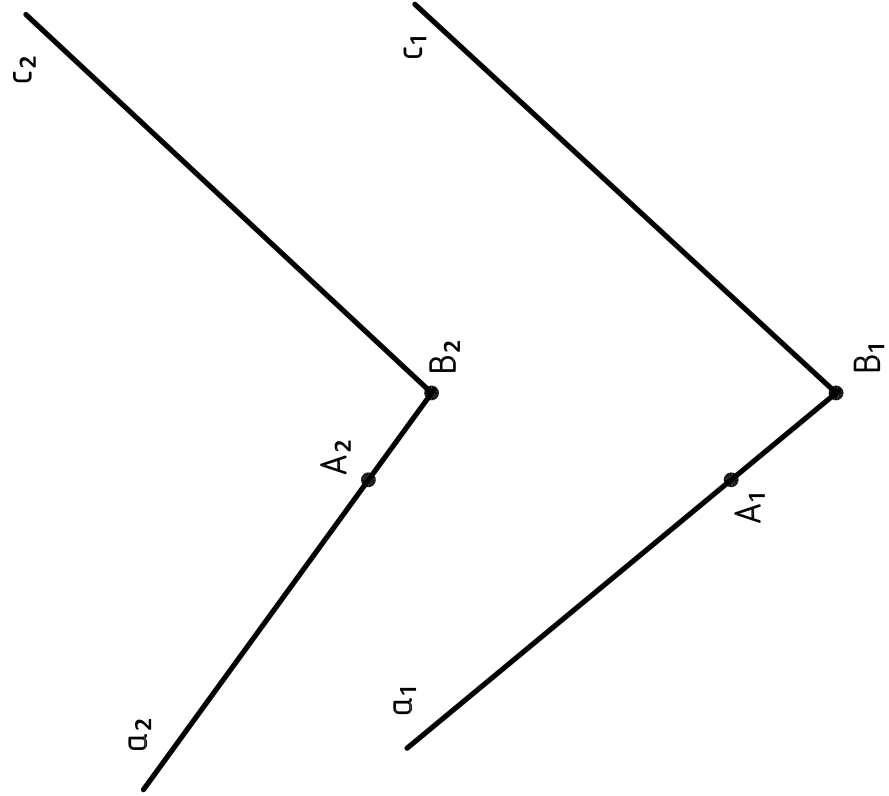
Плоскость $\Delta(A, m)$ на чертеже задана.

Искомый перпендикуляр ℓ определяем с помощью точек A и B.

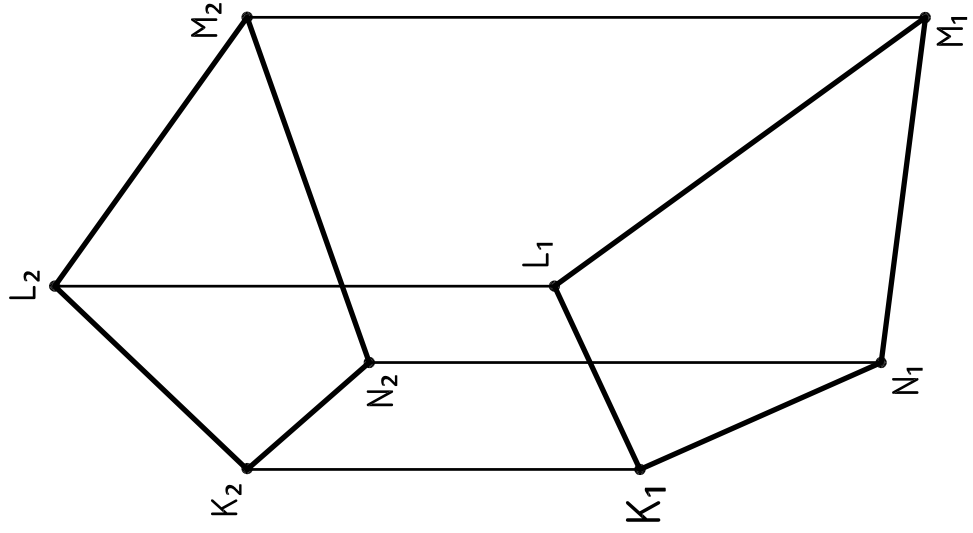
Точка A задана и принадлежит обоим плоскостям $\Sigma(h \cap f) \ni A$ и $\Delta(A, m)$.

Точку B определяем как точку пересечения прямой $m \subset \Delta(A, m)$ с плоскостью $\Sigma(h \cap f)$.

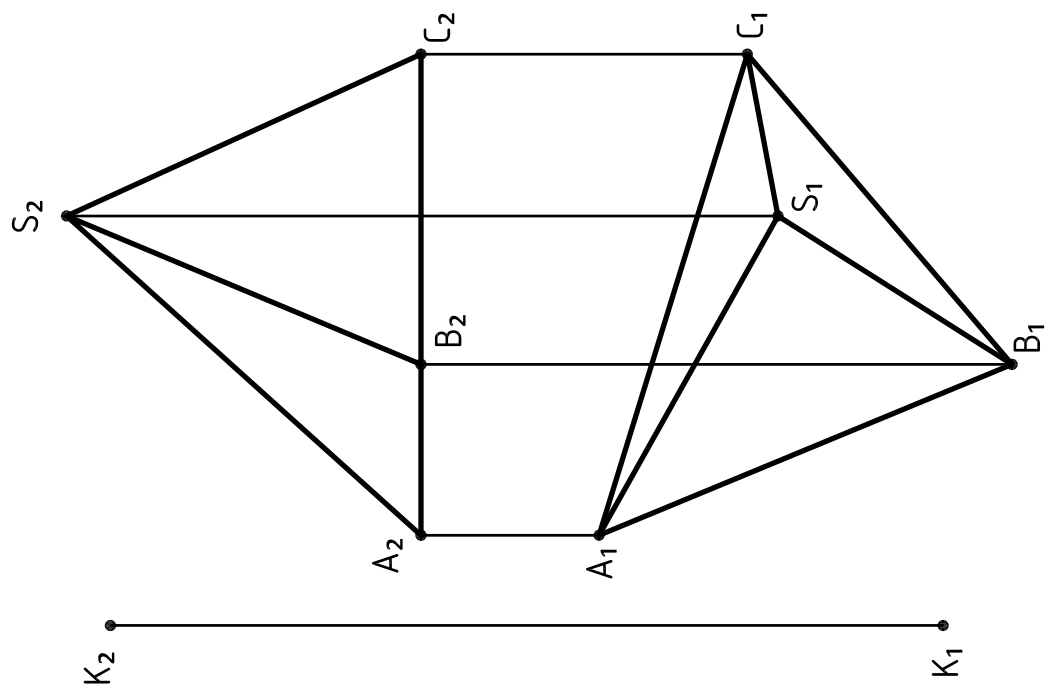
30. Из точки A , принадлежащей плоскости $\Sigma(a \cap c)$ восстановить перпендикуляр к плоскости.



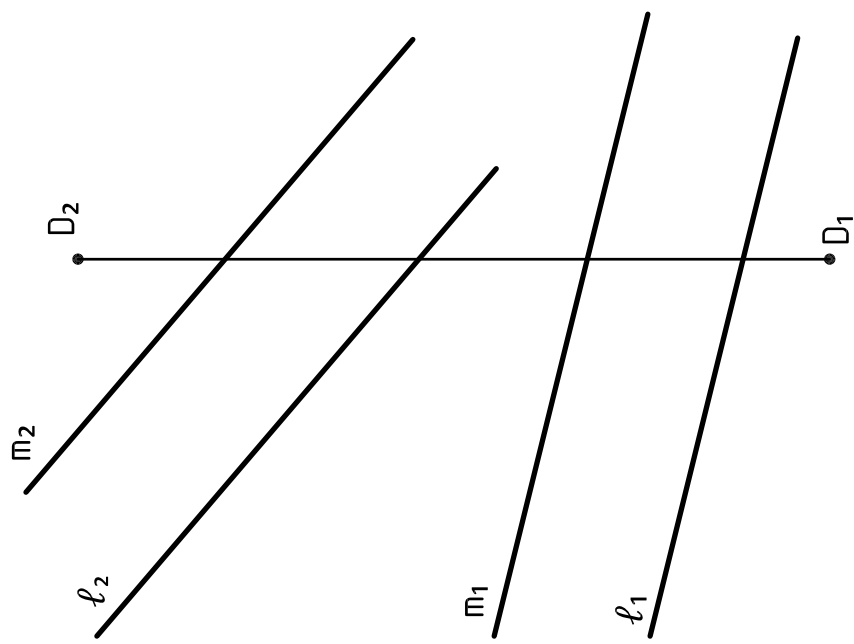
31. Из точки M восстановить перпендикуляр к плоскости $\Sigma(KLMN)$ и отложить на нем 25мм.



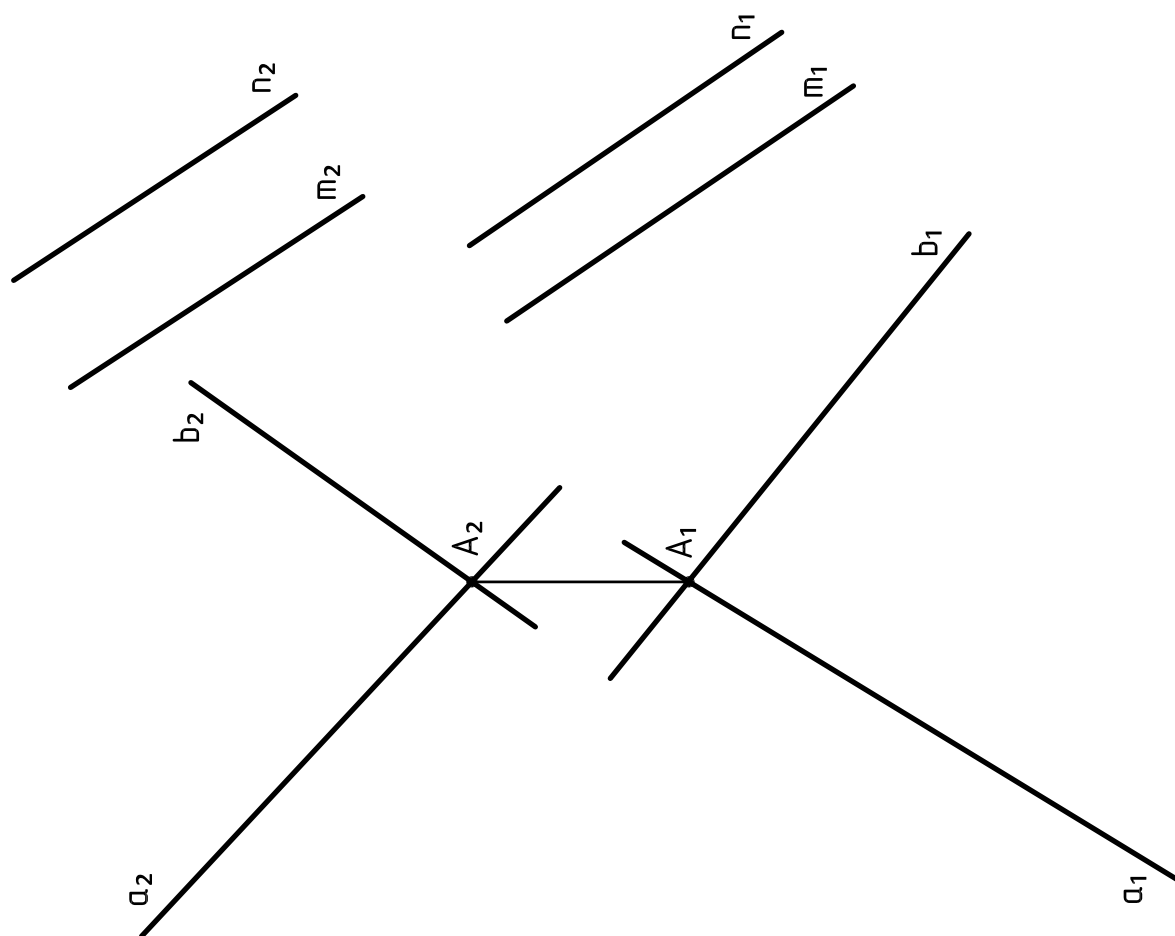
32. Из точки K опустить перпендикуляр m на грань SAB пирамиды и найти его основание.



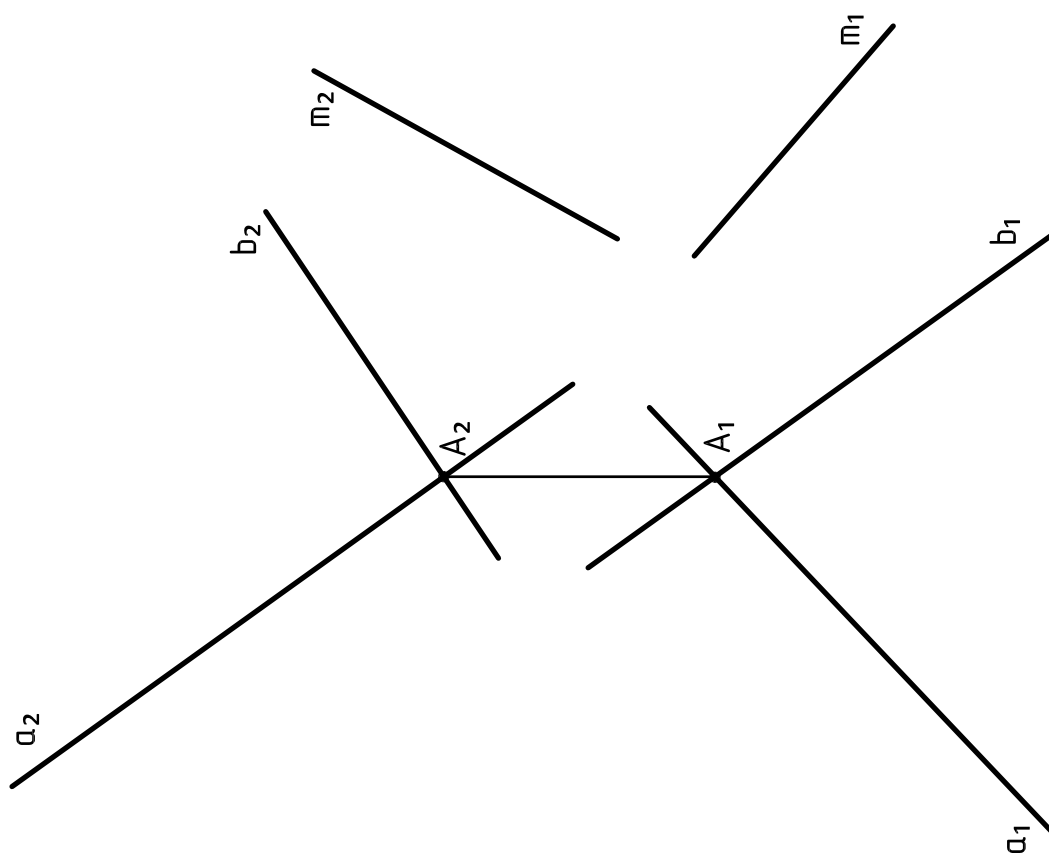
33. Даны плоскость $\Gamma(m \parallel \ell)$ и точка $D(D_1; D_2)$. Восстановить перпендикуляр из точки на эту плоскость.



34. Определить, перпендикулярны ли плоскости $\Sigma(a \cap b)$ и $\Delta(n \parallel m)$.



35. Определить, перпендикулярна ли прямая m плоскости $\Sigma(a \cap b)$.



Тема 7. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧЕРТЕЖИ МНОГОГРАННИКОВ. ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ТОЧКИ И ЛИНИИ ПОВЕРХНОСТИ МНОГОГРАННИКА

Поверхность, образованная частями попарно пересекающихся плоскостей, называется многогранной. Элементы многогранных поверхностей – грани, рёбра, вершины (рис. 7.1). Отсеки плоскостей, образующие многогранную поверхность, называются

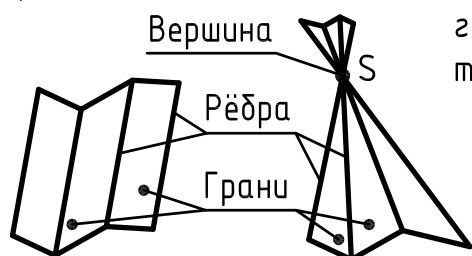


Рис. 7.1

гранями, линии пересечения смежных граней – рёбрами, точки пересечения рёбер – вершинами.

Многогранную поверхность называют пирамидальной, если все её рёбра пересекаются в одной точке – вершине. Многогранную поверхность называют призматической, если все её рёбра параллельны между собой.

Многогранную поверхность называют замкнутой, если каждое ребро многогранника принадлежит одновременно двум её граням. Геометрическое тело, со всех сторон ограниченное плоскими многоугольниками, называется многогранником. Простейшими многогранниками являются пирамиды и призмы (рис. 7.2).

Пирамида – это многогранник, в основании которого лежит произвольный многоугольник, а боковые грани – треугольники с общей вершиной, называемой вершиной пирамиды. Пирамиду называют правильной, если основанием служит правильный многоугольник и высота пирамиды проходит через центр этого многоугольника. Пирамиды называют по числу углов многоугольника основания: треугольная (рис. 7.2, а), четырёхугольная и т.д.

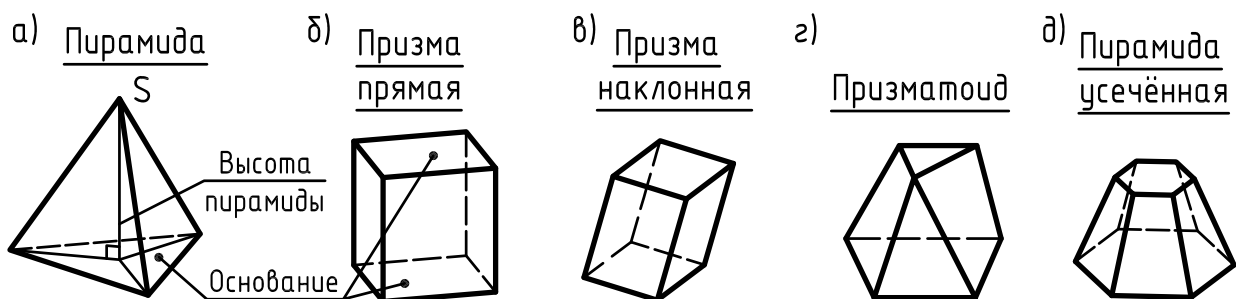


Рис. 7.2

Призма – многогранник, у которого основания – два равных и взаимно параллельных многоугольника, а боковые грани – параллелограммы. Если основанием призмы является прямоугольник, то призму называют параллелепипедом. Если в основании призмы лежит правильный многоугольник, то призму называется правильной. Если боковые рёбра призмы перпендикулярны к плоскости основания, то призма называется прямой.

Боковая поверхность прямой призмы называется проецирующей, если её боковые рёбра перпендикулярны плоскости проекции. У наклонной призмы боковые рёбра не перпендикулярны плоскости основания. По числу боковых граней призмы бывают трёхгранные, четырёхгранные (рис. 7.2 б) и т.д.

Призматойд – это многогранник, у которого верхнее и нижнее основания – многоугольники с произвольным числом сторон, расположенные в параллельных плоскостях, а боковые грани – треугольники или трапеции (рис. 7.2, г).

Изображения многогранников.

Многогранники изображаются на комплексном чертеже проекциями своих вершин и рёбер. Совокупность всех вершин и рёбер многогранника называют его сеткой (или

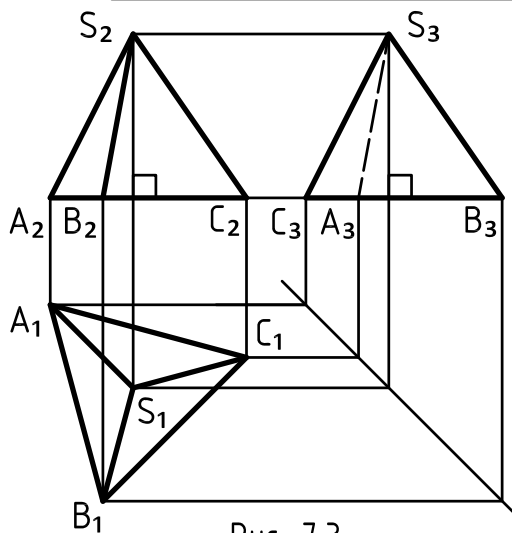


Рис. 7.3

каркасом). Построение проекций многогранника на комплексном чертеже сводится к построению его сетки. На рис. 7.3 показан пример задания многогранника на ортогональном чертеже. При построении чертежа многогранника рекомендуется обозначать буквами или цифрами проекции его вершин.

Контурная замкнутая ломаная линия проекции многогранника на Π_1 , Π_2 и Π_3 называется горизонтальным, фронтальным и профильным очерком проекции многогранника. Очерк проекции всегда видим. Видимые части многогранников изображаются сплошными линиями, а скрытые (невидимые)

их части – штриховыми. Видимость проекций линий, расположенных внутри очерка, определяется при помощи конкурирующих точек.

Пример 1. Определить видимость рёбер трёхгранной призмы на заданном двухпроекционном её чертеже (рис. 7.4).

Решение. Горизонтальный очерк $A_1B_1D_1K_1F_1A_1$ и фронтальный очерк $A_2B_2D_2K_2C_2A_2$ – видимы.

Для определения видимости рёбер внутри очерка используют обе проекции призмы. Рассмотрим скрещивающиеся (принадлежащие разным плоскостям) рёбра DF и KC и построим фронтально-конкурирующие точки 1 ($1 \in DF$) и 2 ($2 \in KC$).

В направлении на плоскость Π_1 (см. стрелку с надписью "На Π_1 ") точка $1 \in DF$ закрывает точку $2 \in KC$. Значит, D_1F_1 перекрывает K_1C_1 , т.е. D_1F_1 – видима, а K_1C_1 – невидима.

Рассмотрим ещё одну пару скрещивающихся рёбер AF и BC. Построим горизонтально-конкурирующие точки 3 ($3 \in AF$) и 4 ($4 \in BC$).

В направлении на плоскость Π_2 (см. стрелку с надписью "На Π_2 ") точка $3 \in AF$ закрывает точку $4 \in BC$. Значит, A_2F_2 перекрывает B_2C_2 , т.е. A_2F_2 видима, а B_2C_2 – невидима.

Двухпроекционный чертёж многогранника с обозначенными вершинами обратим. Чертёж называется обратимым, если по одной проекции точки, принадлежащей по-

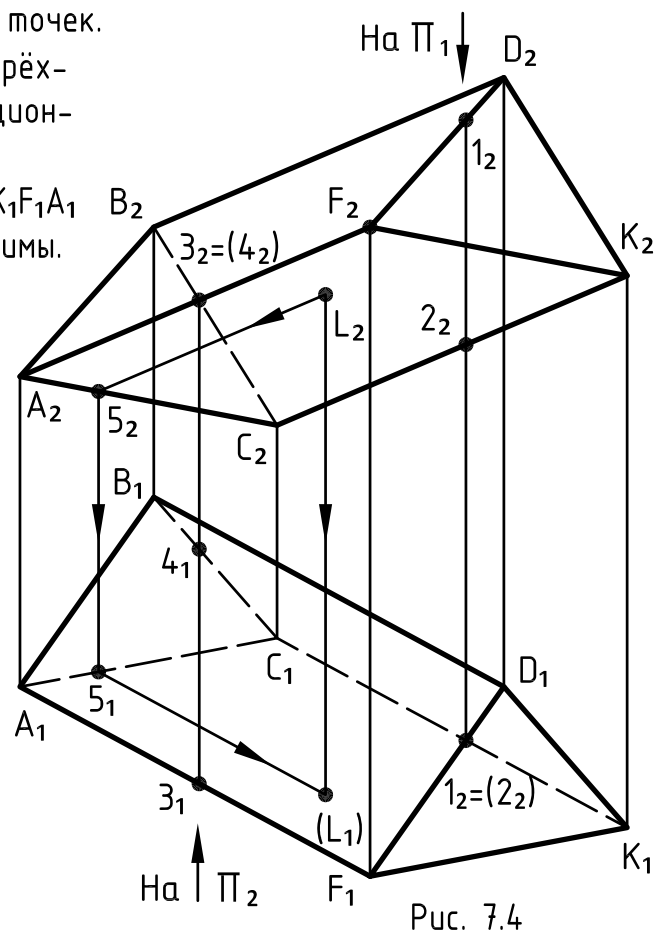


Рис. 7.4

верхности, можно построить её вторую проекцию.

Призма может быть задана проекциями одного основания и одного бокового ребра; пирамида – проекциями основания и вершины.

Существенную помощь при определении видимости на ортогональном чертеже многогранника могут оказать следующие правила.

1. Грань многогранника видна, если видны все её рёбра.
2. Грань многогранника не видна, если не видно хотя бы одно её ребро.
3. Если внутри очерка пересекаются две линии, то одна из них видимая, а другая невидимая.

4. Если внутри очерка пересекаются в одной точке три линии, то все три будут видимые или все три невидимые.

5. Если последовательность букв или цифр при обходе какой-либо грани в одном направлении (например, по часовой стрелке) одинакова на обеих проекциях, то и видимость этой грани на обеих проекциях одинакова, в противном случае – разная.

Проекции точек, принадлежащих поверхности, располагаются на линиях очерка и внутри его. Никакая точка поверхности не может иметь свою проекцию за пределами очерка.

Точка принадлежит поверхности многогранника, если она принадлежит линии, принадлежащей поверхности многогранника. Для построения недостающей проекции точки нужно в грани построить любую прямую, проходящую через точку. Тогда соответствующие проекции точки будут лежать на проекциях этой прямой. Удобно использовать прямую, параллельную ребру (рис. 7.4), или прямую, проходящую через вершину.

Пример 2. Заданы фронтальная и горизонтальная проекции пирамиды $SABC$ и видимые проекции точек L_2, F_2 и 1_1 (рис. 7.5). Построить третью проекцию пирамиды и недостающие проекции точек L, F и 1 .

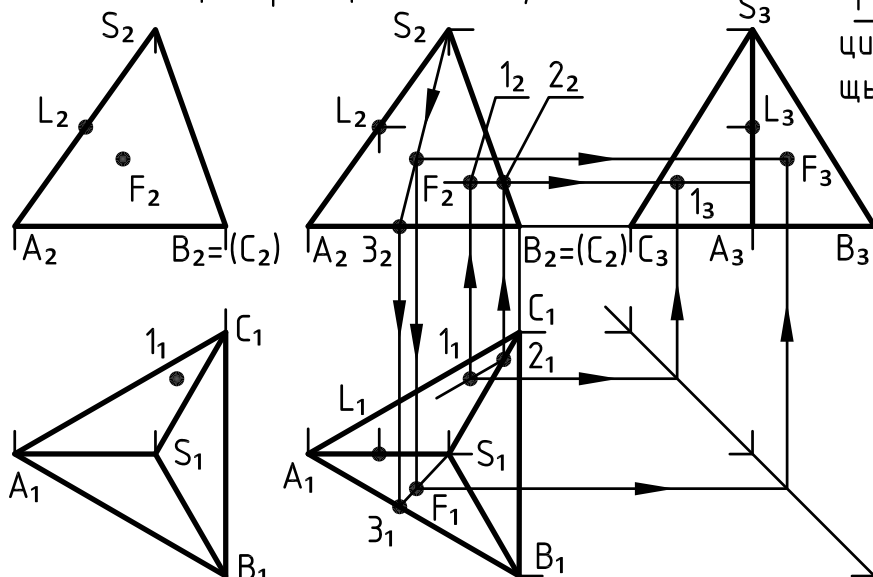


Рис. 7.5

Решение. Профильную проекцию пирамиды строим с помощью линии преломления.

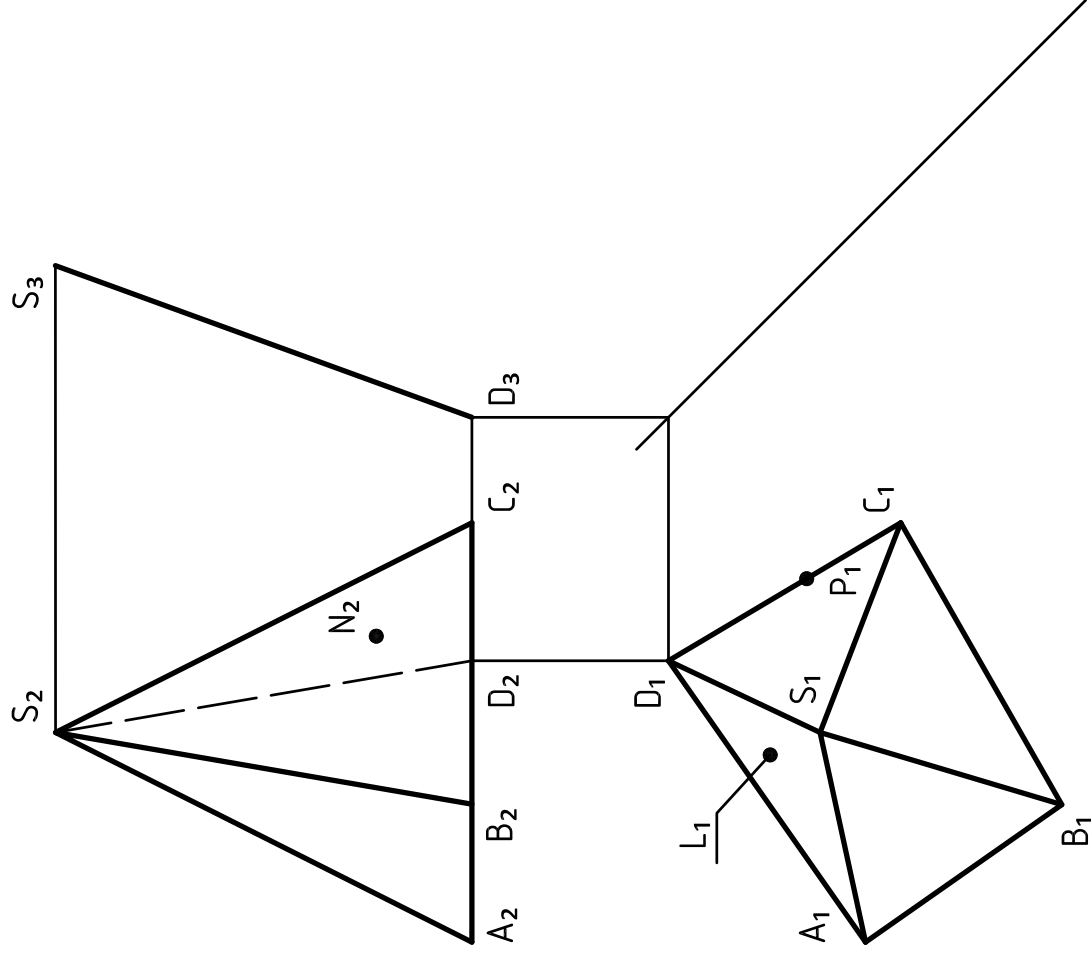
Для построения недостающих проекций точки F проведём в проекции грани $A_2S_2B_2$ вспомогательную прямую S_2Z_2 . Найдём горизонтальную проекцию S_1Z_1 и на неё точку F_1 .

Для построения недостающих проекций точки 1 проведём в проекции грани $A_1S_1C_1$ вспомогательную прямую $1_1Z_1 \parallel A_1C_1$. Найдём

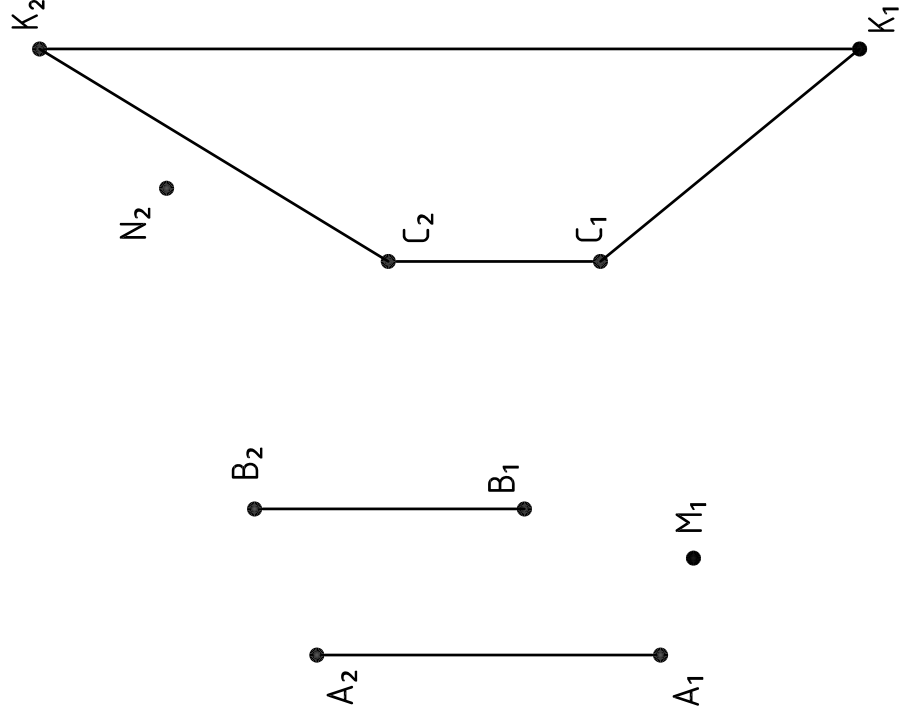
фронтальную проекцию $1_2Z_2 \parallel A_2C_2$ и на неё точку 1_2 . Построим F_3 и 1_3 с помощью линии преломления.

Точка L принадлежит ребру SA , поэтому строим L_1 и L_3 с помощью линий связи.

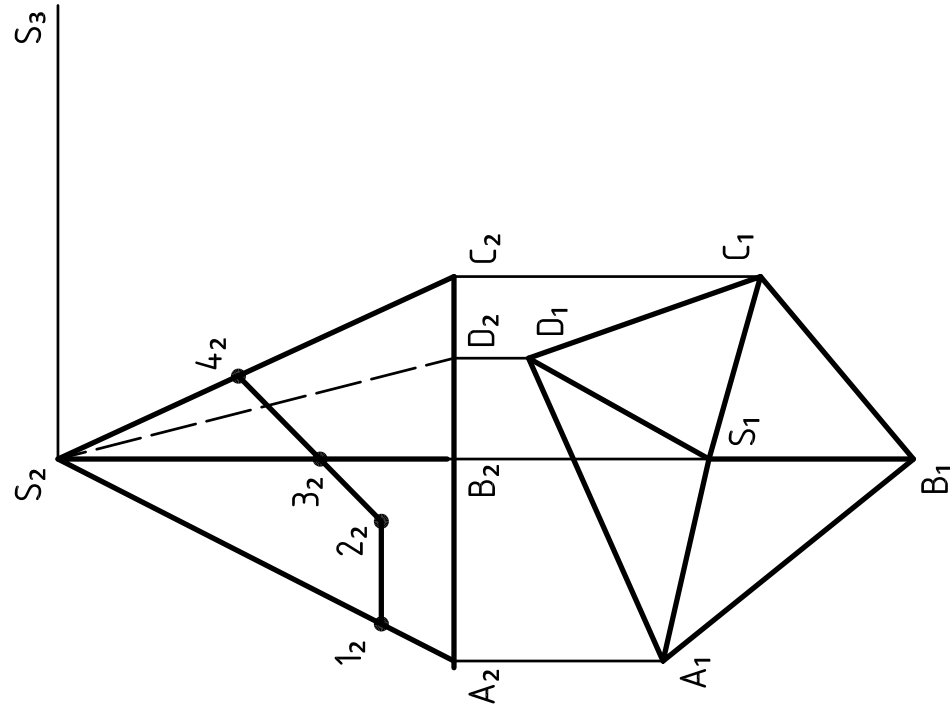
36. Построить профильную проекцию пирамиды $SABCD$ и недостающие проекции точек L , N , P , принадлежащих поверхностям пирамиды. Заданные проекции точек видимы.



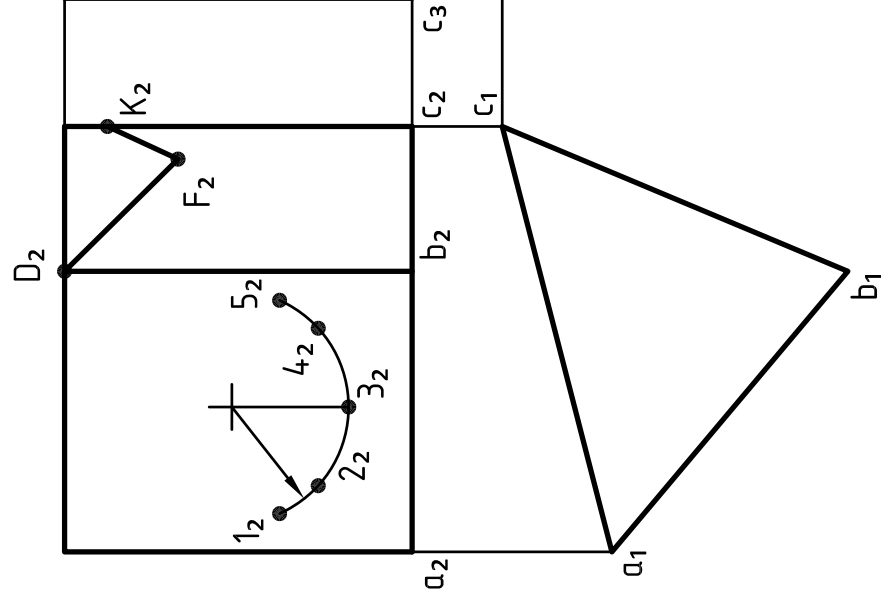
37. Построить проекции трехгранной призмы $ABCDFDK$, заданной основанием ABC и ребром SK . Определить видимость ребер призмы. Найти недостающие фронтальную проекцию точки M , принадлежащей грани $AF\parallel BD$, и горизонтальную проекцию точки N , принадлежащей грани $AF\parallel SK$.



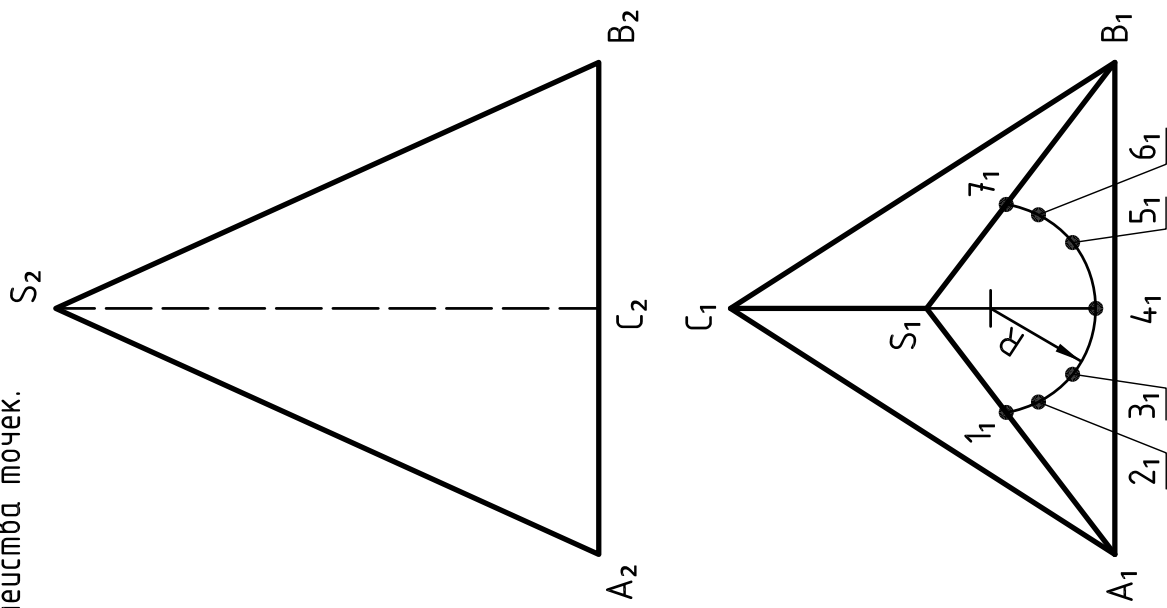
38. Заданы две проекции четырёхугольной пирамиды $SABCD$. Построить профильную проекцию пирамиды. Задана видимая фронтальная проекция ломаной линии ($1_2 2_2 3_2 4_2$), принадлежащей поверхности пирамиды. Построить недостающие проекции ломаной линии.



39. Заданы две проекции прямой трёхгранной призмы. Построить профильную проекцию призмы. Заданы фронтальная проекция ломаной линии DFK , принадлежащей грани $c \parallel b$, и фронтальная проекция семейства симметрично и закономерно расположенных проекций точек $1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2$, принадлежащих грани $a \parallel b$. Построить недостающие проекции ломаной линии и семейства точек.



40. Заданы две проекции треугольной пирамиды $SABC$. Задана видимая горизонтальная проекция семейства симметрично и закономерно расположенных точек $1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1$, принадлежащих грани ASB . Построить недостающие проекции семейства точек.



На наглядном изображении пирамиды (рис. 7.5) показаны заданные точки $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ и предложены два типовых варианта решения.

В первом варианте (см. рис. 7.6, а) рекомендуется построить в качестве вспомогательных прямые линии a', a'', a''' , параллельные ребру AB , и с их помощью найти недостающие проекции точек.

Во втором варианте (см. рис. 7.6, б) в качестве вспомогательных прямых линий используют прямые, проходящие через вершину S .

Сравним построение, например, точек 2 и 6 в обоих случаях. В первом варианте для построения используют одну вспомогательную прямую a' . Во втором варианте для определения этих же точек строят две прямые: прямую d и прямую c . Первый вариант предпочтительнее, т.к. в нём меньше построений, что обеспечивает их графическую точность.

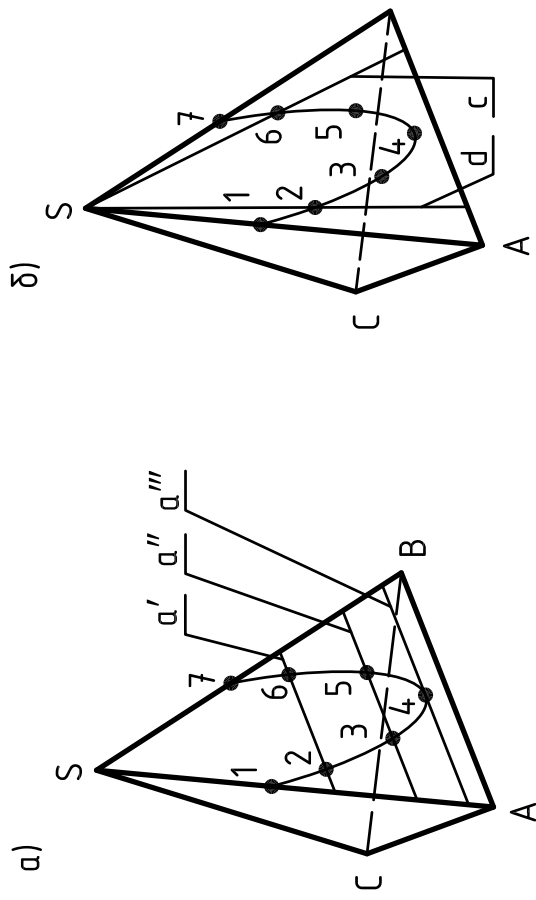


Рис. 7.6

Тема 8. КРИВЫЕ ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧЕРТЕЖИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ. ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ТОЧКИ И ЛИНИИ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

В начертательной геометрии рассматривают кривую линию кинематически, т.е. как траекторию, описанную движущейся точкой. Однако кривая линия может быть представлена как линия пересечения двух поверхностей или поверхности и плоскости. Кривая может быть плоской или пространственной. Все точки плоской кривой принадлежат некоторой плоскости. Кривую, не лежащую всеми точками в одной плоскости, называют пространственной. Для построения проекций кривой линии (плоской или пространственной) необходимо построить проекции ряда её точек.

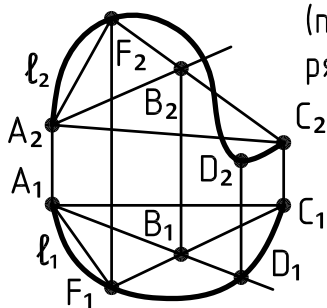


Рис. 8.1

Пример 1. По двум ортогональным проекциям (рис. 8.1) кривой l определить, какая кривая (плоская или пространственная) задана на чертеже.

Решение. Кривая l – пространственная, т.к. точка D , взятая на кривой, не принадлежит плоскости, определяемой точками A , F и C этой кривой.

Кривая называется закономерной, если имеется определённый закон её образования или если она определяется уравнением, т.е. своей аналитической формой. Если образование кривой не имеет строгой закономерности, она называется графической. Закономерные линии называют алгебраическими, если они описываются алгебраическим уравнением в прямоугольной системе координат, или трансцендентными.

Алгебраическая линия характеризуется порядком. Порядок алгебраической кривой – это степень её уравнения. Например, окружность $x^2 + y^2 = R^2$ – кривая второго порядка.

Геометрический порядок плоской кривой линии определяется числом возможных точек её пересечения с произвольной прямой линией, включая и точки с мнимыми координатами. На рис. 8.2 дана кривая второго порядка – эллипс. Прямая m пересекает эллипс в двух точках (1 и 2).

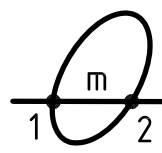


Рис. 8.2

Геометрический порядок пространственной кривой определяется числом возможных точек её пересечения с произвольной плоскостью, включая и точки с мнимыми координатами (на рис. 8.3 пространственная кривая n пересекается с плоскостью общего положения Ψ в трёх точках)

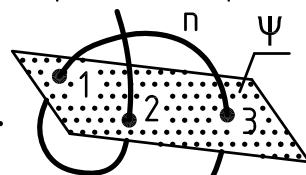


Рис. 8.3

Кривая линия в общем случае проецируется в кривую. Алгебраическая кривая данного порядка проецируется в алгебраическую кривую того же или более низкого порядка (см. проекции окружности в задаче 24, тема 4).

Важное прикладное значение имеет группа плоских кривых второго порядка. Это эллипс, окружность, парабола и гипербола. Эти кривые иногда называют коническими сечениями, т.к. они образуются при пересечении прямого кругового конуса плоскостью.

Линия, перемещаясь в пространстве, образует некоторую поверхность. Кривая поверхность есть совокупность последовательных положений некоторой линии, дви-

жущейся в пространстве. Движущуюся линию называют образующей поверхности, а линии (в т.ч. и точки), определяющие закон её перемещения, называют направляющими. Образующая может быть кривая или прямая, постоянная или переменная. Такой способ образования поверхности называется кинематическим.

На рис. 8.4 показана поверхность Σ , полученная при движении образующей ℓ по траектории t (по направляющей).

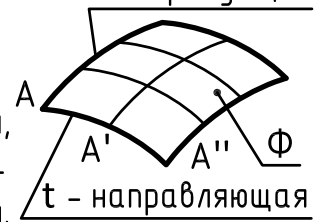


Рис. 8.4

Совокупность геометрических элементов (форма образующей, форма направляющих) и закон перемещения образующей, определяющих поверхность, называют определителем поверхности.

В общем случае поверхность может быть образована несколькими способами и поэтому может иметь несколько определителей. Обычно из всех способов образования поверхности выбирают простейший. Определитель поверхности Φ в символической форме может быть записан: $\Phi(\Gamma), [A]$,

где (Γ) – геометрическая часть определителя – совокупность геометрических фигур, которые могут образовать поверхность;

$[A]$ – алгометрическая часть определителя, устанавливающая связь между этими фигурами.

Поверхность на чертеже задают проекциями геометрической части её определителя. В большинстве случаев в целях увеличения наглядности на чертеже выделяются очерковые образующие. Проекции очерковых образующих отделяют проекцию поверхности от остальной части плоскости проекций.

Существуют различные способы классификации поверхностей. Часто группируют их по виду образующей. Поверхности с прямыми образующими называют линейчатыми. Линейчатая поверхность представляет собой геометрическое место прямых линий. Примеры линейчатых поверхностей показаны на рис. 8.6 – цилиндрическая

ℓ – образующая S (слева) и коническая (справа), на рис. 8.7 – призматическая (слева) и пирамидальная (справа).

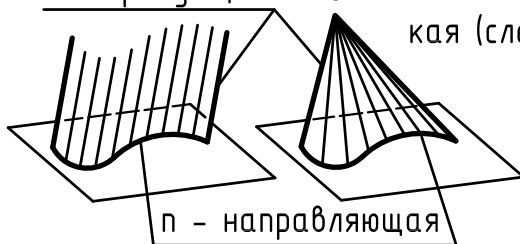


Рис. 8.5

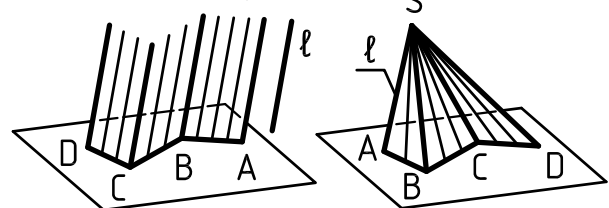


Рис. 8.6

Поверхности, не имеющие прямых образующих, называют нелинейчатыми. К этой группе относится сфера, тор и др.

Линейчатые поверхности разделяются на поверхности развёртывающиеся, у которых смежные образующие параллельны (например, цилиндрическая поверхность) или пересекаются (например, поверхность конуса) и которые поэтому могут быть развёрнуты в плоскость, и на поверхности неразвёртывающиеся или косые, у которых смежные образующие скрещиваются и которые поэтому не могут быть развёрнуты в плоскость. Все нелинейчатые поверхности неразвёртывающиеся. Развёртывающиеся называются поверхности, которые могут быть совмещены с плоскостью без разрывов и складок.

Частный случай перемещения образующей – это её вращение вокруг некоторой неподвижной прямой. Поверхностью вращения общего вида называют поверхность, которая образуется вращением некоторой линии вокруг неподвижной оси. Образующая линия может быть плоской или пространственной кривой, а также прямой; может состоять из частей прямых и кривых линий. Определитель поверхности вращения включает образующую ℓ и ось вращения i .

Для изображения поверхности на комплексном чертеже ось вращения обычно выбирается перпендикулярной плоскости проекций.

Рассмотрим поверхность вращения, образованную вращением кривой ℓ вокруг оси i , расположенных в одной плоскости (рис. 8.7). Каждая точка (1, 2, 3, 4) образующей описывает в пространстве окружность

с центром на оси вращения. Эти окружности называют параллелями (рис. 8.8). Плоскости параллелей всегда перпендикулярны к оси вращения. Наибольшую из параллелей называют экватором, наименьшую – горлом (рис. 8.9).

Любая плоскость (Σ и Ψ на рис. 8.9), проходящая через ось поверхности вращения, пересекает поверхность вращения по

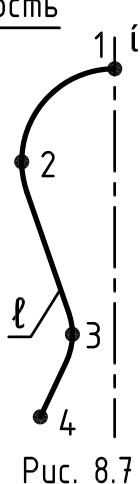


Рис. 8.7

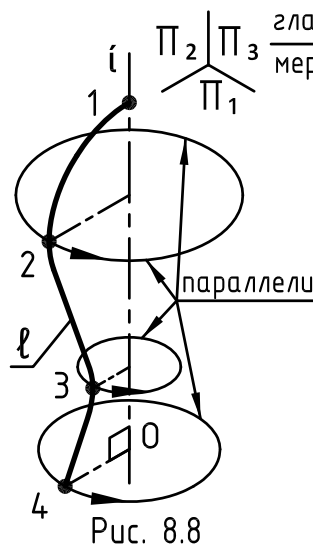


Рис. 8.8

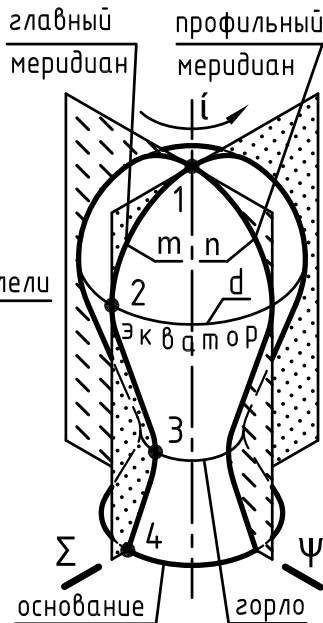


Рис. 8.9

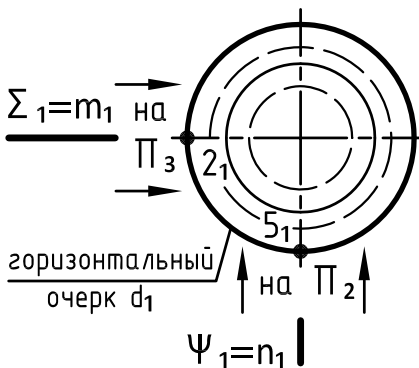
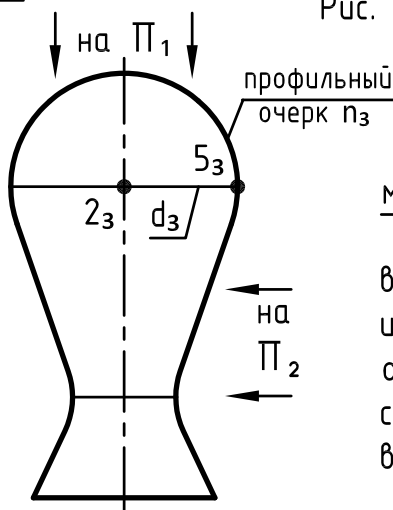
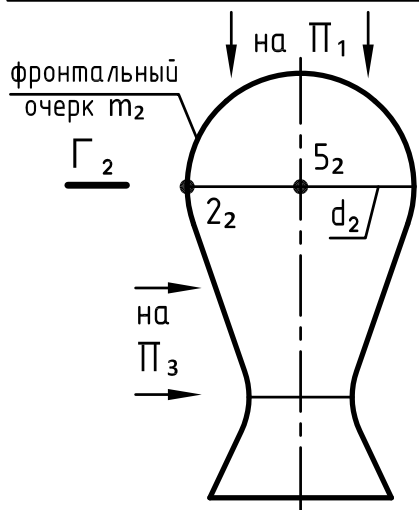


Рис. 8.10

меридиану (m и n на рис. 8.9).

Все меридианы поверхности вращения равны между собой и каждый из них разделяется относительно оси i на две симметричные кривые, называемые полумеридианами.

Меридиан, расположенный в осевой плоскости, параллельной плоскости проекций, называют главным. На рис. 8.9 главный фронтальный меридиан m , лежащий в плоскости $\Sigma \parallel \Pi_2$, проецируется на Π_2 без искажения, а профильный меридиан n , лежащий в плоскости $\Psi \parallel \Pi_3$, проецируется на Π_3 без искажения.

При задании поверхности вращения обычно указывают проекцию её оси, главного меридиана и экватора.

Проекции поверхности вращения (см. рис. 8.7 ... 8.10, где ось вращения $\dot{i} \perp \Pi_1$) образуются следующим образом:

- горизонтальная проекция, т.е. горизонтальный очерк, определяется окружностью экватора d (d_1);
- фронтальная проекция, т.е. фронтальный очерк, образуется замкнутой линией главного фронтального меридиана m (m_2);
- профильная проекция, т.е. профильный очерк, образуется замкнутой линией профильного меридиана n (n_3).

Видимость точек на проекциях поверхности вращения определяется следующим образом: если часть поверхности является видимой по направлению взгляда на соответствующую плоскость проекций, то точка на этой проекции также будет видимой (смотри на рис. 8.10 проекции точек 2 и 5 и направление взгляда, указанное стрелками с надписью).

Множество всех параллелей и меридианов представляют собой непрерывный каркас поверхности вращения. Через каждую точку поверхности вращения проходит одна параллель и один меридиан. Проекция точки располагается на соответствующих проекциях параллели или меридиана. Задать точку на поверхности или построить вторую проекцию точки, если одна задана, можно при помощи параллели или меридиана, которые проходят через эту точку.

Построение проекций точек на поверхности вращения. Принадлежность точки поверхности вращения определяется её принадлежностью параллели, по которой эта точка вращается вокруг оси. Параллель-окружность проецируется без искажения на ту плоскость проекций, которой перпендикулярна ось $\dot{i}$. На остальные основные плоскости проекций она проецируется в виде отрезков прямых, перпендикулярных одноимённым проекциям оси $\dot{i}$. Плоскость каждой параллели перпендикулярна оси $\dot{i}$.

Например, на рис. 8.10 параллель d проецируется на Π_1 в окружность (без искажения), т.к. ось $\dot{i} \perp \Pi_1$. На Π_2 параллель d проецируется в отрезок $d_2 \perp \dot{i}_2$, а на плоскость проекций Π_3 параллель d проецируется в отрезок $d_3 \perp \dot{i}_3$.

Проекции точек, принадлежащих экватору, фронтальному и профильному меридианам, строятся по их принадлежности этим характерным линиям.

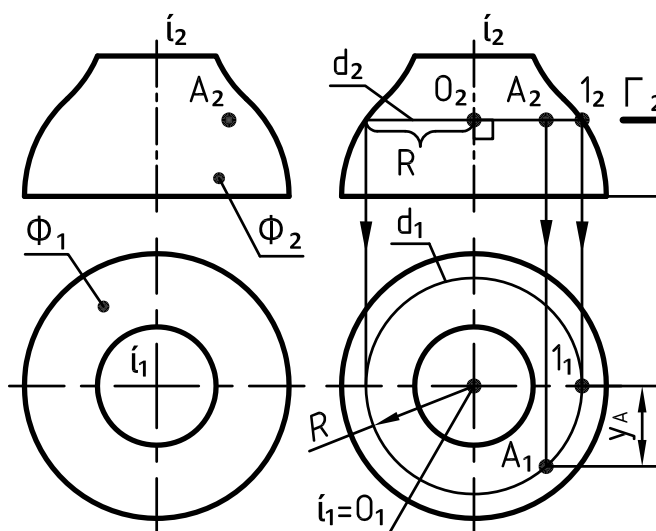


Рис. 8.11

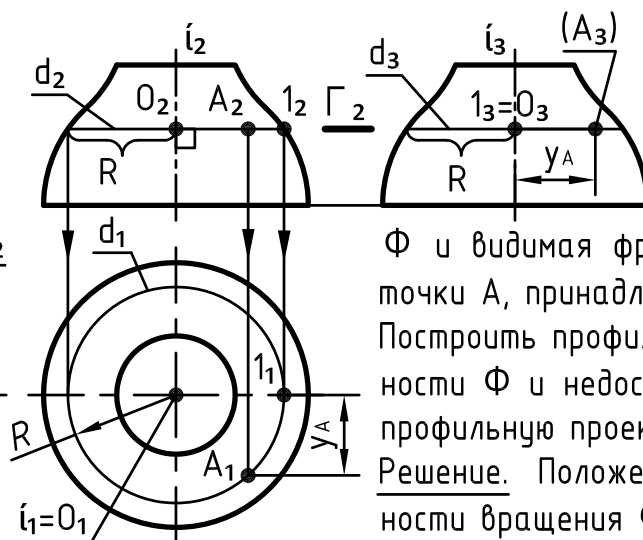


Рис. 8.12

Пример 2.

Заданы (рис. 8.11) горизонтальная и фронтальная проекции поверхности вращения Φ и видимая фронтальная проекция A_2 точки A , принадлежащей поверхности Φ .

Построить профильную проекцию поверхности Φ и недостающие фронтальную и профильную проекции точки A .

Решение. Положение точки A на поверхности вращения Φ определяем при помощи вспомогательной плоскости Γ , про-

ходящей через эту точку, и рассекающей заданную поверхность по окружности d (по параллели). Поэтому выполняем следующий графический алгоритм:

- 1) проводим прямую d_2 – это фронтальная проекция параллели d ;
- 2) строим горизонтальную проекцию параллели d . Ось $i \perp \Pi_1$, поэтому параллель d проецируется на Π_1 в окружность d_1 . Длина отрезка $O_2 1_2$ укажет величину радиуса R окружности d_1 ;
- 3) с помощью линии связи на окружности d_1 определяем A_1 (горизонтальную проекцию точки A);
- 4) строим профильную проекцию A_3 точки A по глубине y_A . Точка лежит на невидимой части поверхности Φ , поэтому проекция A_3 взята в скобки.

Если образующая – алгебраическая кривая, то поверхность вращения также будет алгебраической. Порядок поверхности вращения зависит от порядка её образующей.

Теорема. При вращении вокруг оси плоской или пространственной алгебраической кривой n -го порядка в общем случае получается алгебраическая кривая поверхности вращения $2n$ -го порядка. Если кривая 2-го порядка вращается вокруг своей оси симметрии, то она образует поверхность 2-го порядка.

Частные виды поверхностей вращения. Наиболее часто встречаются в различных механизмах поверхности вращения, имеющие в меридиональном сечении алгебраическую кривую второго порядка (нелинейчатые поверхности) или две прямые, на которые распадается кривая второго порядка (линейчатые поверхности).

Поверхности, образованные вращением прямой (линейчатые поверхности вращения). При вращении прямой ℓ (образующей) вокруг второй прямой i (оси) образуется линейчатая поверхность вращения второго порядка:

если $\ell \parallel i$ – цилиндрическая поверхность вращения (рис. 8.13);

если $\ell \cap i$ – коническая поверхность вращения (рис. 8.14);

если $\ell \div i$ – однополостный гиперболоид вращения.

Для задания линейчатой поверхности вращения достаточно задать ось вращения и образующую (рис. 8.13, а и 8.14, а). Для наглядности строят очерковые линии поверхности. Цилиндр и конус вращения – поверхности бесконечные в направлении их образующих, поэтому на изображениях их ограничивают плоскостями оснований.

Цилиндр – это геометрическое тело, ограниченное цилиндрической поверхностью вращения (боковой поверхностью) и двумя параллельными секущими плоскостями (основаниями), перпендикулярными оси вращения. Цилиндр называют прямым, если его ось вращения перпендикулярна его основаниям. Меридиан такого цилиндра – прямоугольник (рис. 8.13, б).

Прямой круговой цилиндр по положению к плоскостям проекций называют проецирующим,

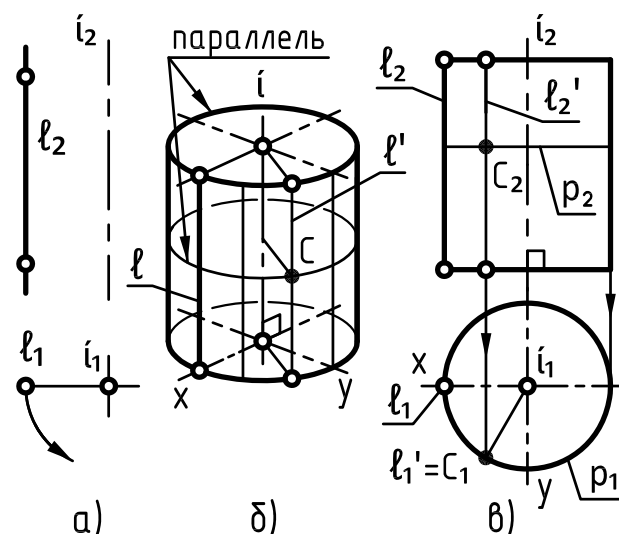


Рис. 8.13

если его боковая поверхность (и ось вращения) перпендикулярна какой-либо плоскости проекций и проецируется на эту плоскость в окружность (вырождается в окружность). На рис. 8.13, б изображён горизонтально-проецирующий цилиндр, его ось перпендикулярна Π_1 . Фронтальная проекция цилиндра – прямоугольник, ограниченный слева и справа очерковыми образующими; снизу и сверху прямоугольник ограничен проекциями оснований цилиндра. Горизонтальная проекция цилиндра вырождается в окружность (рис. 8.13, в).

Коническая поверхность состоит (рис. 8.14, б) из двух одинаковых бесконечных полостей, имеющих общую точку S – вершину.

Конус – это геометрическое тело, ограниченное конической поверхностью и плоскостью основания, пересекающей все его образующие. Частные случаи конуса:

прямой – ось вращения перпендикулярна его основанию (рис. 8.14, в);

наклонный – ось вращения не перпендикулярна его основанию;

усечённый – конус с двумя параллельными основаниями, т.е конус со срезанной вершиной.

Если ось конуса перпендикулярна плоскости проекций, то все параллели конуса проецируются на эту плоскость проекций в окружности (параллель p на рис. 8.14, в).

На рис. 8.14, в фронтальная проекция конуса – это треугольник, ограниченный слева и справа очерковыми образующими. Снизу треугольник ограничен проекцией основания конуса. Горизонтальная проекция конуса – это самая большая параллель (основание).

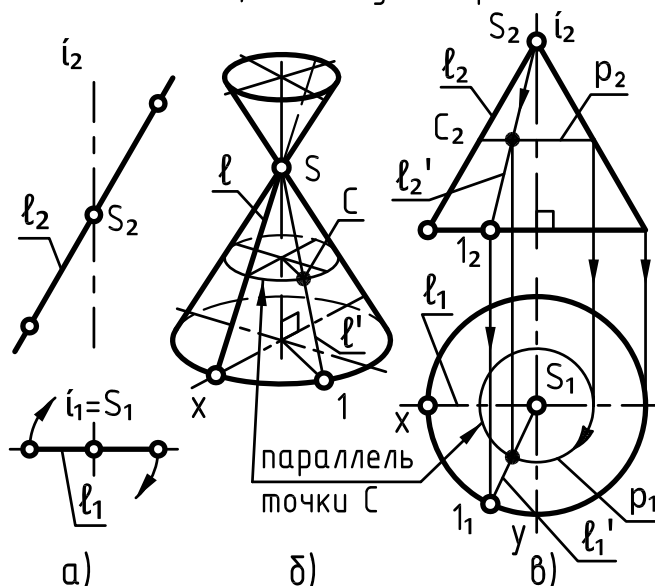


Рис. 8.14

Задать точку на поверхности конуса или построить вторую проекцию точки, если одна задана, можно при помощи параллели или меридиана (прямолинейной образующей), которые проходят через эту точку. На рис. 8.13 и 8.14 произвольная точка C принадлежит параллели p и образующей l' . Недостающие проекции точки C можно построить по принадлежности параллели-окружности p или прямолинейной образующей l' .

Рассмотренные линейчатые поверхности вращения являются поверхностями второго порядка, т.к. максимальное число точек пересечения каждой из этих поверхностей с прямой линией равно двум.

Поверхности, образованные вращением кривых второго порядка вокруг оси (нелинейчатые поверхности вращения). Рассмотрим поверхности, образованные вращением окружности.

Сфера образуется вращением окружности l вокруг одного из её диаметров. Геометрическое тело, ограниченное сферой, называют шаром. Сфера является ограниченной поверхностью вращения и может быть изображена на чертеже полностью.

На рис. 8.15 показана сфера, где за ось вращения принята ось z . Все три очерка

сферы представляют собой окружности одного диаметра с центром в точке O .

Экватор d сферы проецируется на плоскость Π_1 в истинную величину d_1 . На чертеже показаны меридианы - главный фронтальный m (m_1, m_2, m_3) и профильный m' (m_1', m_2', m_3'). Положение точки на поверхности сферы определяется с помощью окружности (параллели), проходящей через эту точку.

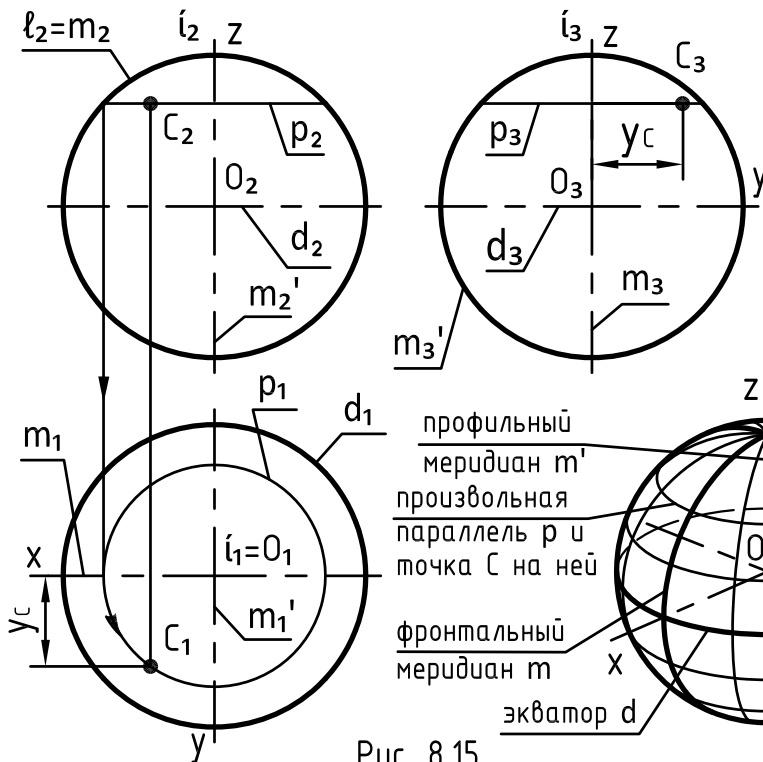


Рис. 8.15

Проведём через фронтальную проекцию C_2 точки C параллель p , фронтальная проекция p_2 которой прямая линия. Строим окружность p_1 (горизонтальную проекцию параллели p). Находим на этой окружности проекцию C_1 (по вертикальной линии связи).

Профильную проекцию C_3 определяем по координате y_c .

Видимость проекций точек на проекциях поверхности сферы рассмотрена на примере (рис. 8.16...8.19)

принадлежащих одной параллели конкурирующих точек B и H .

Невидимая по отношению к наблюдателю (направление его взгляда указано стрелками с надписью) половина сферы отделена толстой линией и заштрихована.

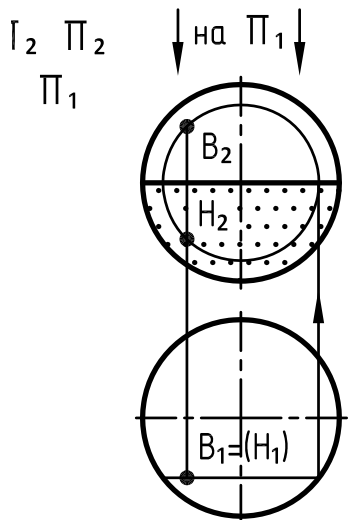


Рис. 8.16

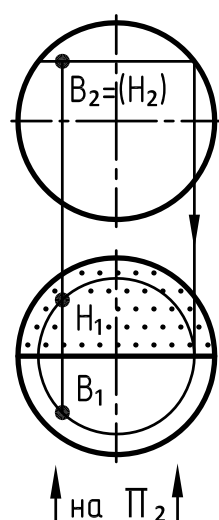


Рис. 8.17

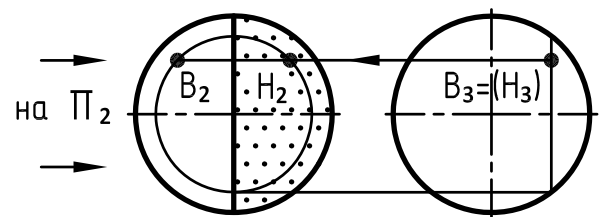


Рис. 8.18

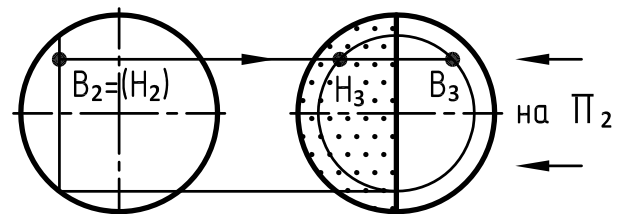


Рис. 8.19

Тор образуется вращением окружности ℓ или её дуги вокруг оси i , лежащей в плоскости этой окружности, но не проходящей через её центр. На рис. 8.20 ось вращения располагается вне окружности $ABCD$. Такой тор называют открытым. Если ось вращения касается окружности или пересекает её, то тор называют закрытым.

Тор имеет два семейства круговых сечений: в плоскостях, перпендикулярных к его оси (это параллели тора), и в плоскостях, проходящих через ось тора (это меридианы тора). На рис. 8.20, б показан тор с четвертным вырезом (для наглядности) и показаны некоторые его параллели и меридианы (каркас).

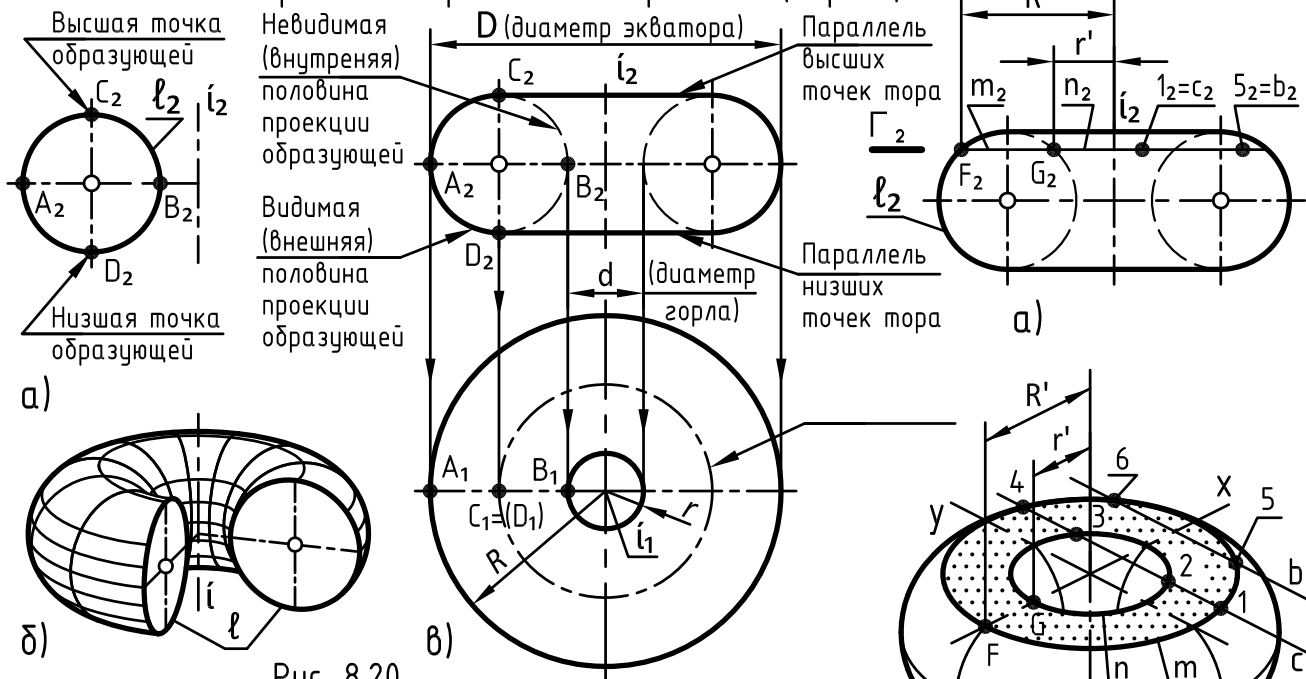


Рис. 8.20

Очерком фронтальной проекции (рис. 8.20, б) служат главный меридиан, состоящий из двух окружностей-образующих и две параллели высших и низших точек тора.

Очерком горизонтальной проекции тора служат экватор и горло – наибольшая и наименьшая параллели. Экватор – это параллель точки А, горло – параллель точки В. Параллели точек С и D (высшей и низшей точек) называют основаниями тора. Тор задаётся радиусами R экватора и r горла. Точка на поверхности тора определяется с помощью проходящей через неё параллели.

Проведём произвольную плоскость Γ , перпендикулярную оси вращения тора (рис. 8.21, а, б). Она пересекает окружность-образующую ℓ в точках F и G, которые и определяют параллели сечения. Плоскость Γ пересекает внешнюю поверхность тора по параллели m радиусом R' , внутреннюю поверхность тора по параллели n радиусом r' , т.е. сечение тора – это кольцо.

Возьмём на торе в плоскости Γ две точки 1 и 5 и проведём через них фронтально-проецирующие прямые b и c . На наглядном изображении (рис. 8.21, б) и на горизонтальной проекции тора (рис. 8.22) видно, что прямая b пересекает только параллель m в точках 5 и 6, прямая c пересекает параллели m и n в точках 1, 4 и 2, 3.

Сфера является поверхностью второго порядка, а тор – четвёртого, что соответствует максимальному числу точек пересечения этих поверхностей с прямой линией.

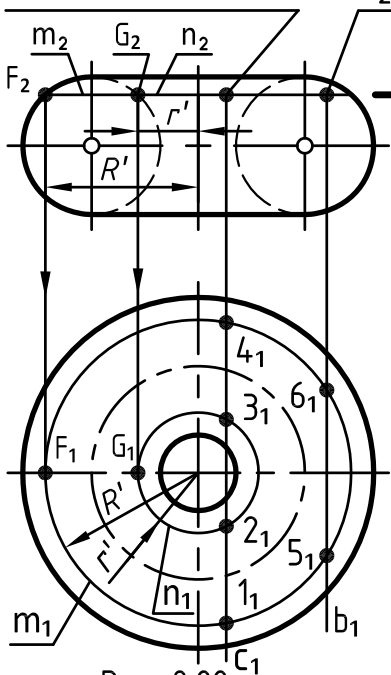


Рис. 8.22

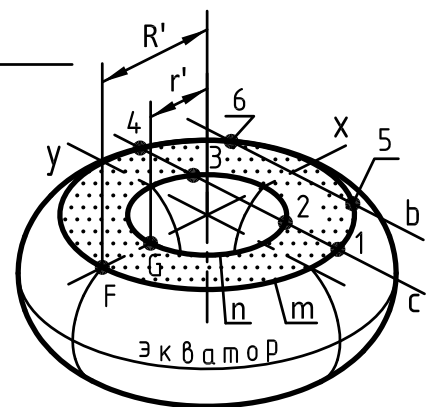
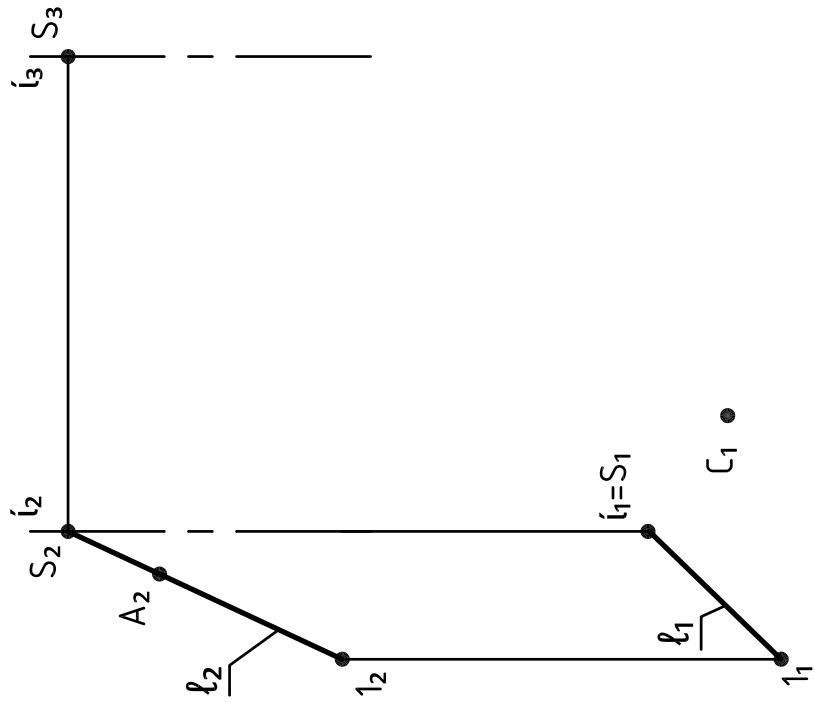


Рис. 8.21

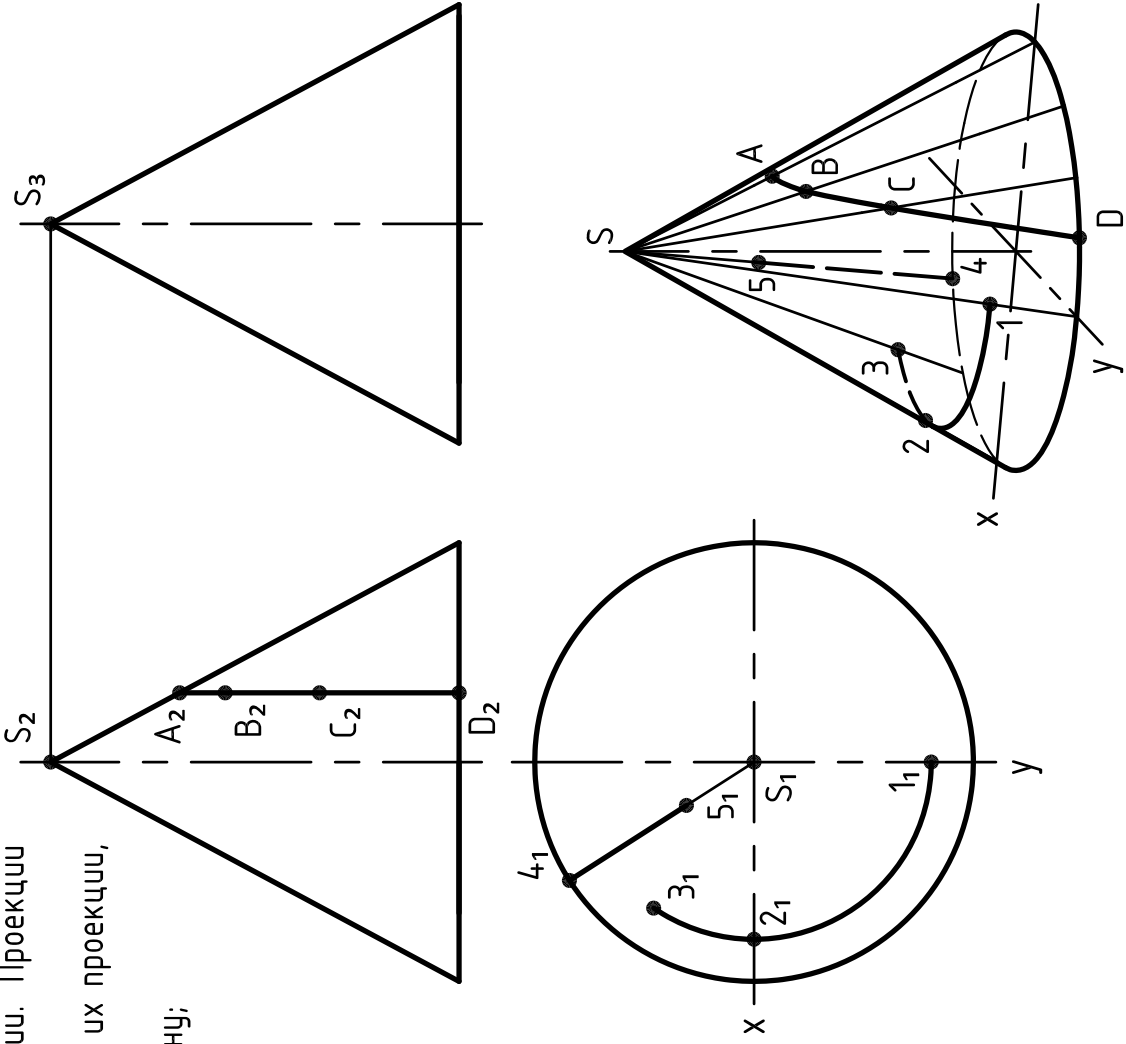
41. По заданным проекциям оси вращения $\acute{l}$ и образующей ℓ построить комплексный трёхпроекционный чертёж прямого кругового конуса. Образующая ℓ задана вершиной S и точкой 1 основания конуса. Заданы видимые проекции A_2 и C_1 точек A и C , принадлежащих поверхности конуса. Построить их недостающие проекции. Проекции точки C построить по принадлежности проекции параллели.

Задать на поверхности конуса точки F , P и построить их проекции, если:

точка F принадлежит главному фронтальному меридиану;
точка P принадлежит профильному меридиану.



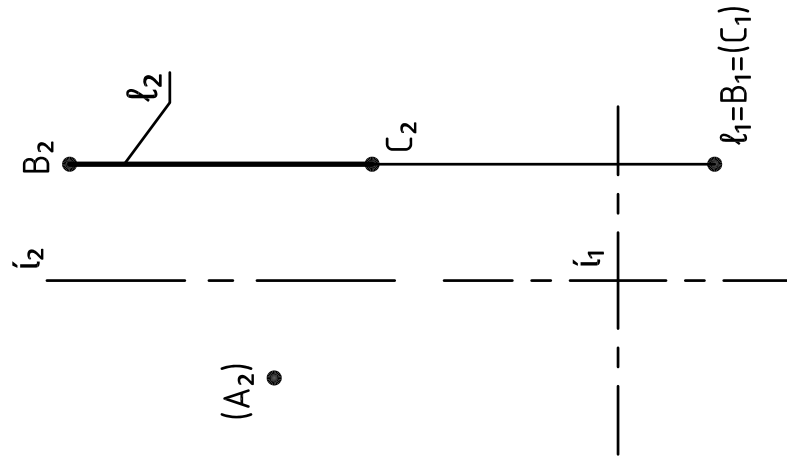
42. Задан комплексный трёхпроекционный чертёж прямого кругового конуса. Построить недостающие проекции заданных на поверхности конуса линий. Заданные проекции видимые.



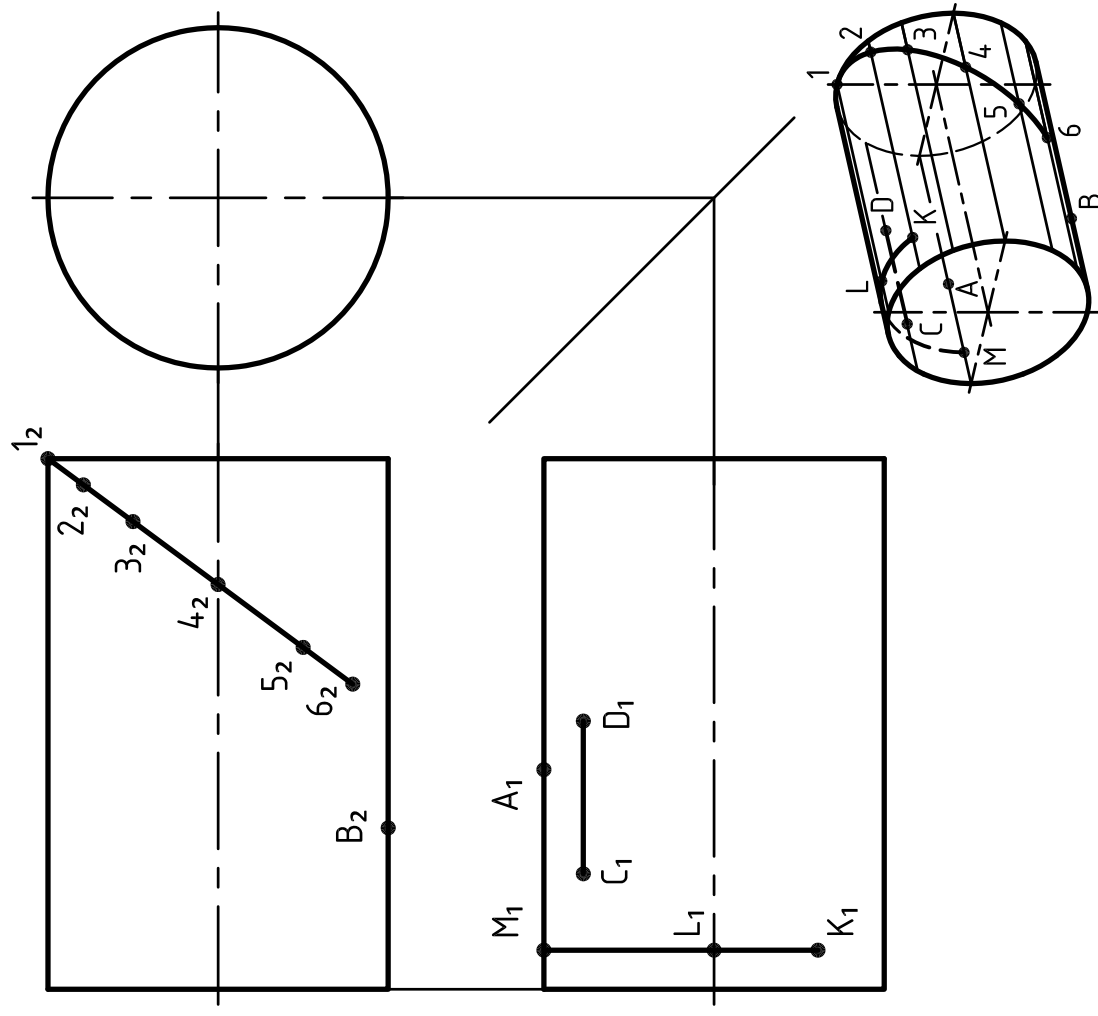
43. По заданным проекциям оси вращения $\hat{l}$ и образующей ℓ [BC] построить комплексный трёхпроекционный чертёж прямого кругового горизонтально-проецирующего цилиндра.

Задана невидимая проекция A_2 точки A, принадлежащей поверхности цилиндра. Построить недостающие проекции точки A.

Задать на поверхности цилиндра точки F, P и построить их проекции, если: точка F принадлежит главному меридиану; точка P принадлежит профильному меридиану.



44. Задан ортогональный чертёж прямого кругового профильно-проецирующего цилиндра. Построить недостающие проекции заданных точек и линий на поверхности цилиндра. Заданные проекции видимые.

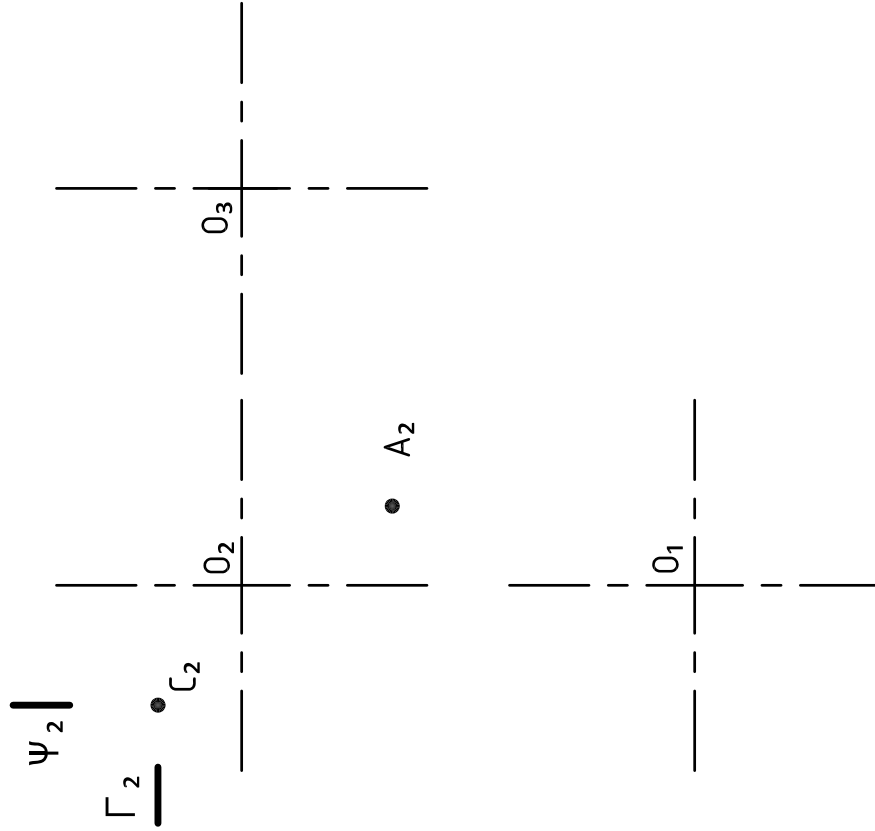


45. Построить комплексный трёхпроекционный чертёж сферы, если заданы проекции центра сферы и фронтальная проекция точки A , принадлежащей главному меридиану сферы.

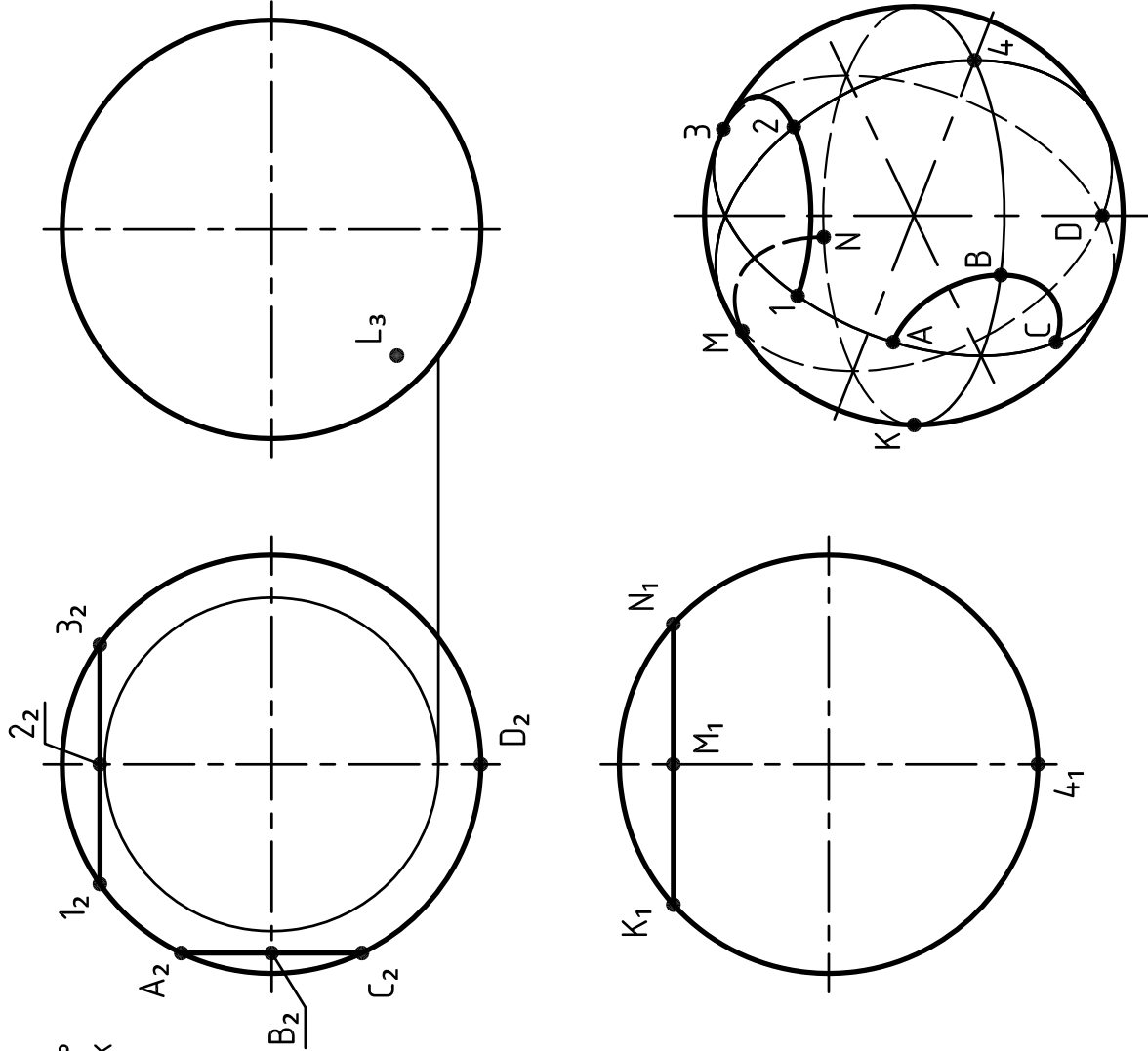
Задана фронтальная проекция точки C . Построить недостающие проекции точки C по принадлежности к окружности (параллели), лежащей в:

а) плоскости Γ – студентам с чётным вариантом;

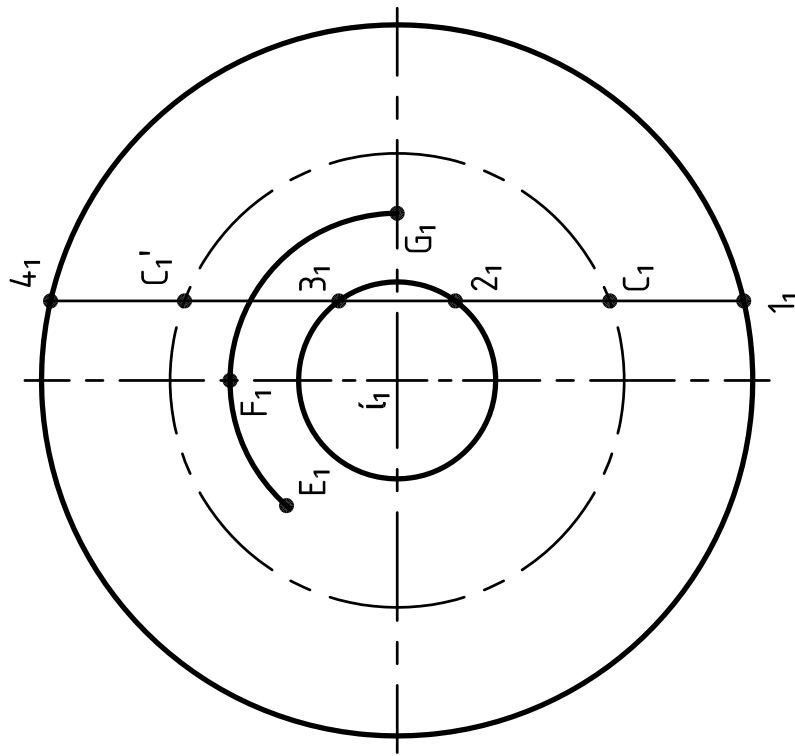
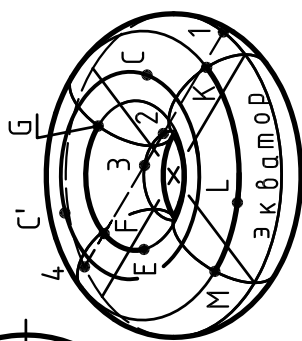
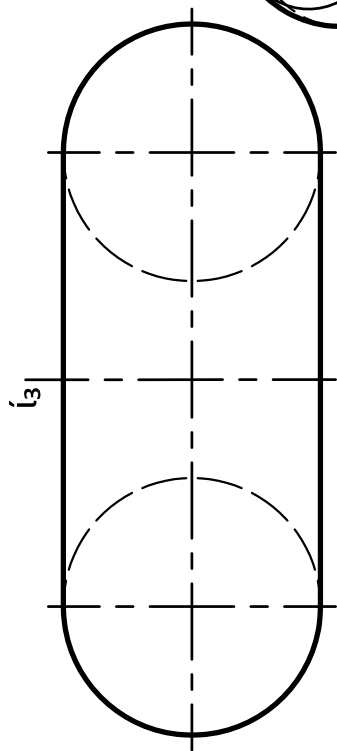
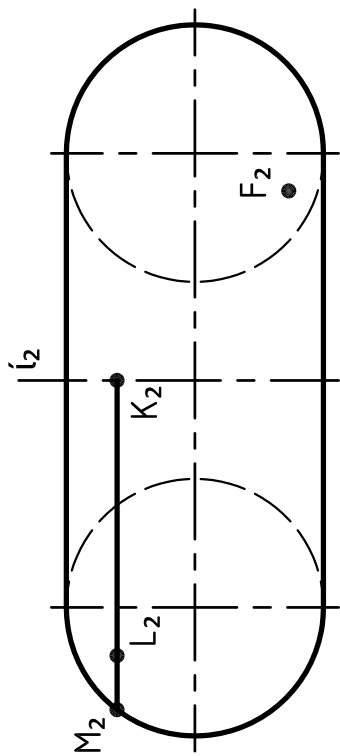
б) плоскости Ψ – студентам с нечётным вариантом.



46. Задан комплексный трёхпроекционный чертёж сферы. Построить недостающие проекции заданных точек и линий на поверхности сферы. Заданные проекции видимые.

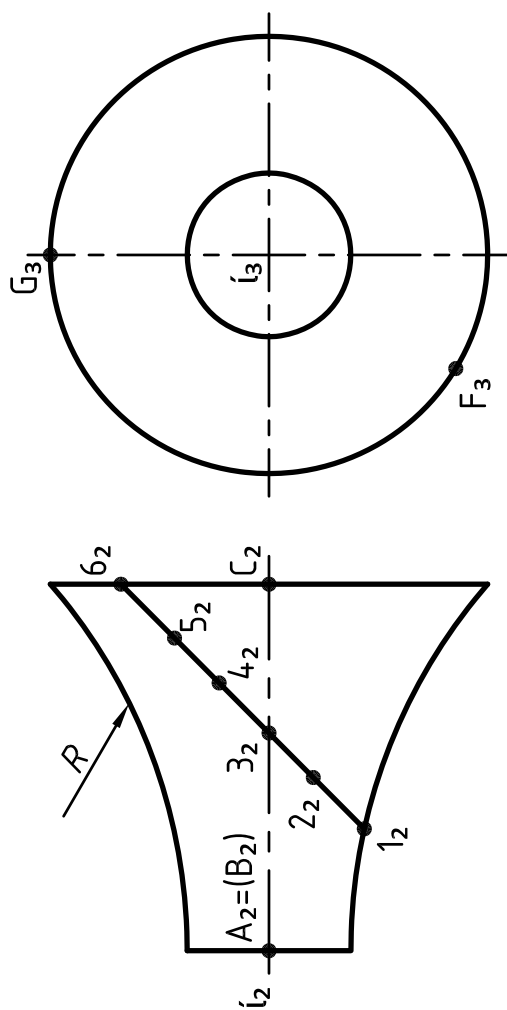


47. Задан комплексный трёхпроекционный чертёж тора. Построить недостающие проекции заданных точек и линий на поверхности тора. Заданные проекции видимые.



48. Задан двухпроекционный чертёж глобоида. Построить недостающие проекции заданных точек и линии, принадлежащих поверхности глобоида. Заданные проекции видимые.

Глобoid – это поверхность, образованная вращением внутренней стороны дуги радиусом R , вокруг оси $\dot{l}$.



Тема 9. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Позиционными задачам называются такие, в которых определяется относительное положение или общие элементы геометрических фигур.

Задачи на определение общих элементов геометрических фигур подразделяются на первую и вторую позиционные задачи. К первой позиционной задаче относятся все задачи на определение точки пересечения линии и поверхности. Ко второй позиционной задаче относятся все задачи на определение линии пересечения двух поверхностей.

9.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОСТЕЙШИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР ИЗ УСЛОВИЯ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

К вспомогательным позиционным задачам относятся все задачи, в которых пересекаются простейшие геометрические фигуры (прямая с плоскостью или плоскостью), при этом одна из проекций их общего элемента занимает частное положение (вырождается в прямую или точку). Решение таких задач сводится к построению второй проекции искомой геометрической фигуры.

9.1.1. ПОСТРОЕНИЕ ТОЧКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРЯМОЙ С ПЛОСКОСТЬЮ

Пример

Построить точку M пересечения прямой общего положения q с горизонтально проецирующей плоскостью Δ , заданной треугольником ABC . Определить видимость проекций прямой q .

Решение

1. Горизонтальную проекцию точки M определяем как результат пересечения горизонтальной проекции плоскости Δ и горизонтальной проекции прямой q :

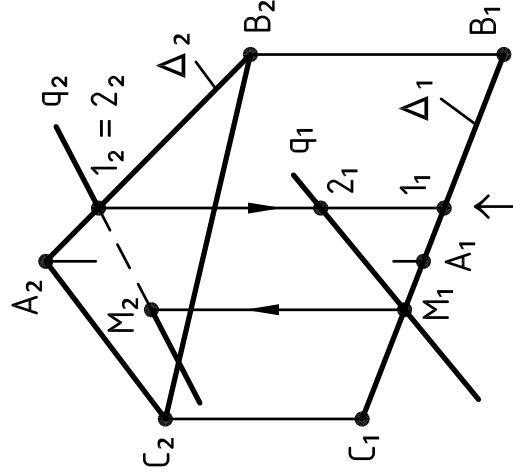
$$M_1 = \Delta_1 \cap q_1.$$

2. Фронтальную проекцию точки M определяем из условия принадлежности прямой q (как результат пересечения вертикальной линии связи и фронтальной проекции прямой q):

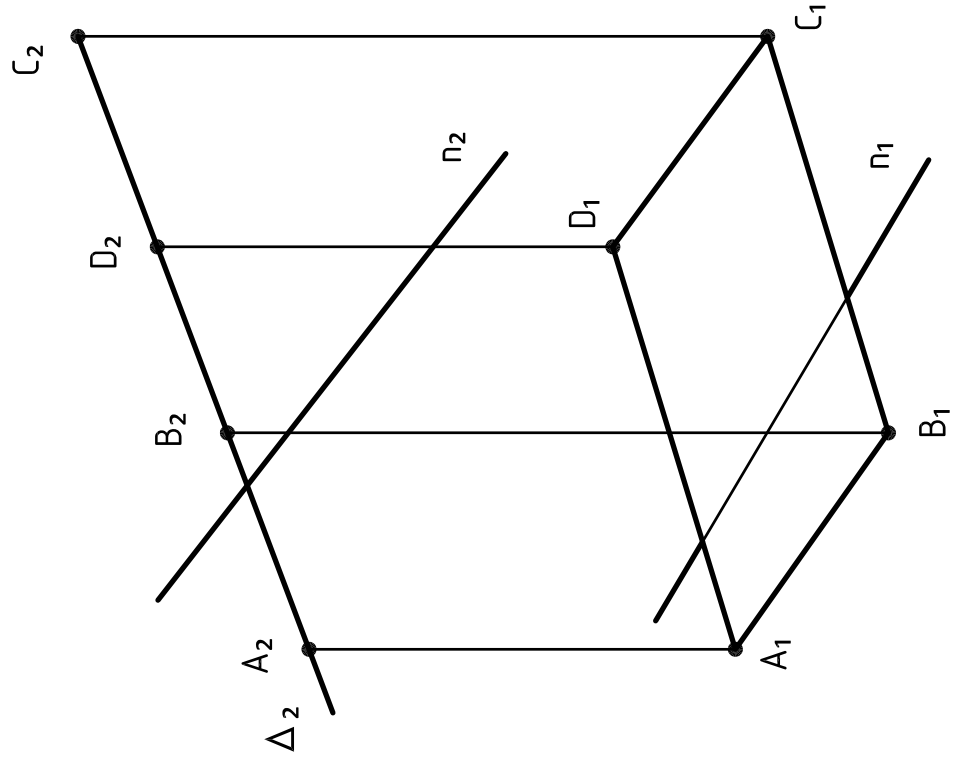
$$M_2 = (M_1 - M_2) \cap q_2.$$

Определение видимости прямой q :

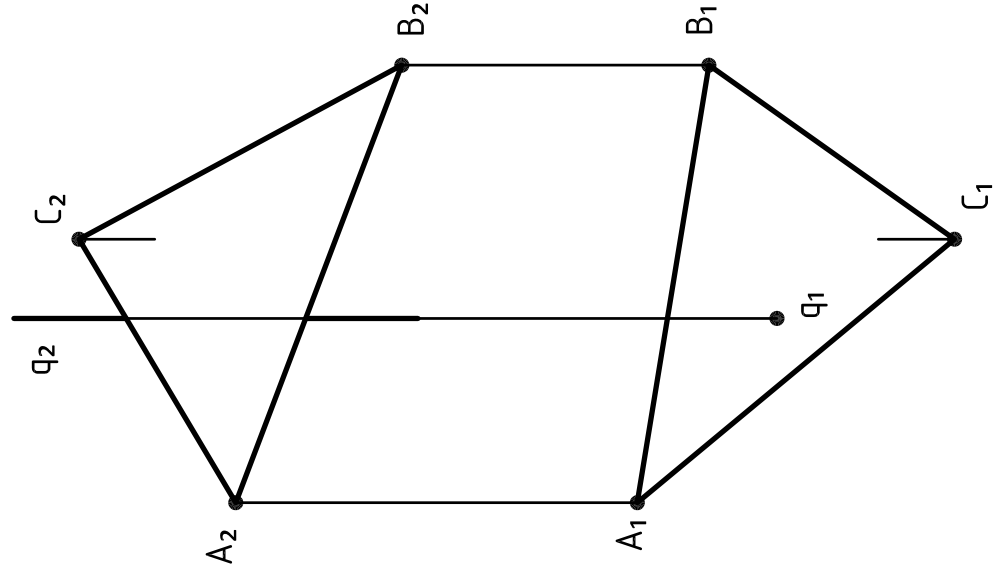
1. Видимость на Π_2 определяем по фронтально конкурирующим точкам 1 и 2.
2. Участок $M-2$ прямой q расположен за плоскостью Δ и поэтому невидим.



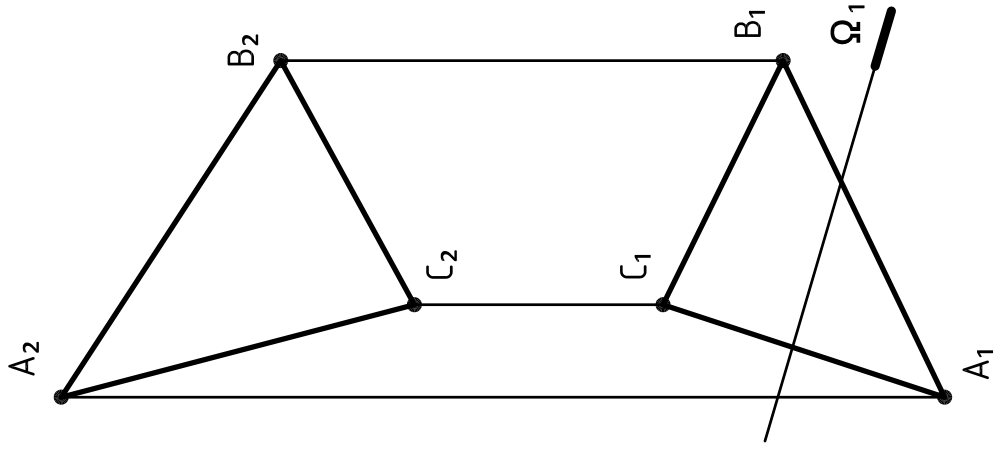
49. Построить точку M пересечения прямой общего положения n с фронтально проецирующей плоскостью Δ , заданной параллелограммом $ABCD$. Определить видимость проекций прямой n .



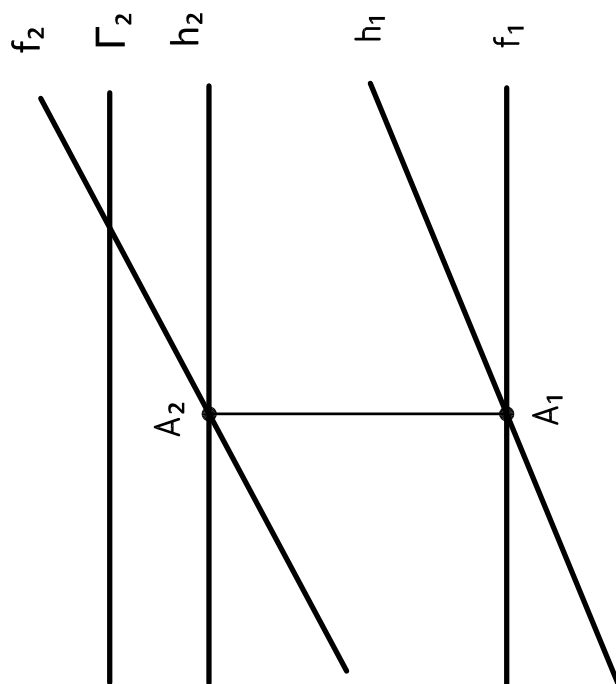
50. Построить точку N пересечения горизонтально проецирующей прямой q с плоскостью общего положения Σ , заданной треугольником ABC . Определить видимость проекций прямой q .



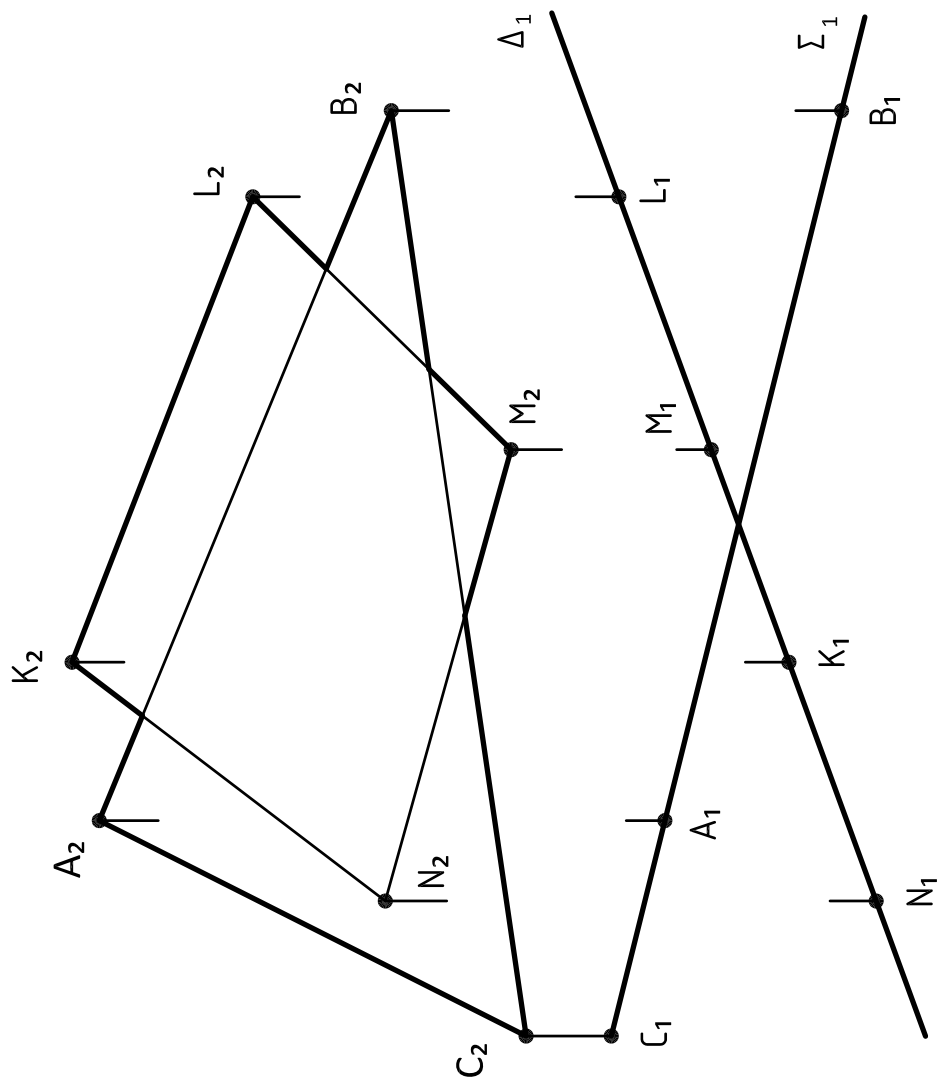
51. Построить прямую k пересечения плоскости общего положения Ψ , заданной треугольником ABC , с горизонтально проецирующей плоскостью Ω .



52. Построить прямую q пересечения плоскости, заданной двумя пересекающимися прямыми f и h , с горизонтальной плоскостью уровня Γ .



53. Построить прямую g пересечения двух горизонтально проецирующих плоскостей Δ и Σ , заданных треугольником ABC и параллелограммом $KLMN$. Определить видимость прямой g .



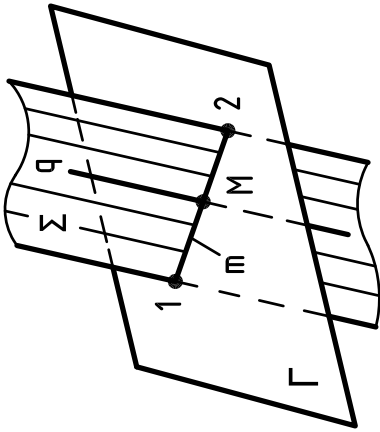
9.2. ПОСТРОЕНИЕ ТОЧЕК ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ. ПЕРВАЯ ПОЗИЦИОННАЯ ЗАДАЧА. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Основа – способ вспомогательных поверхностей. Сущность способа – каждая из искоемых точек есть результат пересечения двух линий, принадлежащих вспомогательной поверхности: одна из которых задана, а вторая – является линией пересечения вспомогательной и заданной поверхностей.

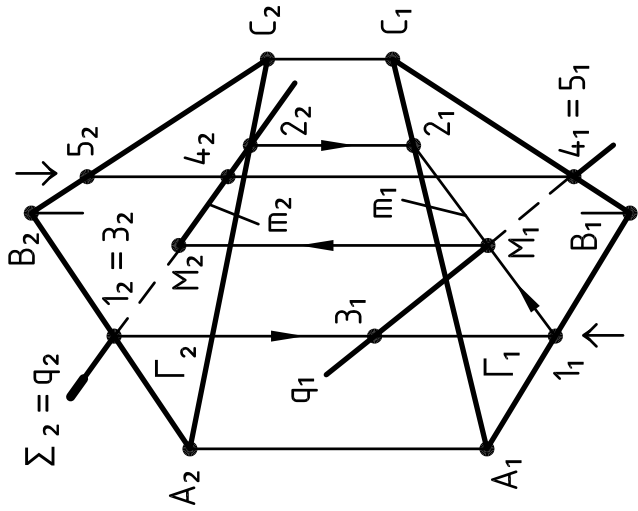
Общая схема решения первой позиционной задачи

1. Через заданную линию q проводится вспомогательная поверхность Σ :
 $\Sigma \supset q$.
2. Определяется линия m пересечения вспомогательной Σ и заданной Γ поверхностей:
 $m(1-2) = \Sigma \cap \Gamma$.
3. Определяется точка M и возможные другие искоемые точки пересечения линий m и q :
 $M = m(1-2) \cap q = q \cap \Gamma$.

Для конкретной задачи на основании общей схемы решения составляется алгоритм.



9.2.1. ПОСТРОЕНИЕ ТОЧКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРЯМОЙ С ПЛОСКОСТЬЮ. ПЕРВАЯ ПОЗИЦИОННАЯ ЗАДАЧА



Пример

Определить точку M пересечения прямой общего положения q с плоскостью общего положения $\Gamma(ABC)$.

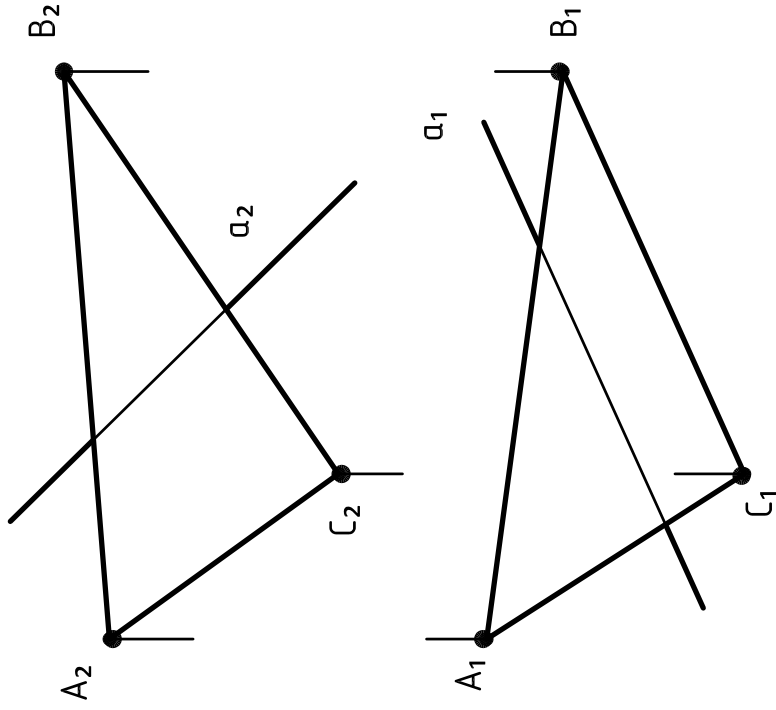
Алгоритм определения точки M :

1. $\Sigma \supset q$; $\Sigma \perp \Pi_2$
2. $\Sigma \cap \Gamma = m(1-2)$
3. $M = m(1-2) \cap q$

Определение видимости прямой q :

1. на Π_1 – по конкурирующим точкам 4 и 5
2. на Π_2 – по конкурирующим точкам 1 и 3

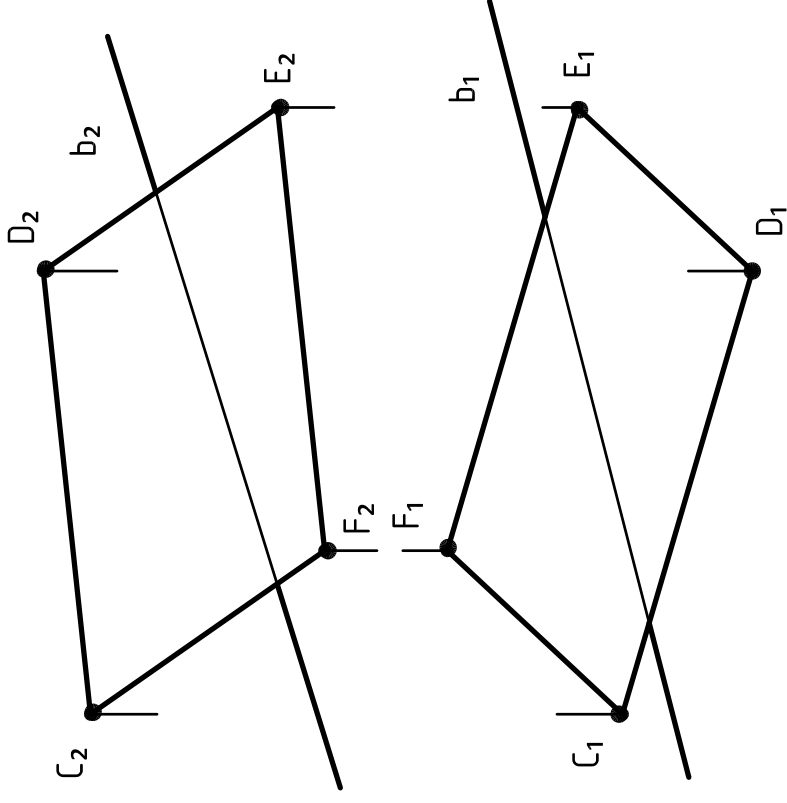
54. Построить точку M пересечения прямой общего положения a с плоскостью общего положения, заданной треугольником ABC . Определить видимость проекций прямой a . Записать алгоритм определения точки M .



Алгоритм определения точки M :

1. _____
2. _____
3. _____

55. Построить точку N пересечения прямой общего положения b с плоскостью общего положения, заданной параллелограммом $CDEF$. Определить видимость проекций прямой b . Записать алгоритм определения точки N .



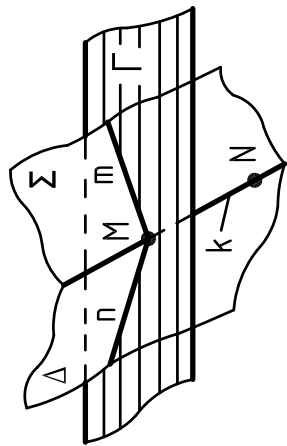
Алгоритм определения точки N :

1. _____
2. _____
3. _____

9.3. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ПОВЕРХНОСТЕЙ. ВТОРАЯ ПОЗИЦИОННАЯ ЗАДАЧА. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Две поверхности пересекаются по линии (совокупности линий), точки которой принадлежат одновременно каждой из заданных поверхностей. Основа – способ вспомогательных поверхностей. Сущность способа – каждая из искомым точек есть результатом пересечения двух линий, образующихся при пересечении вспомогательной поверхности с каждой из заданных поверхностей. Вспомогательные поверхности выбирают таким образом, чтобы проекции линий их пересечения с заданными поверхностями были отрезками прямых или окружностями.

Общая схема решения второй позиционной задачи

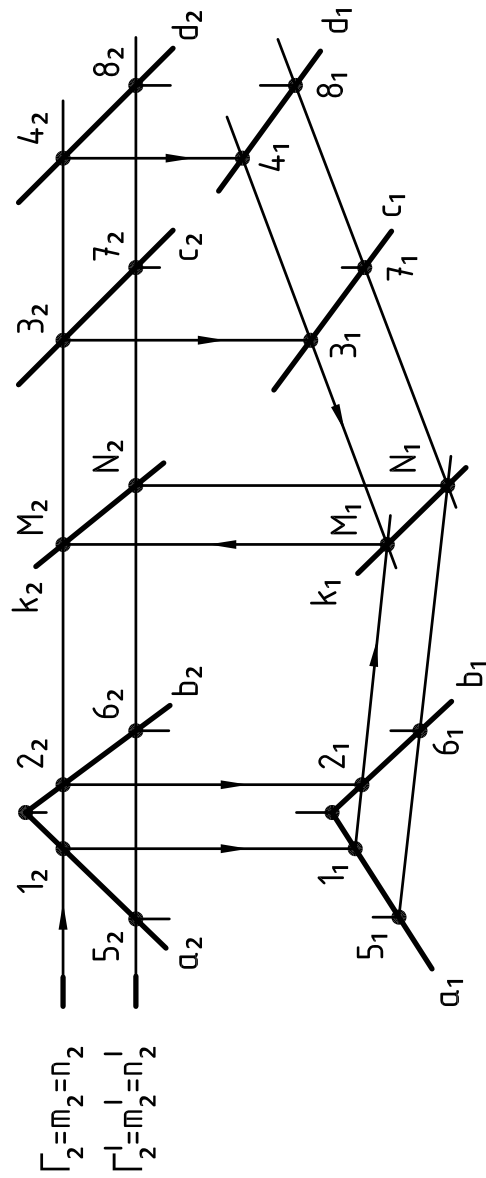


1. Вводится вспомогательная поверхность Γ , пересекающая заданные поверхности Σ и Δ :
 $\Gamma \cap \Sigma$ и $\Gamma \cap \Delta$.
2. Определяются линии m и n пересечения поверхности Γ с каждой из заданных Σ и Δ :
 $m = \Gamma \cap \Sigma$ и $n = \Gamma \cap \Delta$.
3. Определяются точки M и N пересечения линий m и n , являющиеся искомыми:
 $M = m \cap n$ и $N = m \cap n$.

9.3.1. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ. ВТОРАЯ ПОЗИЦИОННАЯ ЗАДАЧА

При решении задач используется общая схема решения: в качестве вспомогательных поверхностей вводятся проецирующие плоскости или плоскости уровня, а для конкретной задачи (на основании общей схемы решения) составляется алгоритм.

Пример. Построить линию пересечения k (MN) двух плоскостей общего положения Σ ($a \cap b$) и Δ ($c \parallel d$).



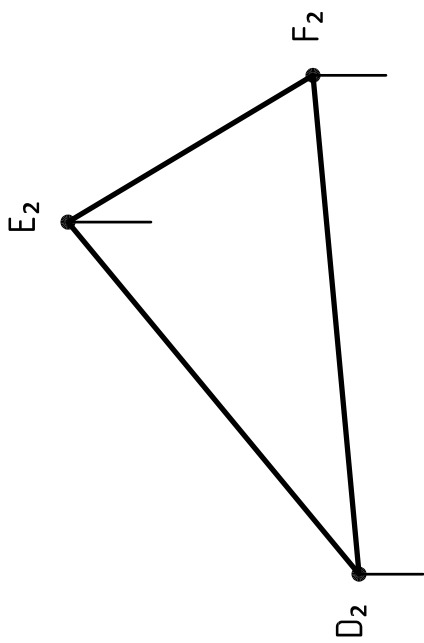
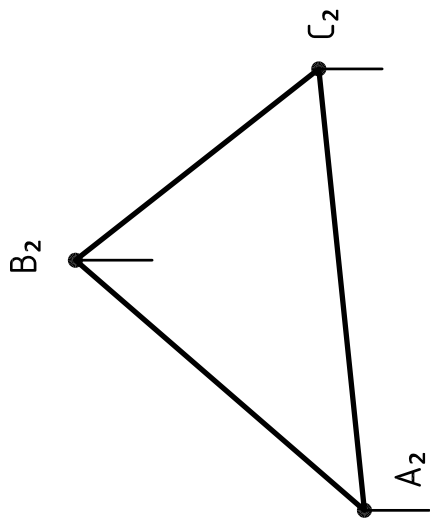
Алгоритм определения точки M:

1. $\Gamma \parallel \Pi_1; \Gamma \cap \Sigma; \Gamma \cap \Delta$
2. $m = \Gamma \cap \Sigma; n = \Gamma \cap \Delta$
3. $M = m \cap n$

Алгоритм определения точки N:

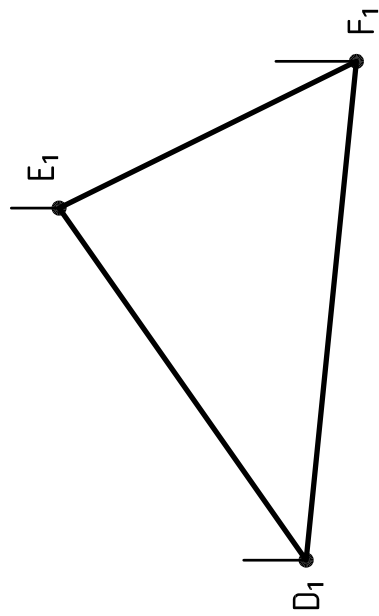
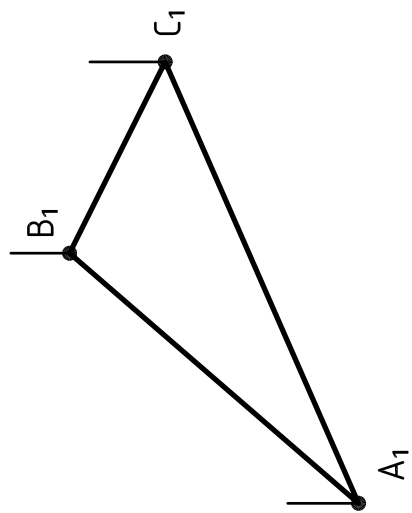
1. $\Gamma' \parallel \Pi_1; \Gamma' \cap \Sigma; \Gamma' \cap \Delta$
2. $m' = \Gamma' \cap \Sigma; n' = \Gamma' \cap \Delta$
3. $N = m' \cap n'$

56. Построить проекции линии пересечения d ($M-N$) двух плоскостей общего положения $\Delta(ABC)$ и $\Sigma(DEF)$, заданных треугольниками. Записать алгоритмы определения точек M и N .



Алгоритм определения точки M :

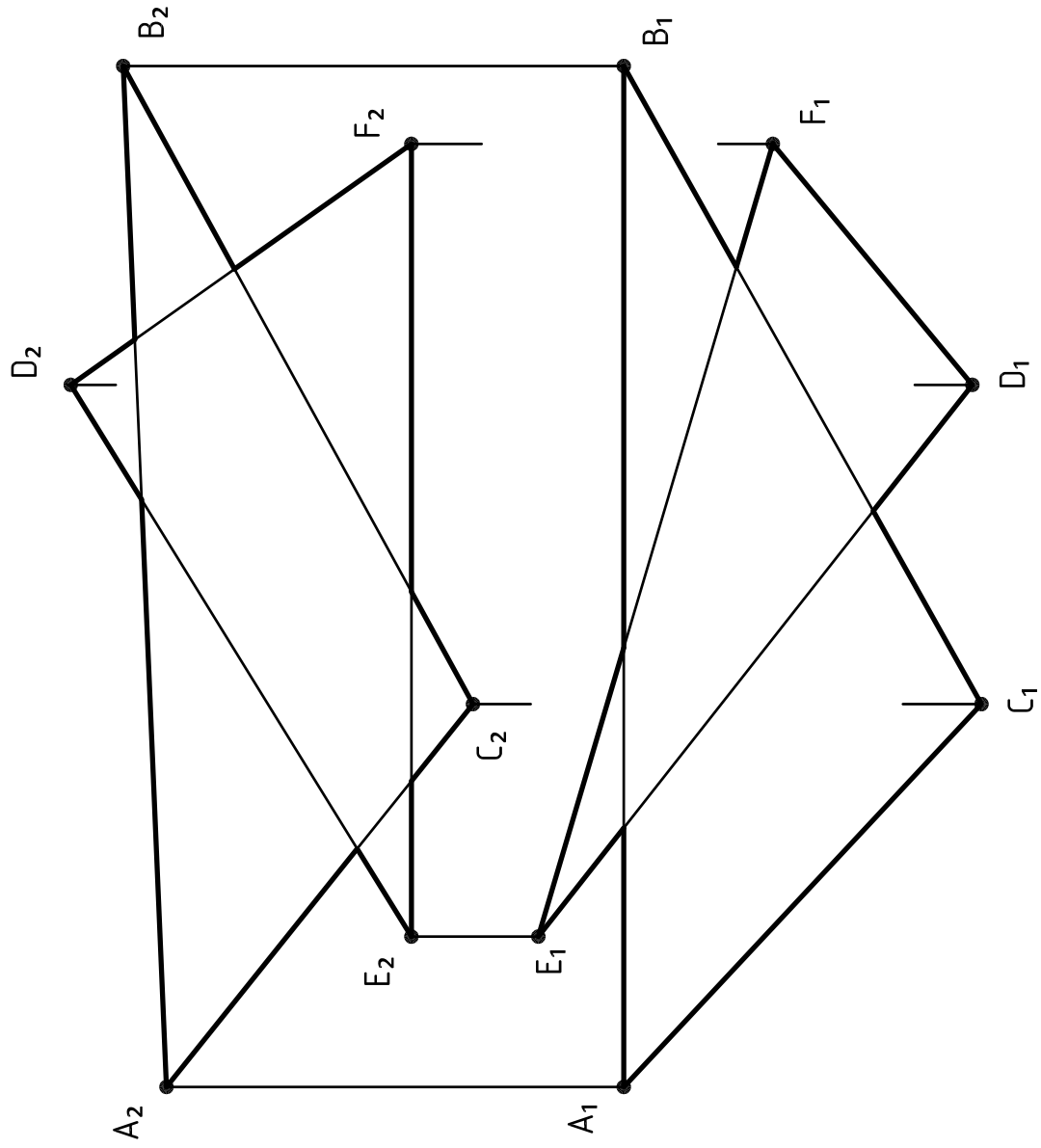
1. _____
2. _____
3. _____



Алгоритм определения точки N :

1. _____
2. _____
3. _____

57. Построить проекции линии пересечения d ($M-N$) двух плоскостей общего положения $\triangle(ABC)$ и $\Sigma(DEF)$, заданных треугольниками. Решение выполнить с использованием алгоритма первой позиционной задачи. Записать алгоритмы определения точек M и N . Определить видимость проекций линии пересечения.



Алгоритм определения точки M :

1. _____
2. _____
3. _____

Алгоритм определения точки N :

1. _____
2. _____
3. _____

9.4. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПЛОСКОСТЯМИ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ. ВТОРАЯ ПОЗИЦИОННАЯ ЗАДАЧА

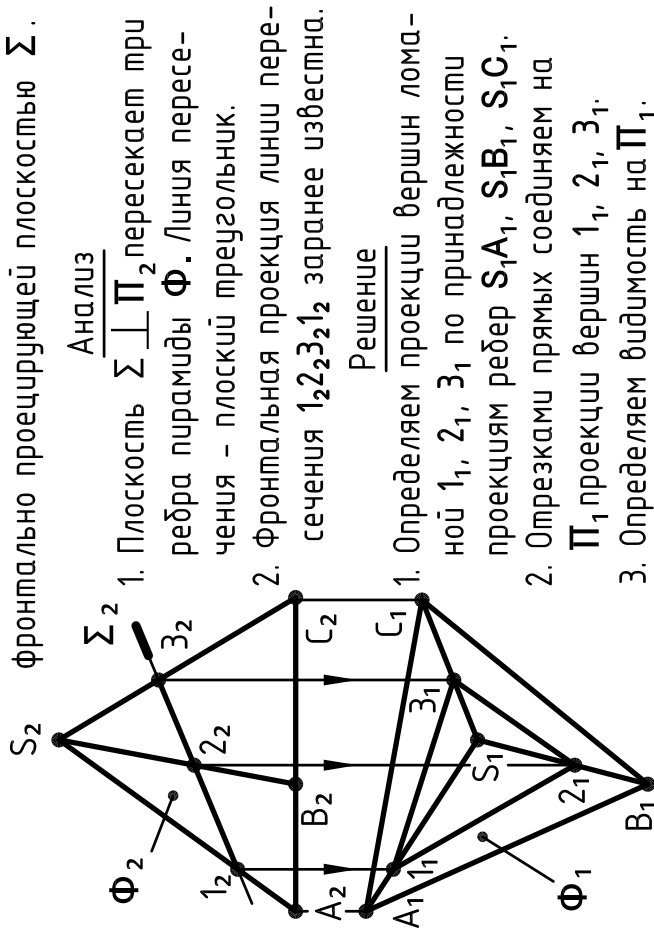
В задачах на построение линии пересечения поверхностей плоскостями частного положения одна проекция линии сечения совпадает с проекцией секущей плоскости в пределах очерка пересекемой поверхности, а другие проекции этой линии определяются по точкам из условия принадлежности этих точек заданной поверхности. Последовательность решения задач: 1) определяются проекции опорных и промежуточных точек; 2) найденные точки последовательно соединяются; 3) определяется видимость проекций линии пересечения; 4) определяется видимость проекций очерков поверхностей.

9.4.1. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ ПЛОСКОСТЯМИ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ

Линия пересечения – плоская замкнутая ломаная линия. Число вершин и сторон – равно числу ребер и граней многогранника, пересекаемых плоскостью. Вершины – точки пересечения ребер многогранника с плоскостью (опорные точки). Стороны – отрезки прямых, по которым плоскость пересекает грани многогранника. Решение задач заключается в нахождении вершин или сторон (звеньев) ломаной.

Пример №1

Построить линию пересечения пирамиды Φ фронтально проецирующей плоскостью Σ .



Анализ

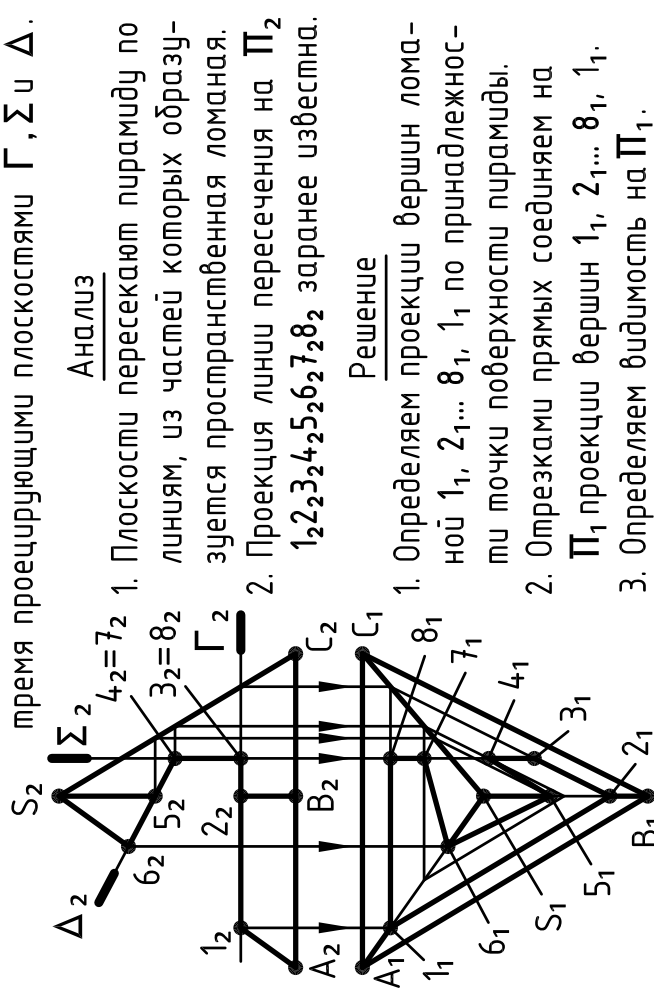
1. Плоскость $\Sigma \perp \Pi_2$ пересекает три ребра пирамиды Φ . Линия пересечения – плоский треугольник.
2. Фронтальная проекция линии пересечения $1_2 2_2 3_2$ заранее известна.

Решение

1. Определяем проекции вершин ломаной $1_1, 2_1, 3_1$ по принадлежности проекциям ребер $S_1 A_1, S_1 B_1, S_1 C_1$.
2. Отрезками прямых соединяем на Π_1 проекции вершин $1_1, 2_1, 3_1$.
3. Определяем видимость на Π_1 .

Пример №2

Построить линию пересечения пирамиды $SABC$ тремя проецирующими плоскостями Γ, Σ и Δ .



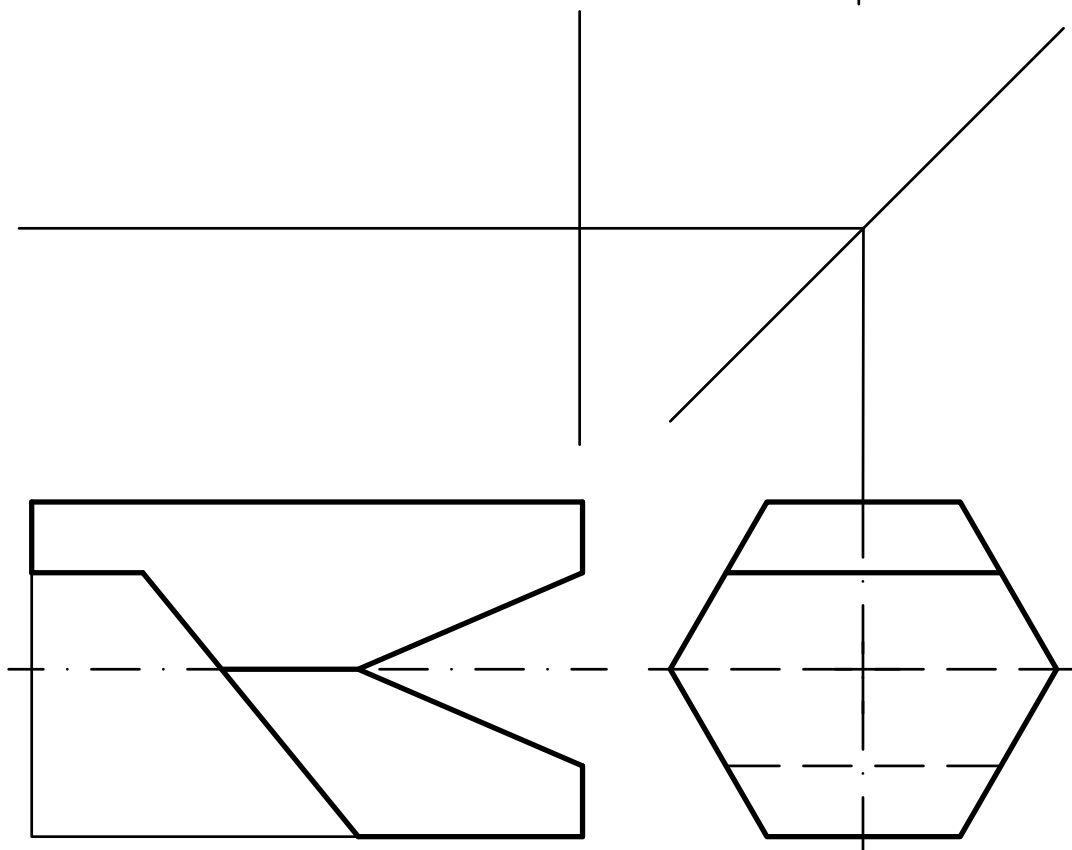
Анализ

1. Плоскости пересекают пирамиду по линиям, из частей которых образуется пространственная ломаная.
2. Проекция линии пересечения на Π_2 $1_2 2_2 3_2 4_2 5_2 6_2 7_2 8_2$ заранее известна.

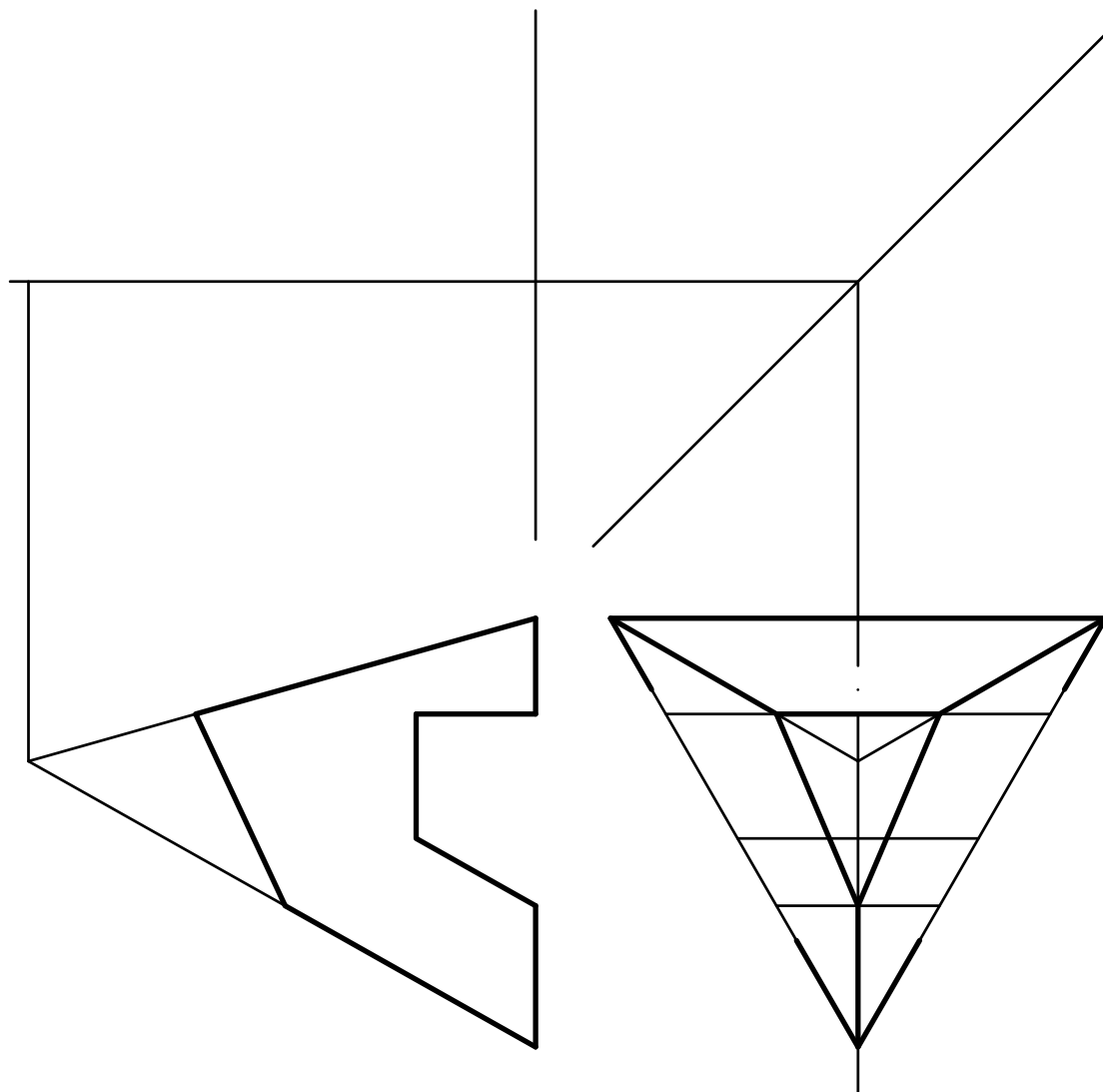
Решение

1. Определяем проекции вершин ломаной $1_1, 2_1, \dots, 8_1$ по принадлежности точки поверхности пирамиды.
2. Отрезками прямых соединяем на Π_1 проекции вершин $1_1, 2_1, \dots, 8_1$.
3. Определяем видимость на Π_1 .

58. Построить линии пересечения призмы проецирующими плоскостями. Определить проекции опорных точек. Определить видимость проекций линии пересечения. Определить видимость очерков поверхности.



59. Построить линии пересечения пирамиды проецирующими плоскостями. Определить проекции опорных точек. Определить видимость проекций линии пересечения. Определить видимость очерков поверхности.

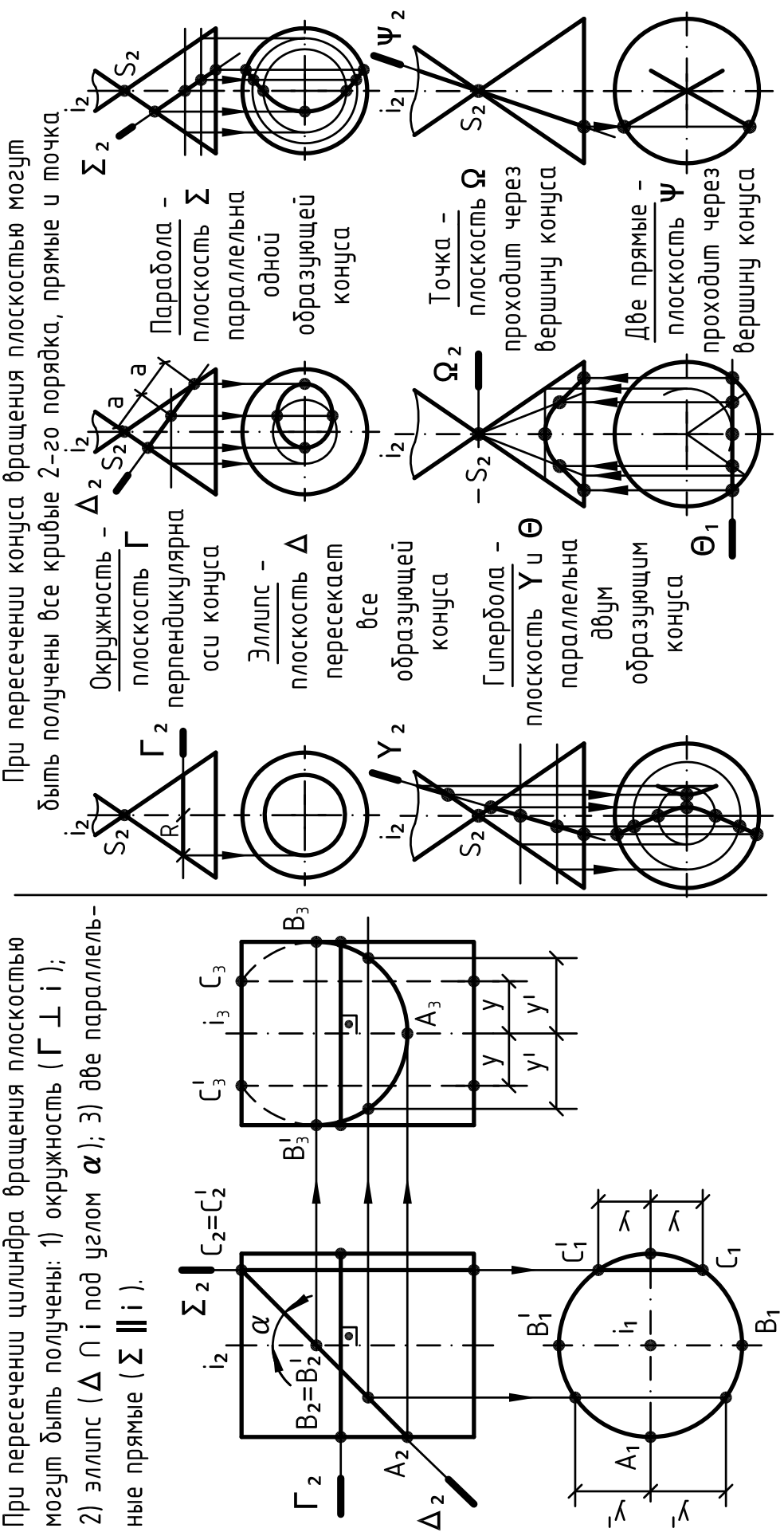


9.4.2. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПЛОСКОСТЯМИ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ

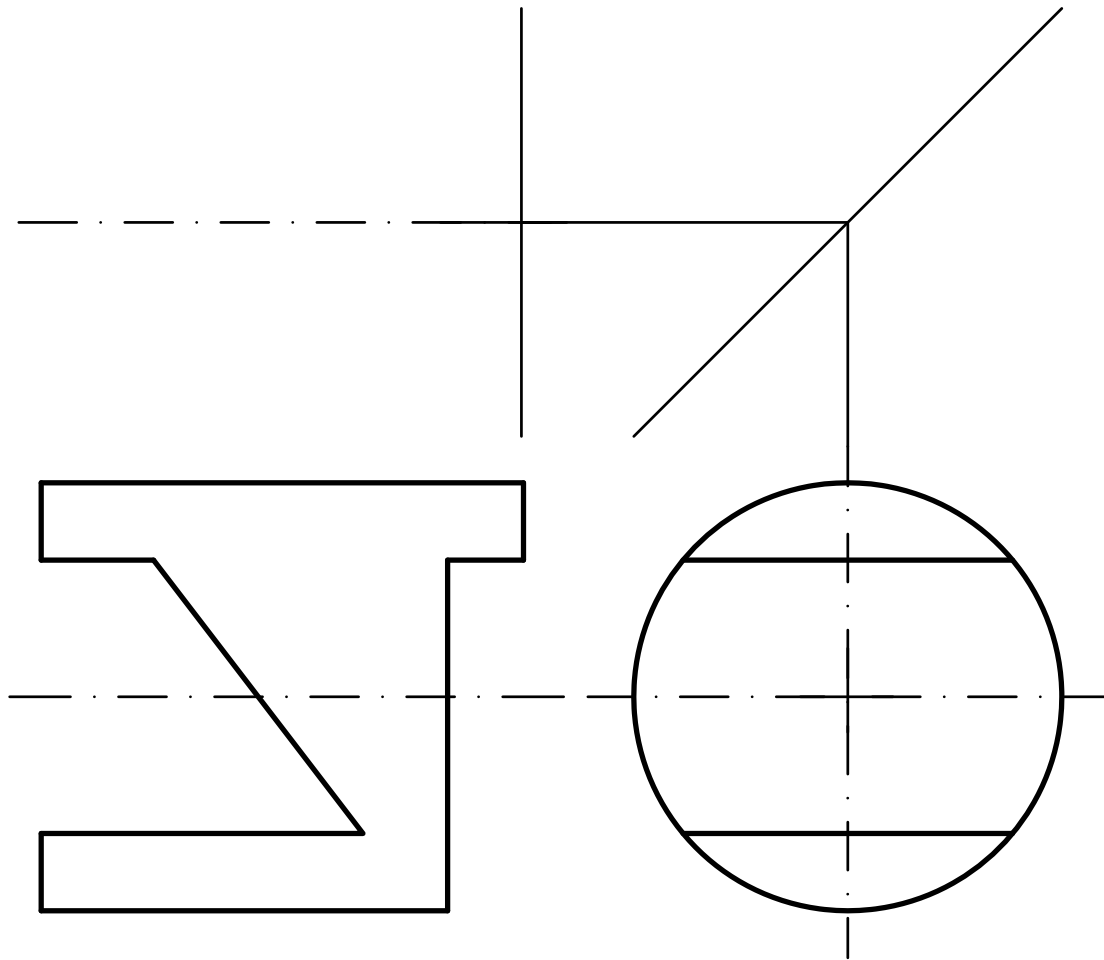
Линия пересечения кривых поверхностей (в общем случае) плоская кривая 2-го порядка, в частных случаях – могут быть прямые и линии других порядков. Одна проекция линии пересечения совпадает с проекцией секущей плоскости в пределах очерка пересекаемой поверхности, а другие проекции этой линии определяются по точкам из условия принадлежности этих точек заданной поверхности. Определяются проекции опорных и промежуточных точек, найденные точки последовательно соединяются, определяется видимость проекций линии пересечения и видимость проекций очерков поверхностей.

9.4.3. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ЦИЛИНДРА И КОНУСА ПЛОСКОСТЯМИ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ

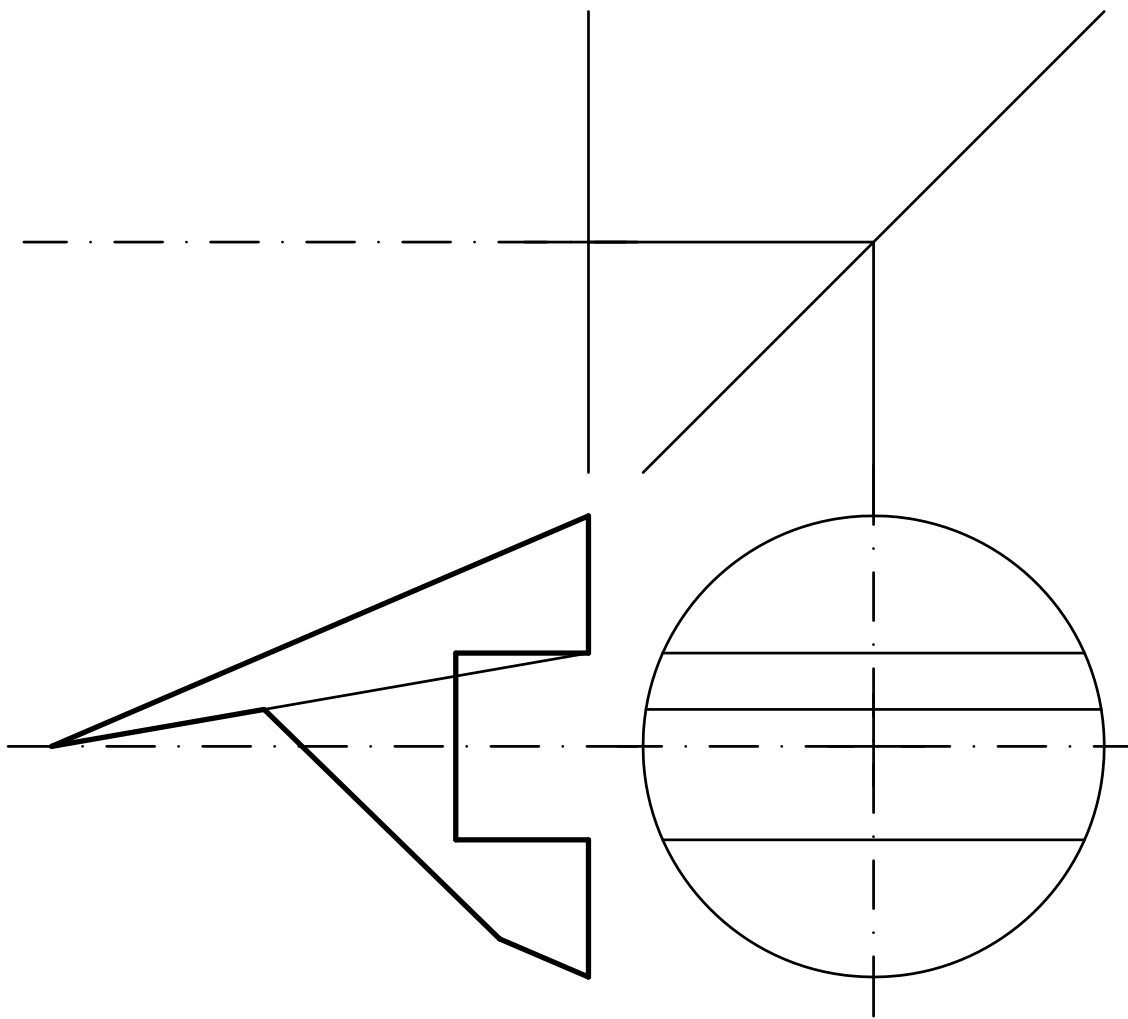
При пересечении цилиндра вращения плоскостью могут быть получены: 1) окружность ($\Gamma \perp i$); 2) эллипс ($\Delta \cap i$ под углом α); 3) две параллельные прямые ($\Sigma \parallel i$).



60. Построить линии пересечения цилиндра проецирующими плоскостями. Определить проекции опорных точек. Определить видимость проекций линии пересечения. Определить видимость проекций очерков поверхности.



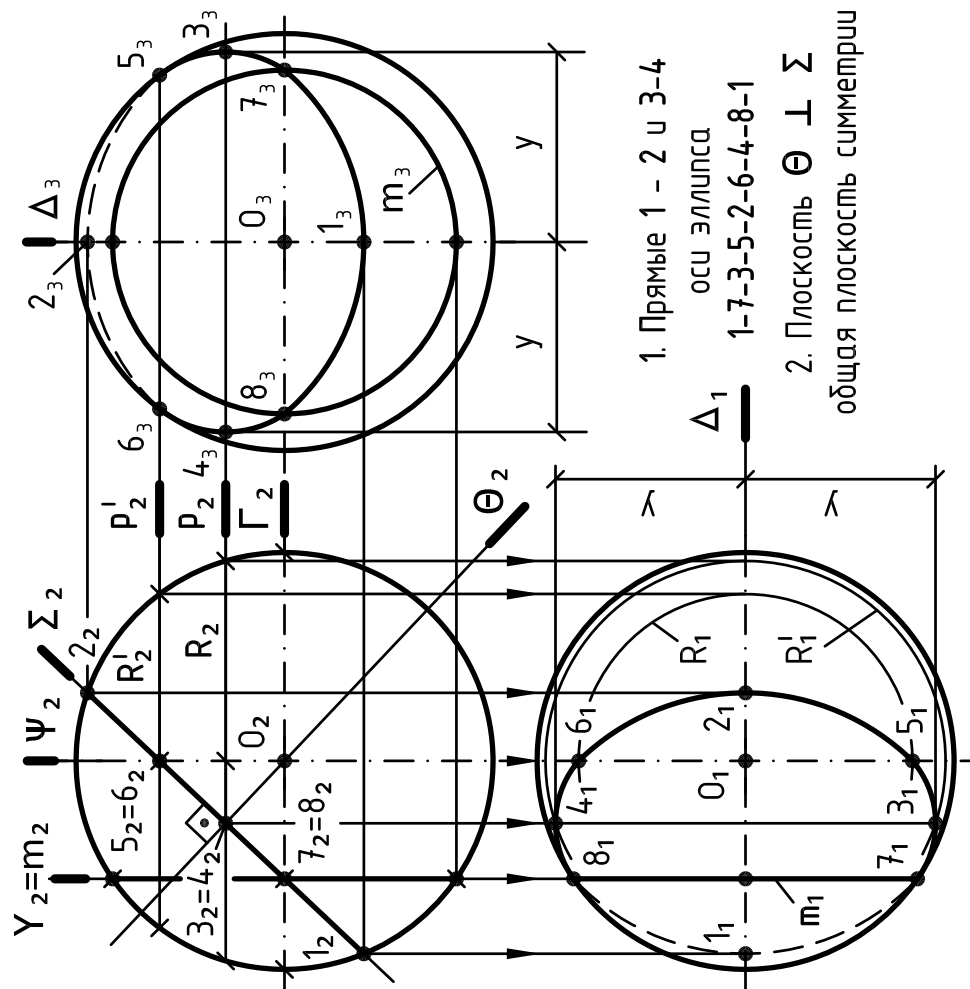
61. Построить линии пересечения конуса проецирующими плоскостями. Определить проекции опорных точек. Определить видимость проекций линии пересечения. Определить видимость проекций очерков поверхности.



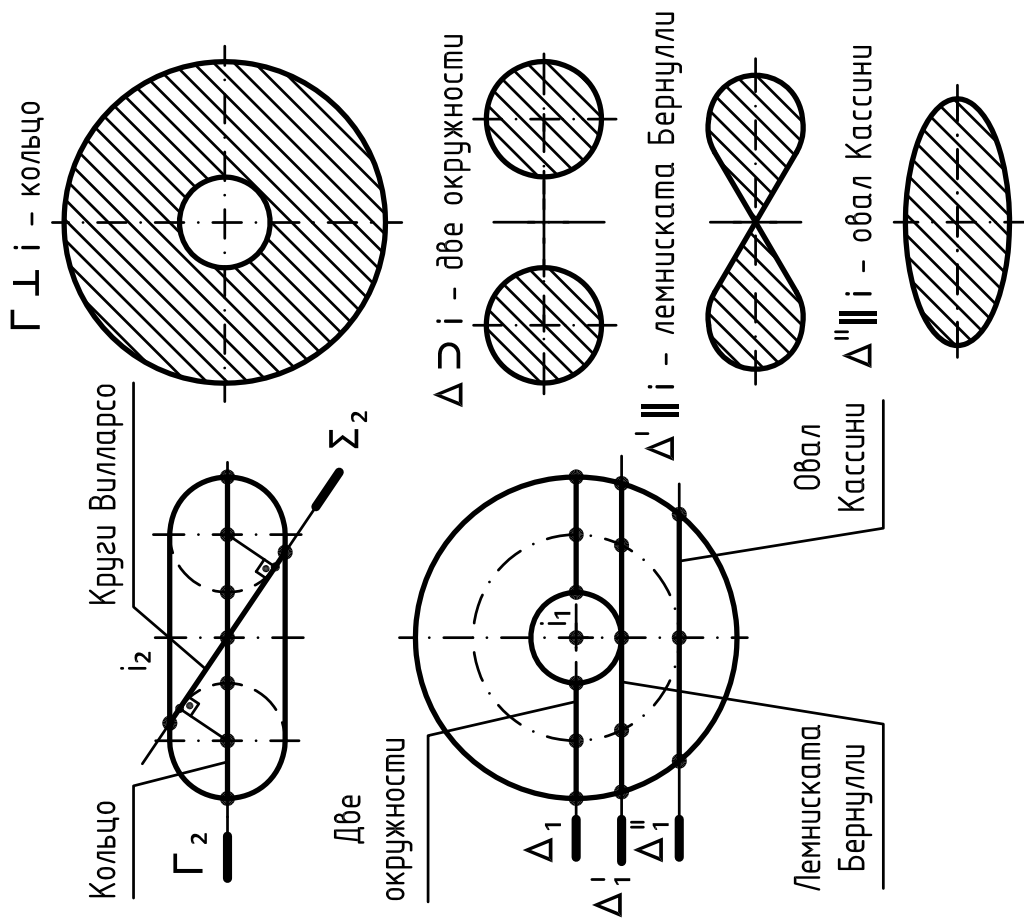
9.4.4. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ СФЕРЫ И ТОРА ПЛОСКОСТЯМИ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ

Плоскость пересекает сферу по окружности. В зависимости от положения плоскости относительно плоскостей проекций окружность проецируется в прямую, окружность или эллипс.

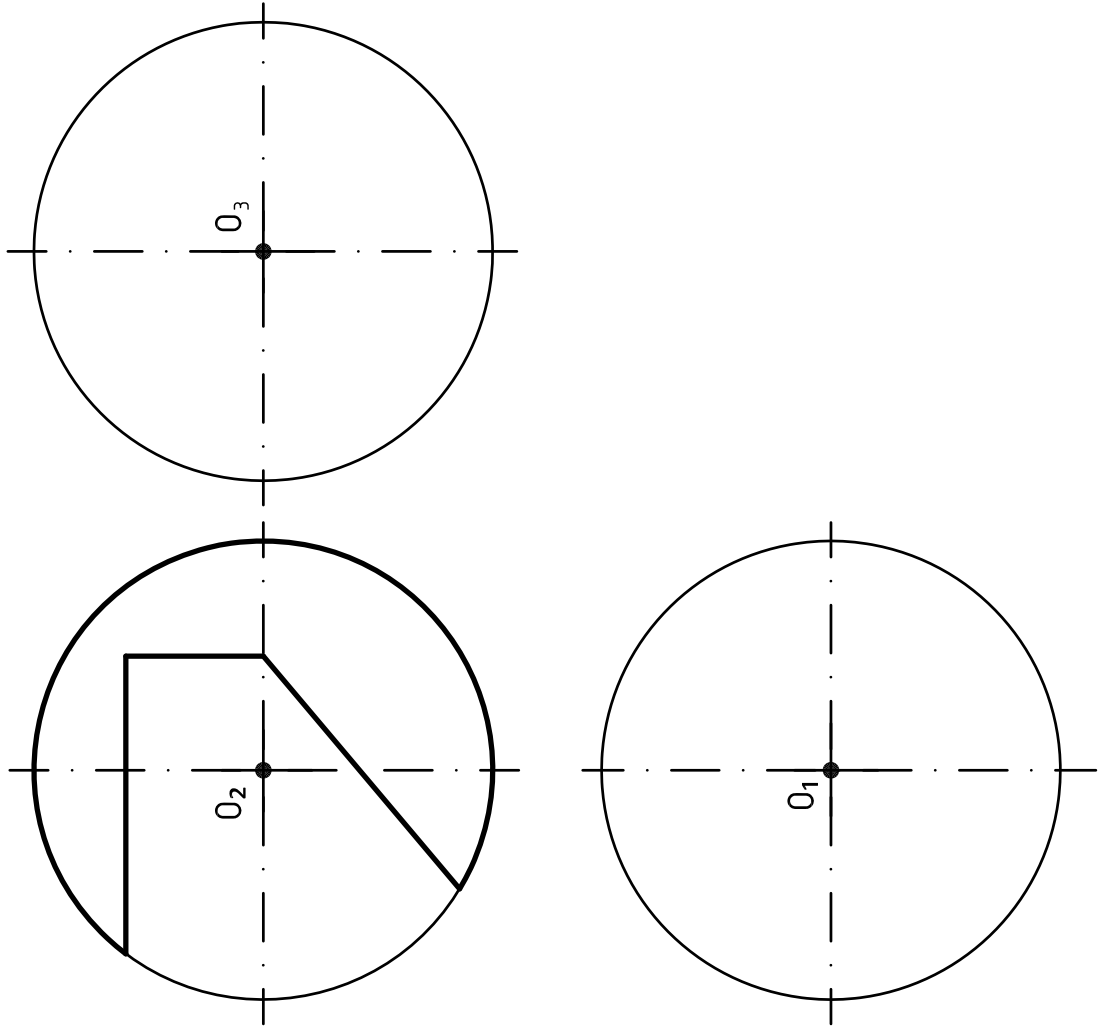
Пример. Построить линию пересечения сферы плоскостью $\Sigma \perp \Pi_2$.



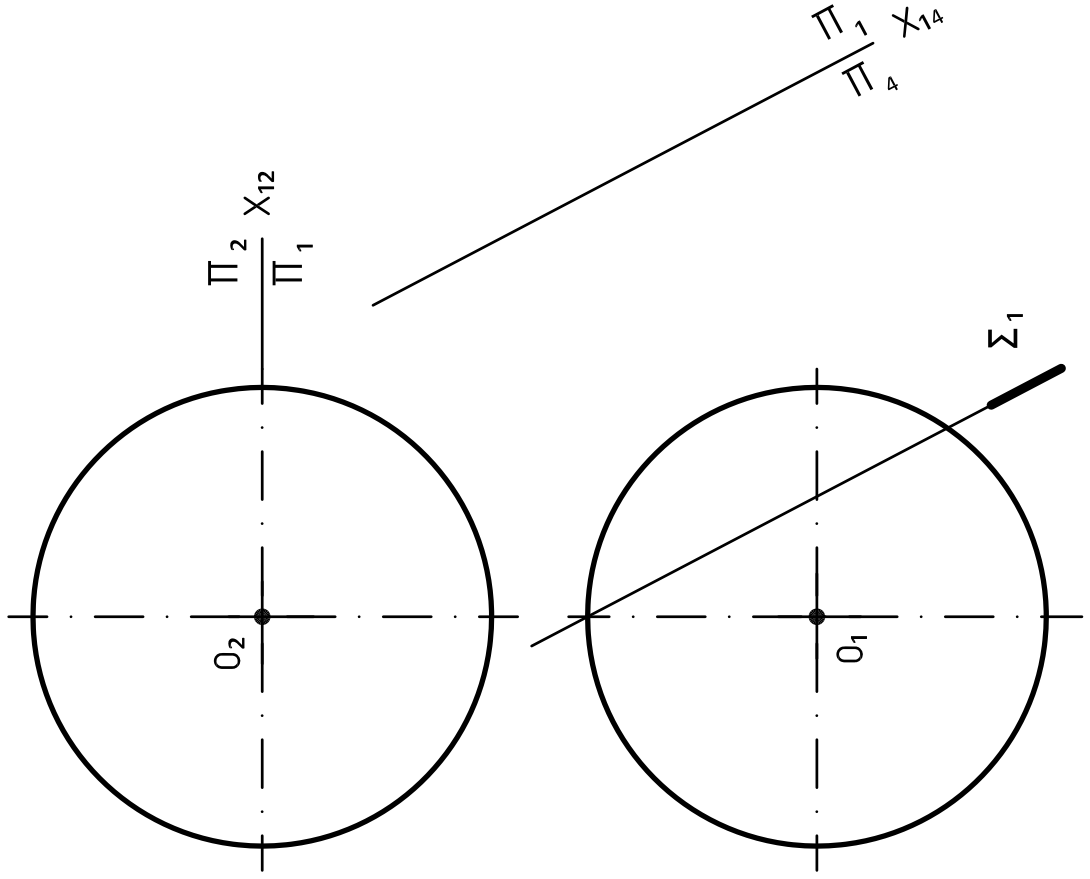
Плоскость (в общем случае) пересекает тор по кривой 4-го порядка. В частных случаях могут быть: 1) кольцо; 2) две окружности; 3) два пересекающихся круга Вилларсо.



62. Построить линии пересечения сферы проецирующими плоскостями. Определить проекции опорных точек. Определить видимость проекций линии пересечения. Определить видимость проекций очерков поверхности.

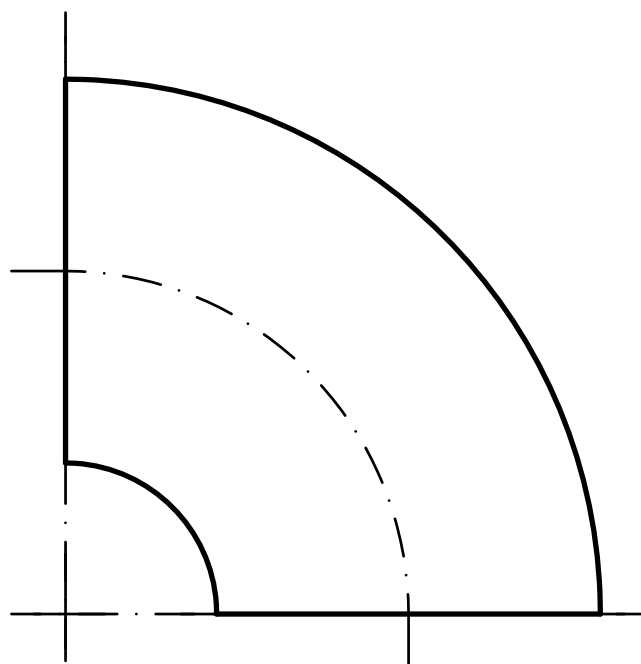
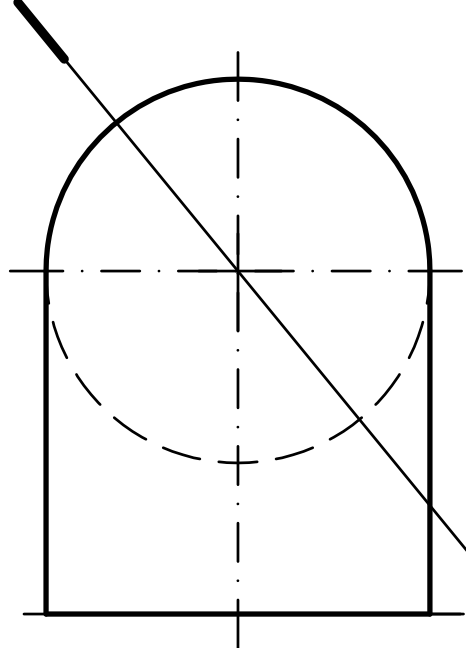


63. Построить проекции и истинный вид сечения сферы горизонтально проецирующей плоскостью. Определить проекции опорных точек и видимость проекций линии пересечения.

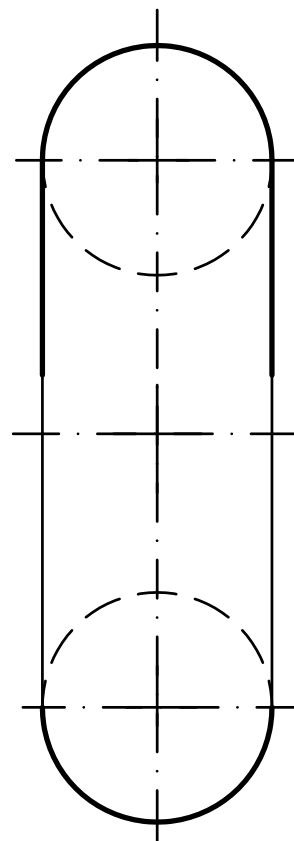
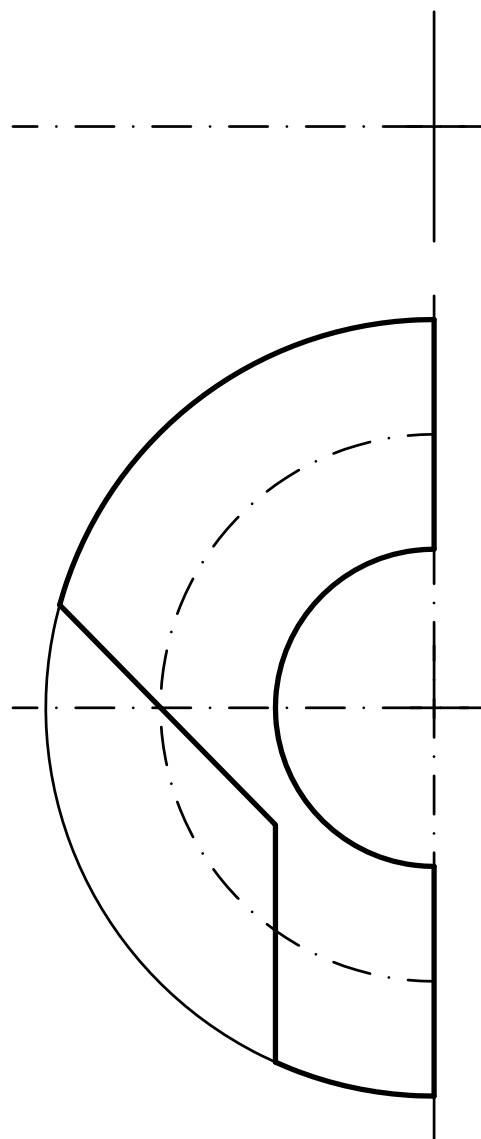


64. Построить проекции линии пересечения тора фронтально проецирующей плоскостью. Определить проекции опорных точек и видимость проекций линии пересечения.

Δ_2

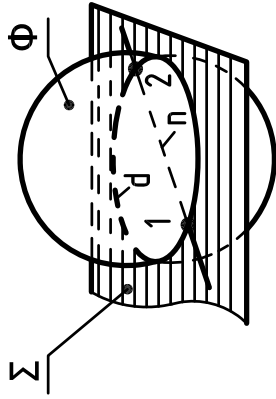


65. Построить проекции линий пересечения тора проецирующими плоскостями. Определить проекции опорных точек. Определить видимость проекций линии пересечения. Определить видимость проекций очерков поверхности.



9.5. ПОСТРОЕНИЕ ТОЧЕК ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРЯМОЙ ЛИНИИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ. ПЕРВАЯ ПОЗИЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Число точек пересечения линии и поверхности равно порядку заданной поверхности. В основу построения положен способ вспомогательных поверхностей. В качестве вспомогательных поверхностей выбираются плоскости, проходящие через заданную прямую. Плоскость выбирается таким образом, чтобы она пересекала поверхность по линии, проекции которой были бы графически простыми – отрезками прямых или дугами окружностей. Видимость проекций прямой определяется по видимости проекций поверхности на каждой из плоскостей проекций.



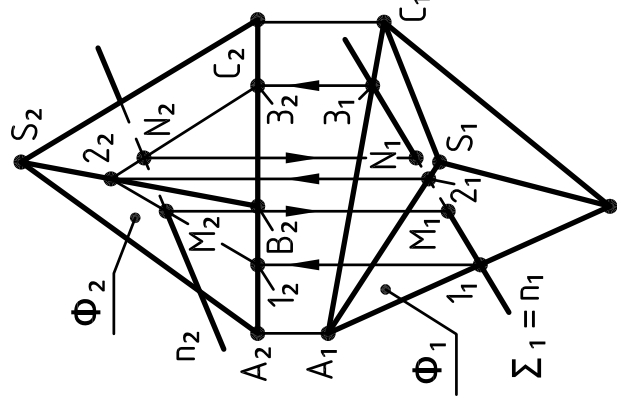
Общая схема решения первой позиционной задачи

1. Через заданную прямую n проводится вспомогательная плоскость Σ : $\Sigma \supset n$.
2. Определяется линия d пересечения плоскости Σ и поверхности Φ : $d = \Sigma \cap \Phi$.
3. Определяются искомые точки 1 и 2 пересечения линий n и d : $1 = n \cap d$; $2 = n \cap d$.

Для конкретной задачи на основании общей схемы решения составляется алгоритм.

Пример №1

Определить точки M и N пересечения прямой общего положения n с поверхностью пирамиды Φ .



Анализ

Плоскость $\Sigma \perp \Pi_1$ через прямую n пересечет Φ по многоугольнику.

Алгоритм определения точек M и N :

1. $\Sigma \supset n$; $\Sigma \perp \Pi_1$
2. $\Sigma \cap \Phi = d(1-2-3-1)$
3. $M = d(1-2-3-1) \cap n$; $N = d(1-2-3-1) \cap n$

Определение видимости прямой n

Видимость проекций прямой n – по видимости проекций граней пирамиды.

$$\Sigma_1 = d_1 = f_1$$

Пример №2

Определить точки M и N пересечения фронтали $f(AB)$ со сферой Φ .

Анализ

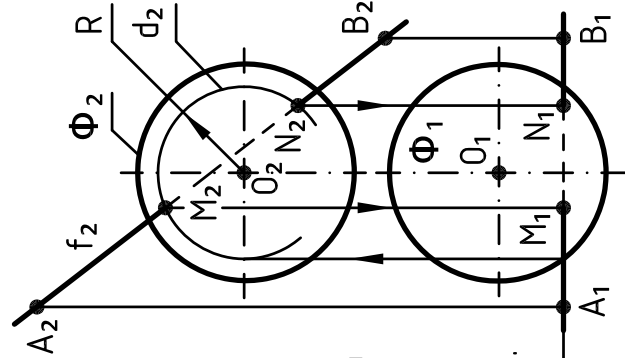
Окружность $d(R)$ сечения сферы Φ плоскостью $\Sigma \parallel \Pi_2$, проходящей через фронталь f , спроецируется на Π_2 без искажения.

Алгоритм определения точек M и N :

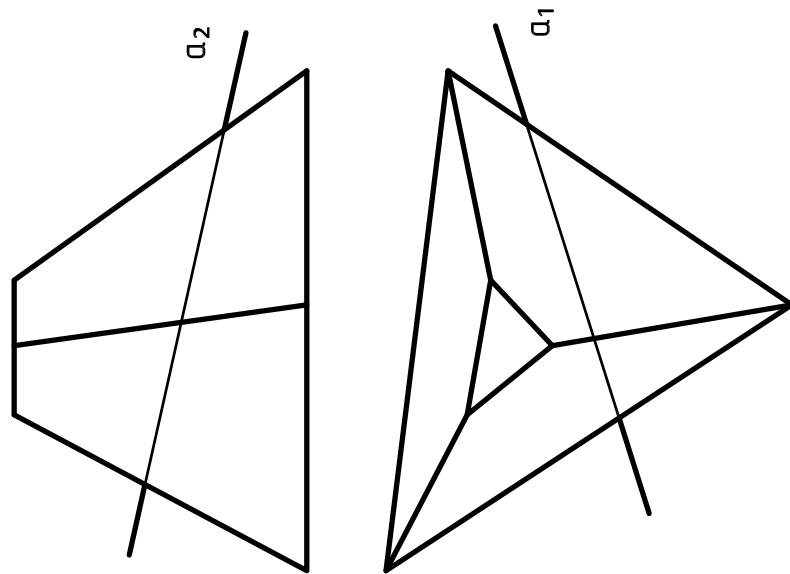
1. $\Sigma \supset f$; $\Sigma \parallel \Pi_2$
2. $\Sigma \cap \Phi = d(R)$
3. $M = d \cap f(AB)$; $N = d \cap f(AB)$

Определение видимости фронтали f

Видимость проекций фронтали f – по видимости проекций сферы Φ .



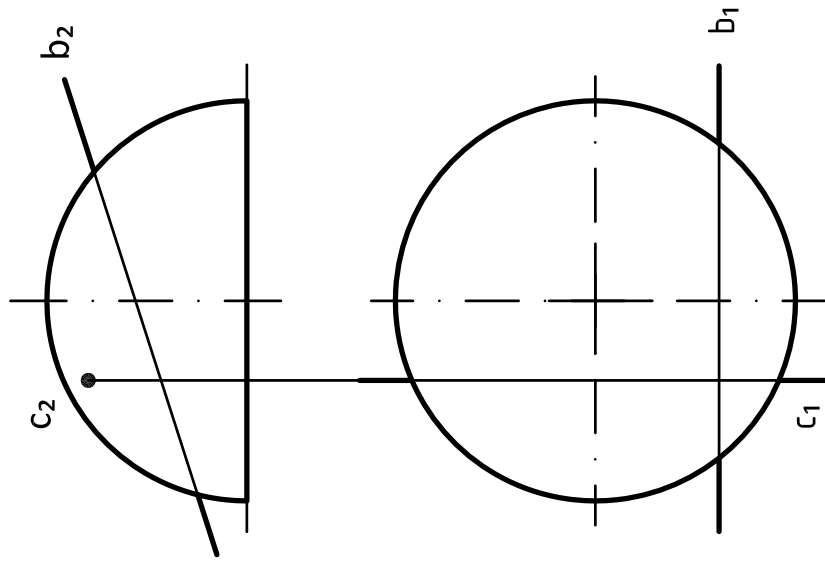
66. Построить точки пересечения прямой a с поверхностью пирамиды. Определить видимость проекций прямой. Записать алгоритм определения точек пересечения.



Алгоритм для точек прямой a :

1. _____
2. _____
3. _____

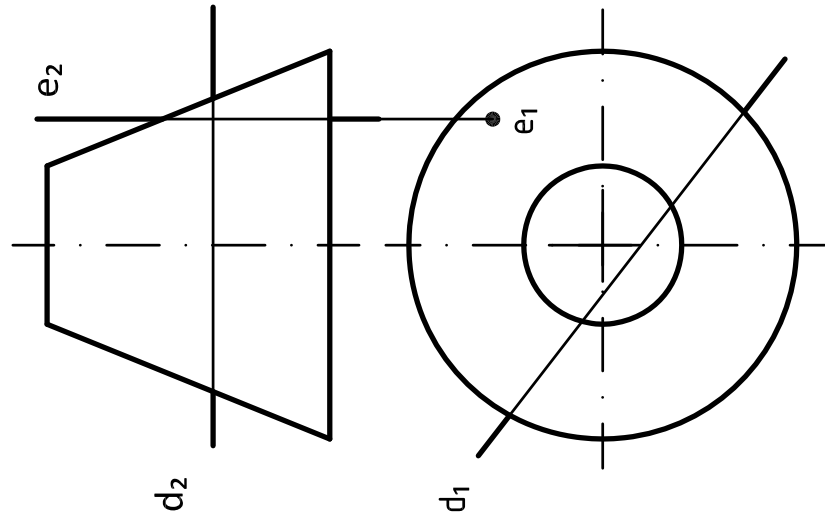
67. Построить точки пересечения прямых b и c с поверхностью сферы. Определить видимость проекций прямых. Записать алгоритм определения точек пересечения.



Алгоритм для точек прямой b :

1. _____
2. _____
3. _____

68. Построить точки пересечения прямых d и e с поверхностью конуса. Определить видимость проекций прямых. Записать алгоритм определения точек пересечения.



Алгоритм для точек прямой d :

1. _____
2. _____
3. _____

9.6. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ МНОГОГРАННИКОВ. ВТОРАЯ ПОЗИЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Возможны два вида пересечения многогранников: врезка и проникание. При врезке – линия пересечения представляет собой замкнутую пространственную ломаную линию. В случае проникания – линия пересечения распадается на две и более замкнутые пространственные или плоские ломаные. При построении линии пересечения возможны два варианта: 1) способ ребер – многократное построение точек пересечения одного ребра с плоскостями (гранями многогранника) по алгоритму первой позиционной задачи; 2) способ граней – многократное построение линии пересечения двух плоскостей (граней многогранников) по алгоритму второй позиционной задачи. Отрезками прямых соединяются те пары вершин ломаной, которые принадлежат одной и той же грани первого многогранника и одновременно одной и той же грани второго. Если одна из поверхностей является проецирующей (частный случай) – точки линии пересечения определяются из условия принадлежности той другой, непроецирующей поверхности.

Пример. Построить линию пересечения призмы Φ и пирамиды Ψ .

Анализ

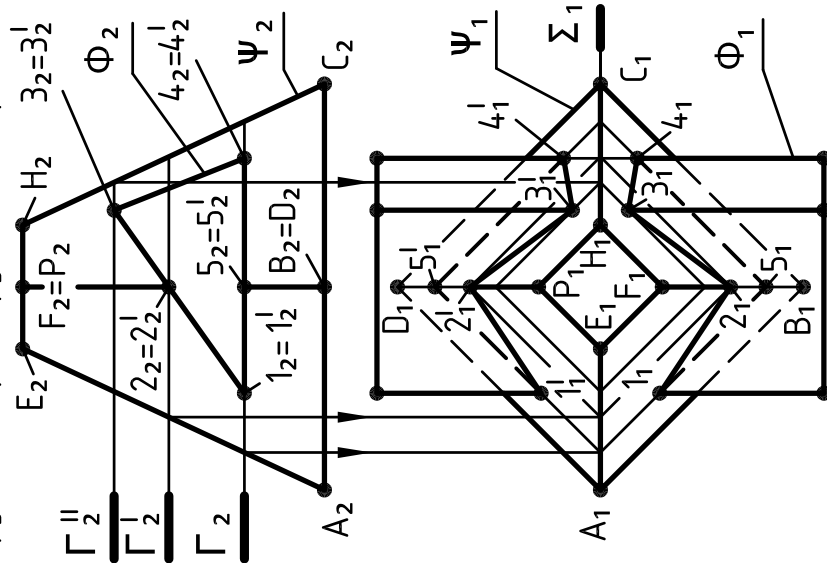
1. Случай проникания. 2. Линия пересечения распадается на две замкнутые пространственные ломаные. 3. Призма является проецирующей на Π_2 . 4. Фронтальная проекция линии пересечения совпадает с фронтальной проекцией призмы (ломаные $1_2 2_2 3_2 4_2 5_2 1_2$ и $1_2^1 2_2^1 3_2^1 4_2^1 5_2^1 1_2^1$).

Алгоритм

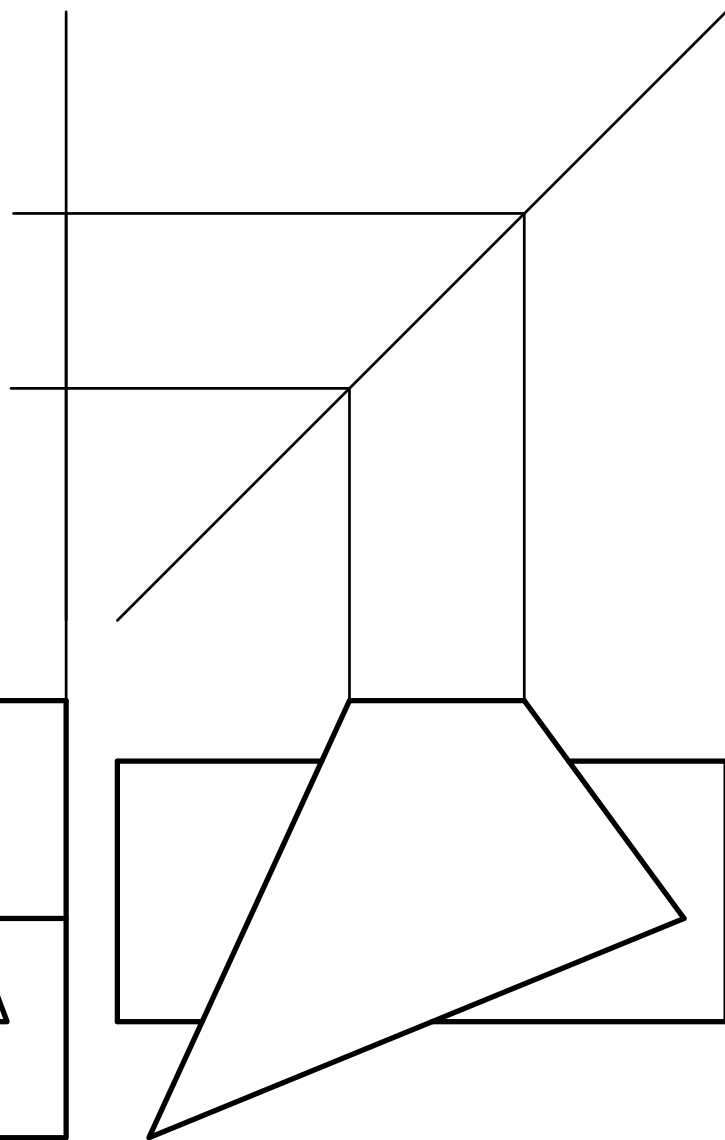
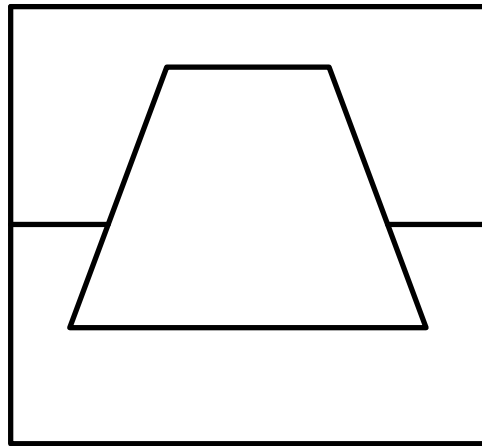
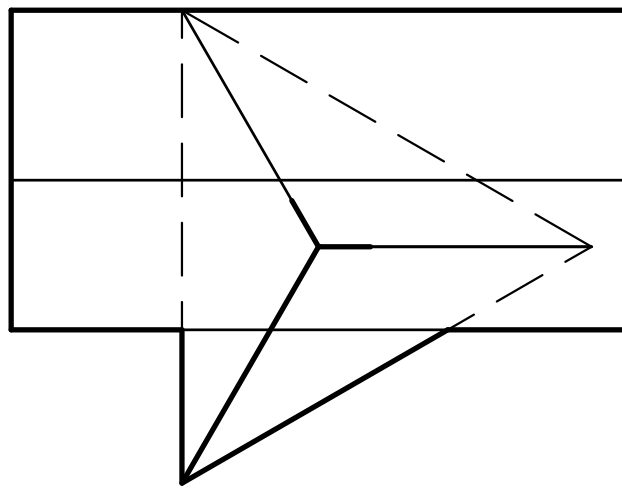
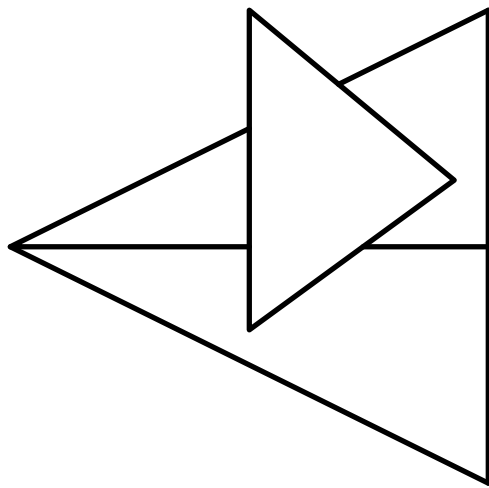
Проекцию линии пересечения на Π_1 определяем с помощью плоскостей уровня Γ_i , пересекающих пирамиду по многоугольникам, подобным ее основанию ABCD.

Решение

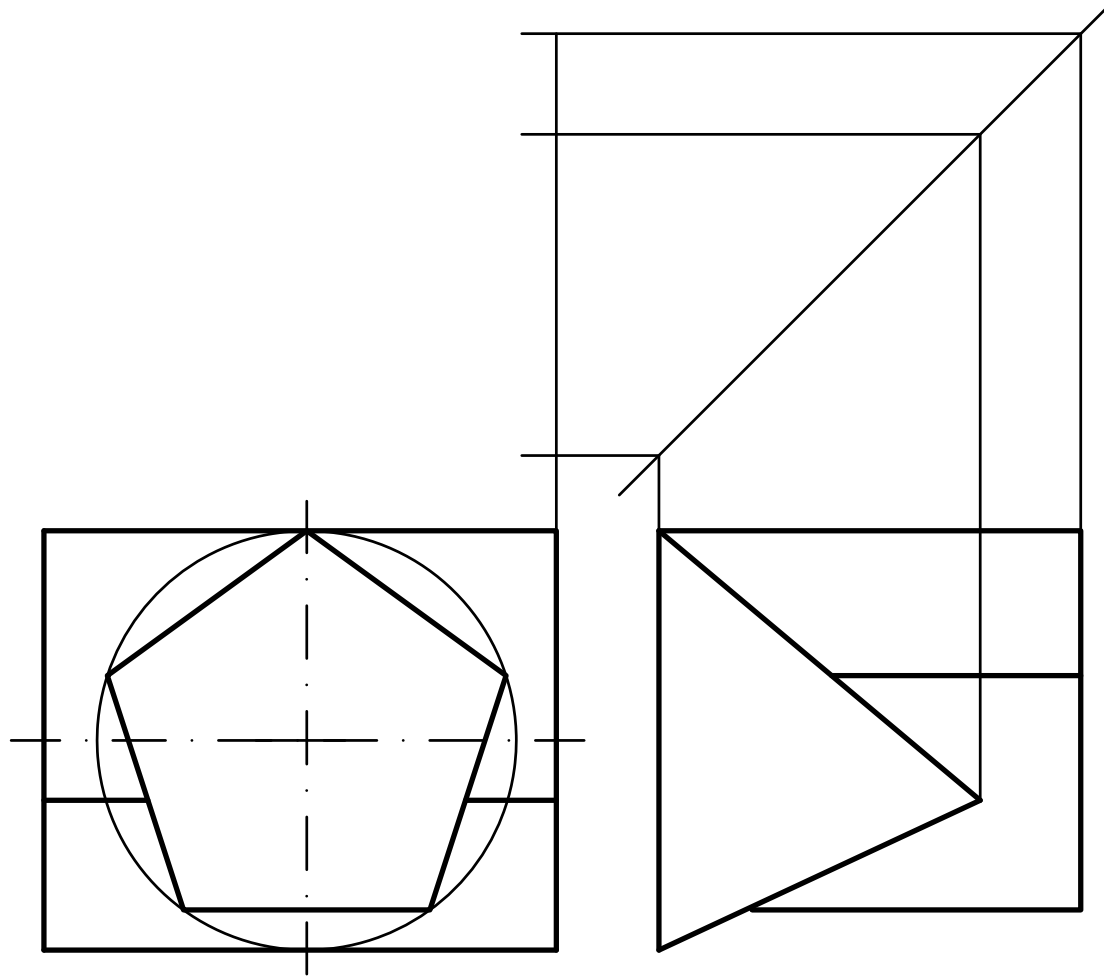
1. Решение задачи осуществляем по приведенному алгоритму.
2. Проводим плоскость Γ и определяем проекции вершин $1_1, 5_1, 4_1$ и $1_1^1, 5_1^1, 4_1^1$.
3. Проводим плоскость Γ^I и определяем проекции вершин 2_1 и 2_1^1 .
4. Проводим плоскость Γ^{II} и определяем проекции вершин 3_1 и 3_1^1 .
5. Соединяем проекции вершин $1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1, 1_1$ и $1_1^1, 2_1^1, 3_1^1, 4_1^1, 5_1^1, 1_1^1$.
6. Определяем видимость проекции линии пересечения на Π_1 : проекции звеньев ломаной $1_1, 5_1, 4_1$ и $1_1^1, 5_1^1, 4_1^1$ невидимы, так как принадлежат невидимой нижней грани призмы.



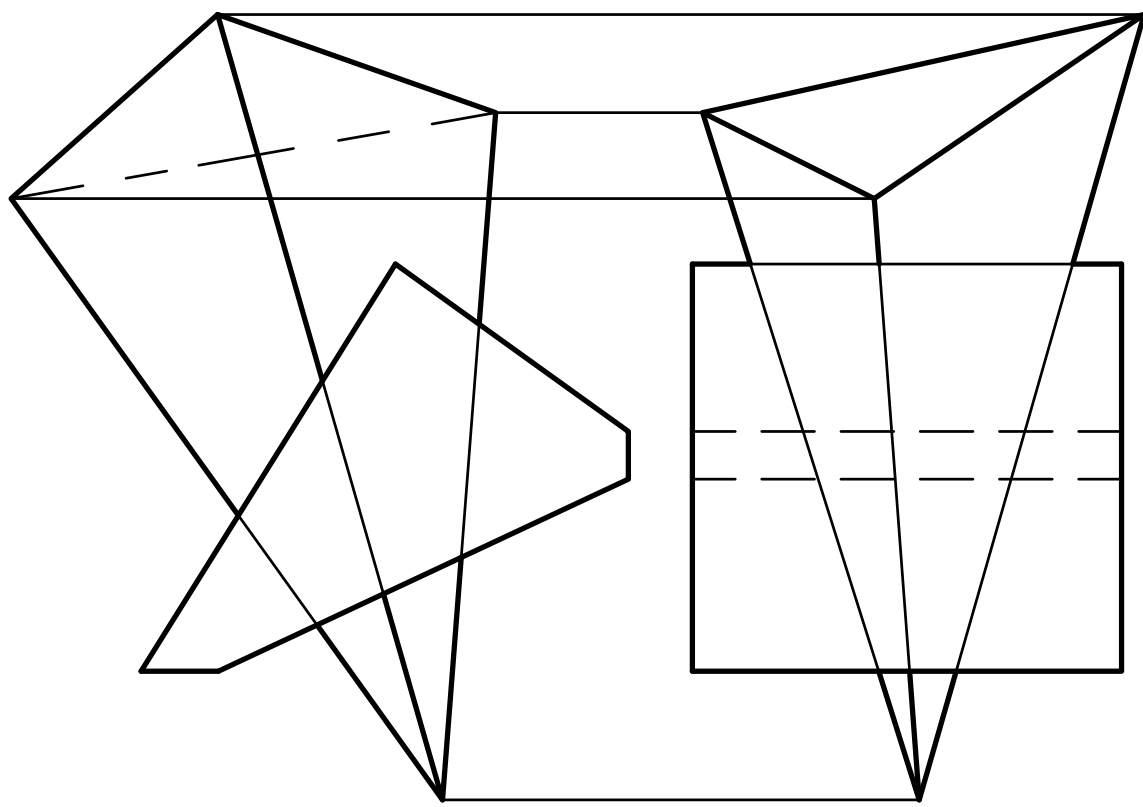
69. Построить проекции линии пересечения призмы и пирамиды.
Определить видимость проекций линии пересечения и проекций очерков поверхностей.
70. Построить проекции линии пересечения двух призм.
Определить видимость проекций линии пересечения и видимость проекций очерков поверхностей.



71. Построить проекции линии пересечения двух призм. Определить видимость проекций линии пересечения и видимость очерков поверхностей.



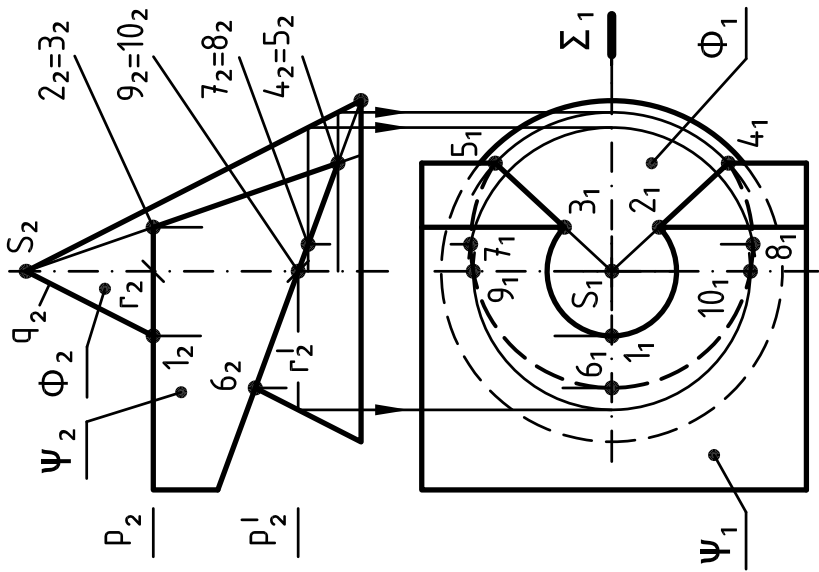
72. Построить проекции линии пересечения пирамиды и призмы. Определить видимость проекций линии пересечения и видимость проекций очерков поверхностей.



9.7. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННОЙ И КРИВОЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ. ВТОРАЯ ПОЗИЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Возможны два вида пересечения многогранной и кривой поверхностей: врезка и проникание. При врезке – линия пересечения представляет собою совокупность плоских кривых, каждая из которых есть результат пересечения кривой поверхности с одной из граней многогранника, при этом плоские кривые попарно пересекаются в точках пересечения ребер многогранника с кривой поверхности. В случае проникания – совокупность плоских кривых распадается на две и более части. Построение каждой из плоских кривых (в общем случае) выполняется в соответствии с основным способом построения линии пересечения кривой поверхности с плоскостью (гранью многогранника). Если одна из поверхностей является проектирующей (частный случай) – точки плоских кривых определяются из условия принадлежности другой, непроецирующей поверхности.

Пример. Построить линию пересечения конуса Φ и призмы Ψ .



1. Случай врезки. 2. Боковая поверхность призмы является проектирующей на плоскости проекций Π_2 . 3. Линия пересечения – совокупность дуг окружности (2-1-3), двух прямых (2-4, 3-5) и части эллипса (4-8-10-6-9-7-5). 4. Фронтальная проекция линии пересечения совпадает с фронтальной проекцией призмы ($1_2-2_2-4_2-6_2$).

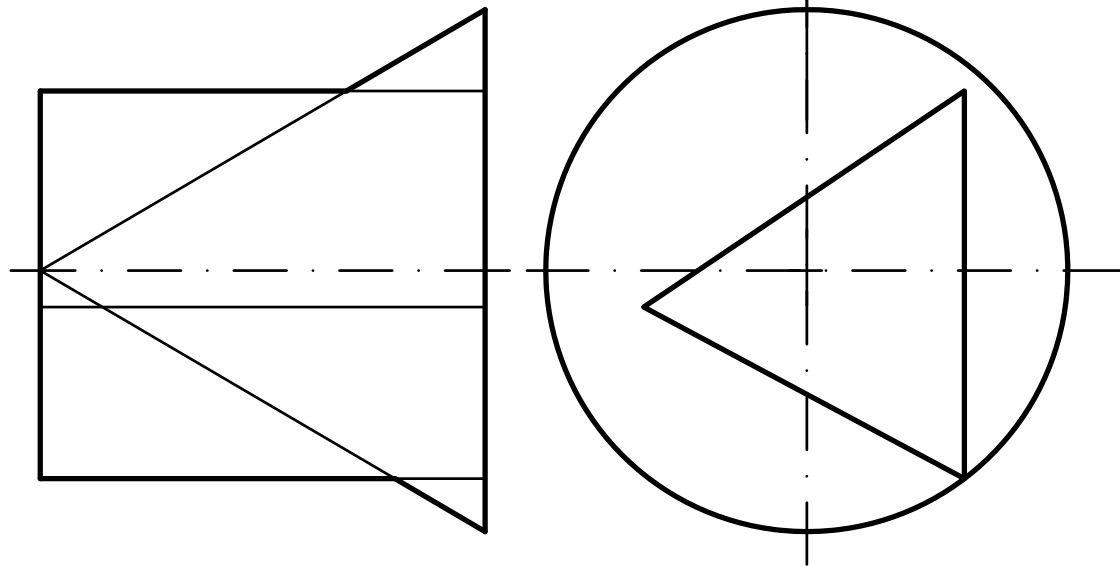
Анализ

Горизонтальную проекцию линии пересечения определяем из условия принадлежности точек поверхности конуса.

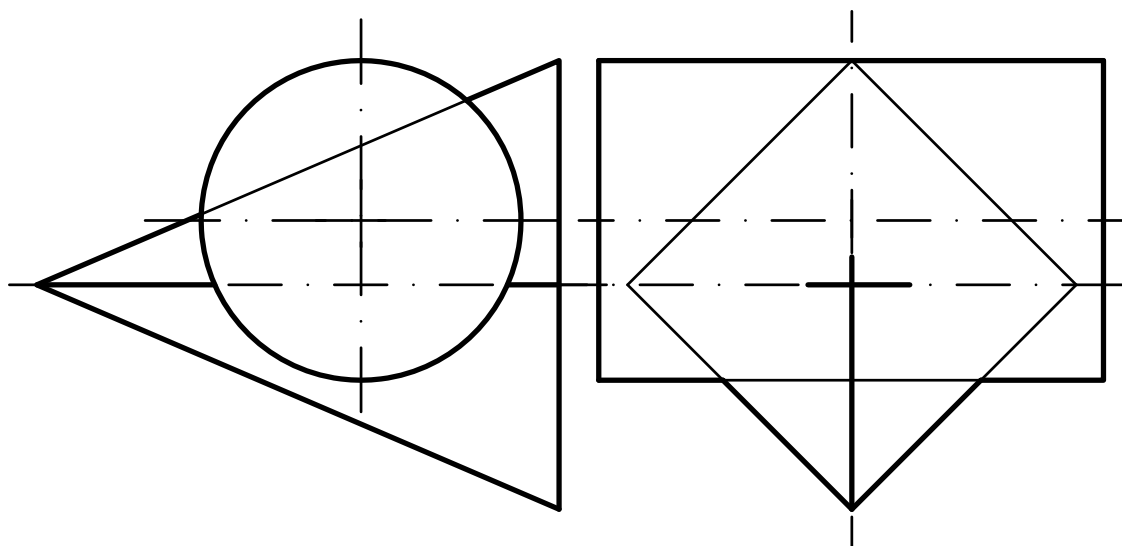
Решение

1. Решение задачи осуществляем по приведенному алгоритму.
2. Проекции точек 1_1 и 6_1 определяем по принадлежности образующей конуса.
3. Проекции точек $2_1, 3_1, 4_1, 5_1, 7_1, 8_1, 9_1$ и 10_1 определяем по принадлежности конусу с использованием параллелей соответствующего радиуса.
4. Найденные проекции точек $1_1 \dots 10_1$ соединяем последовательно с учетом их принадлежности одной и той же грани призмы.
5. Определяем видимость проекции линии пересечения на Π_1 : проекция эллипса $4_1 8_1 10_1 6_1 9_1 7_1 5_1$ невидима, так как принадлежит невидимой грани призмы.

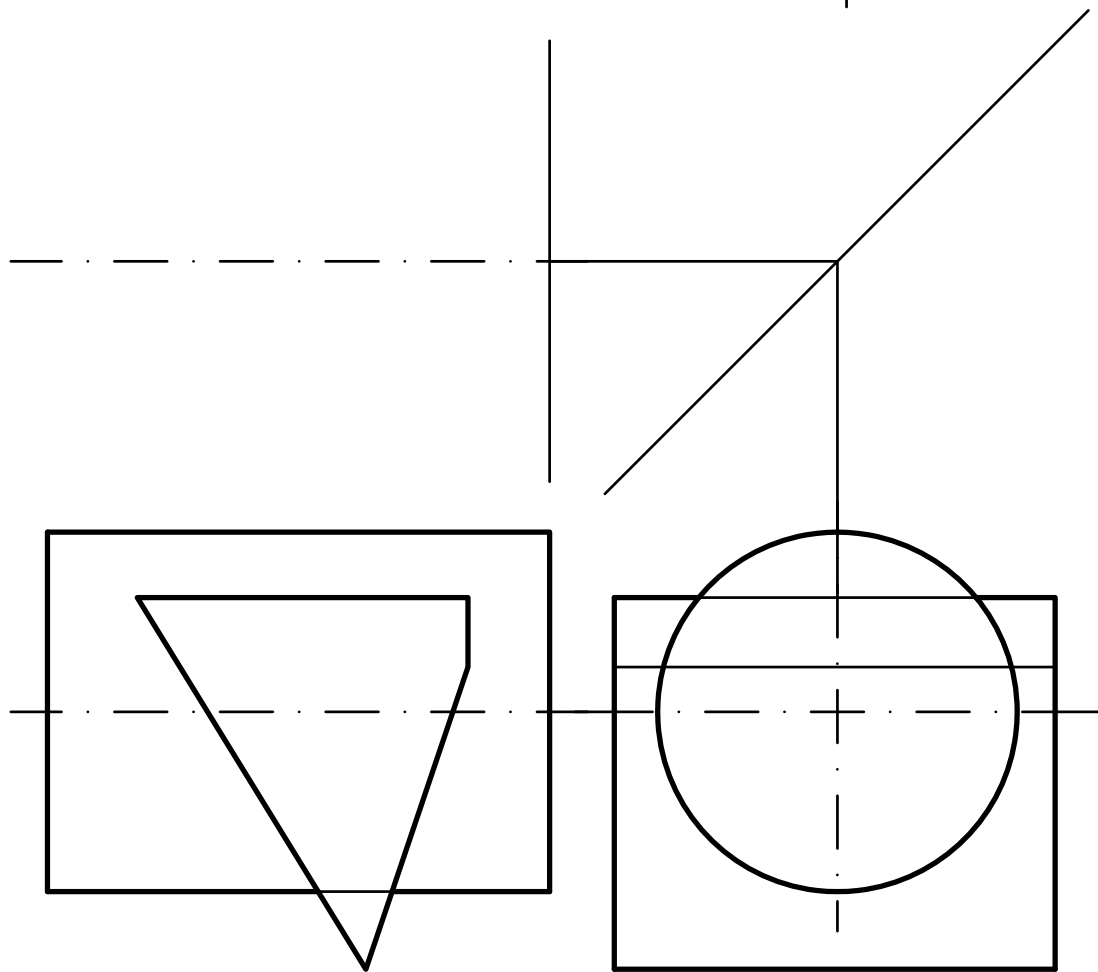
73. Построить проекции линии пересечения поверхностей конуса и призмы. Определить проекции опорных точек. Определить видимость проекций линии пересечения и видимость проекций очерков поверхностей.



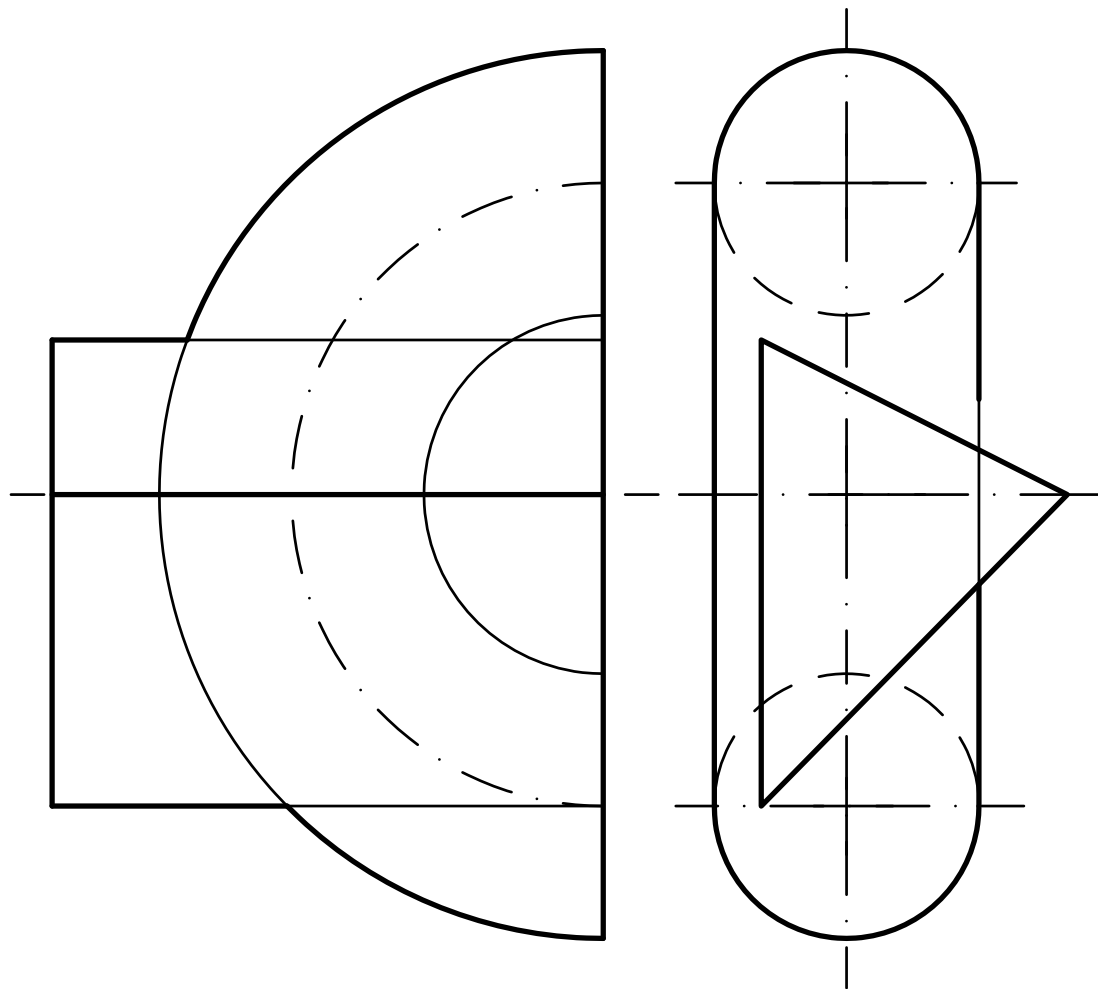
74. Построить проекции линии пересечения поверхностей цилиндра и пирамиды. Определить проекции опорных точек. Определить видимость проекций линии пересечения и видимость проекций очерков поверхностей.



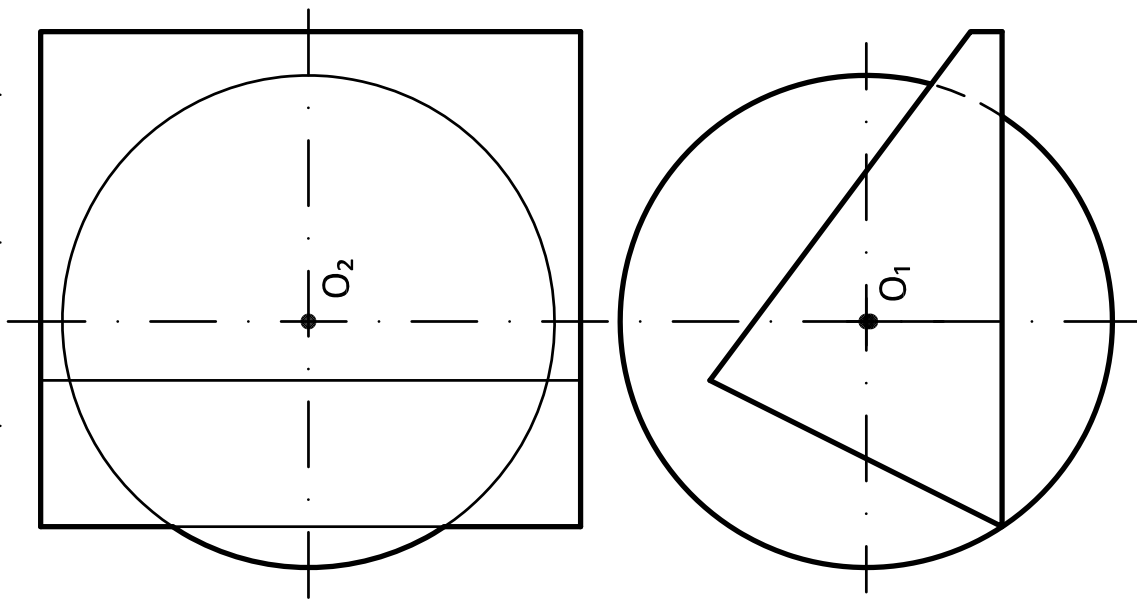
75. Построить проекции линии пересечения поверхностей цилиндра и призмы. Определить проекции опорных точек. Определить видимость проекций линии пересечения и видимость проекций очерков поверхностей.



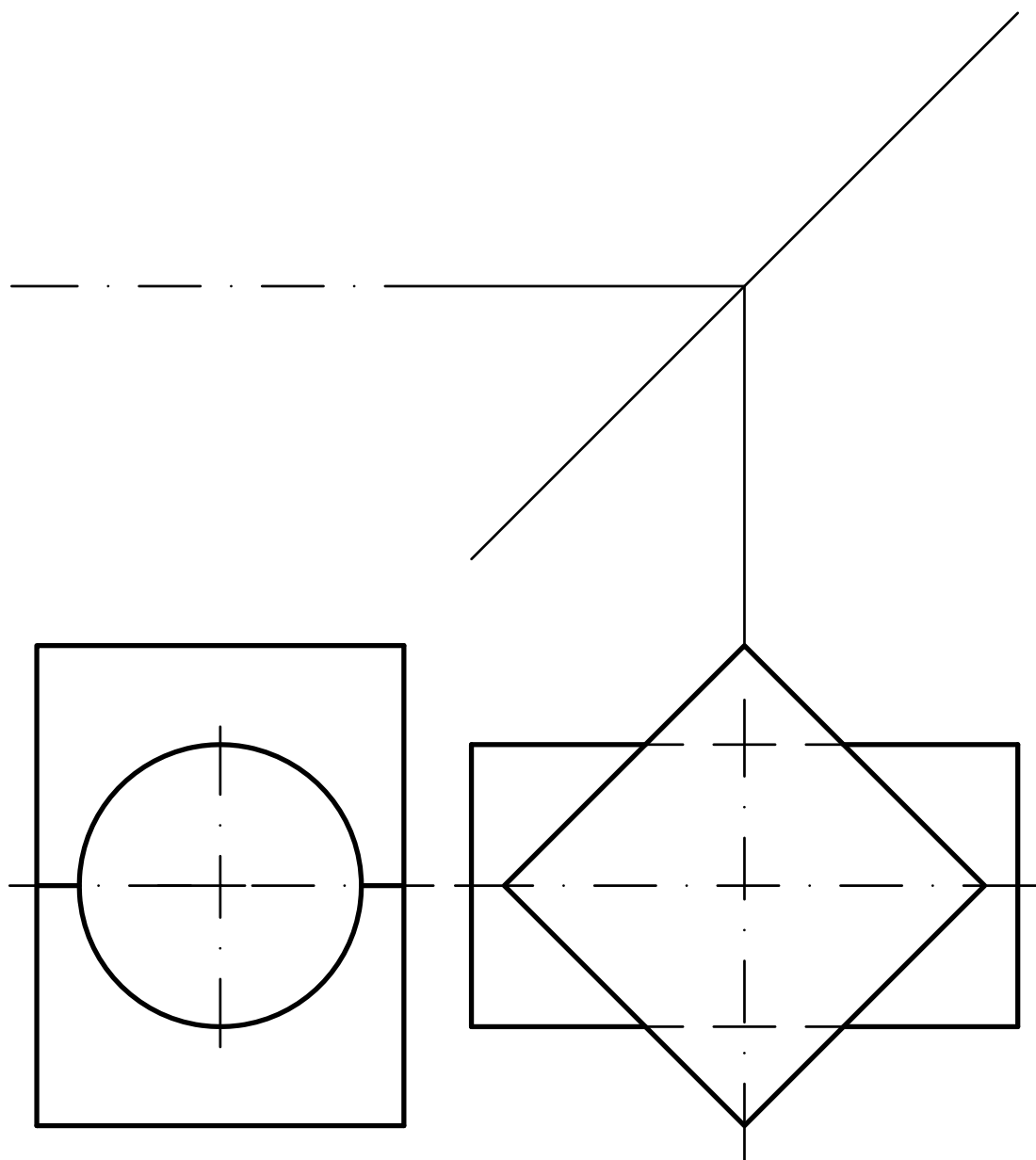
76. Построить проекции линии пересечения поверхностей тора и призмы. Определить проекции опорных точек. Определить видимость проекций линии пересечения и видимость проекций очерков поверхностей.



77. Построить проекции линии пересечения поверхностей сферы и призмы. Определить проекции опорных точек. Определить видимость проекций линии пересечения и видимость очерков поверхностей.

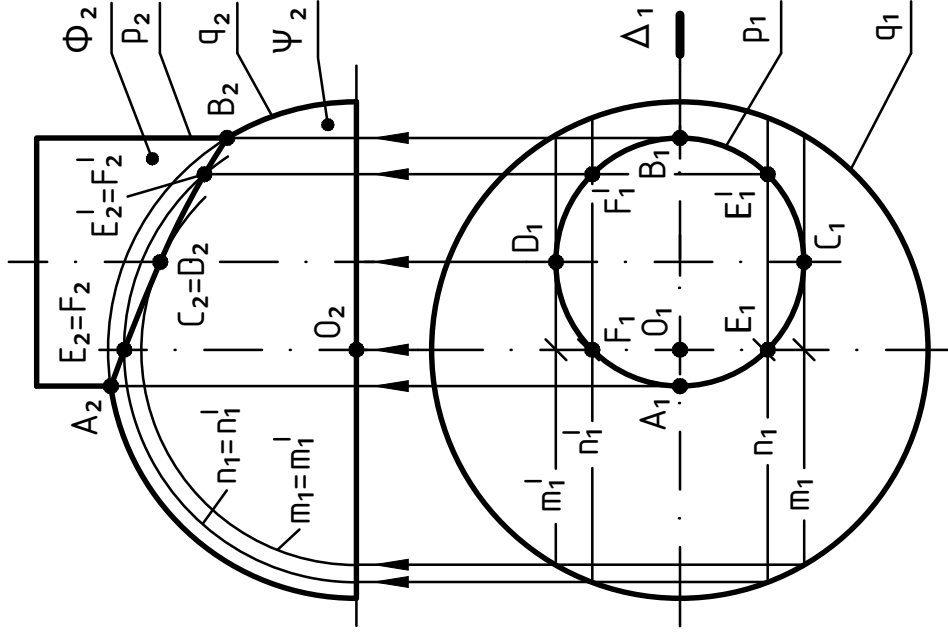


78. Построить проекции линии пересечения поверхностей цилиндра и четырехгранной призмы. Определить проекции опорных точек. Определить видимость проекций линии пересечения и видимость очерков поверхностей.

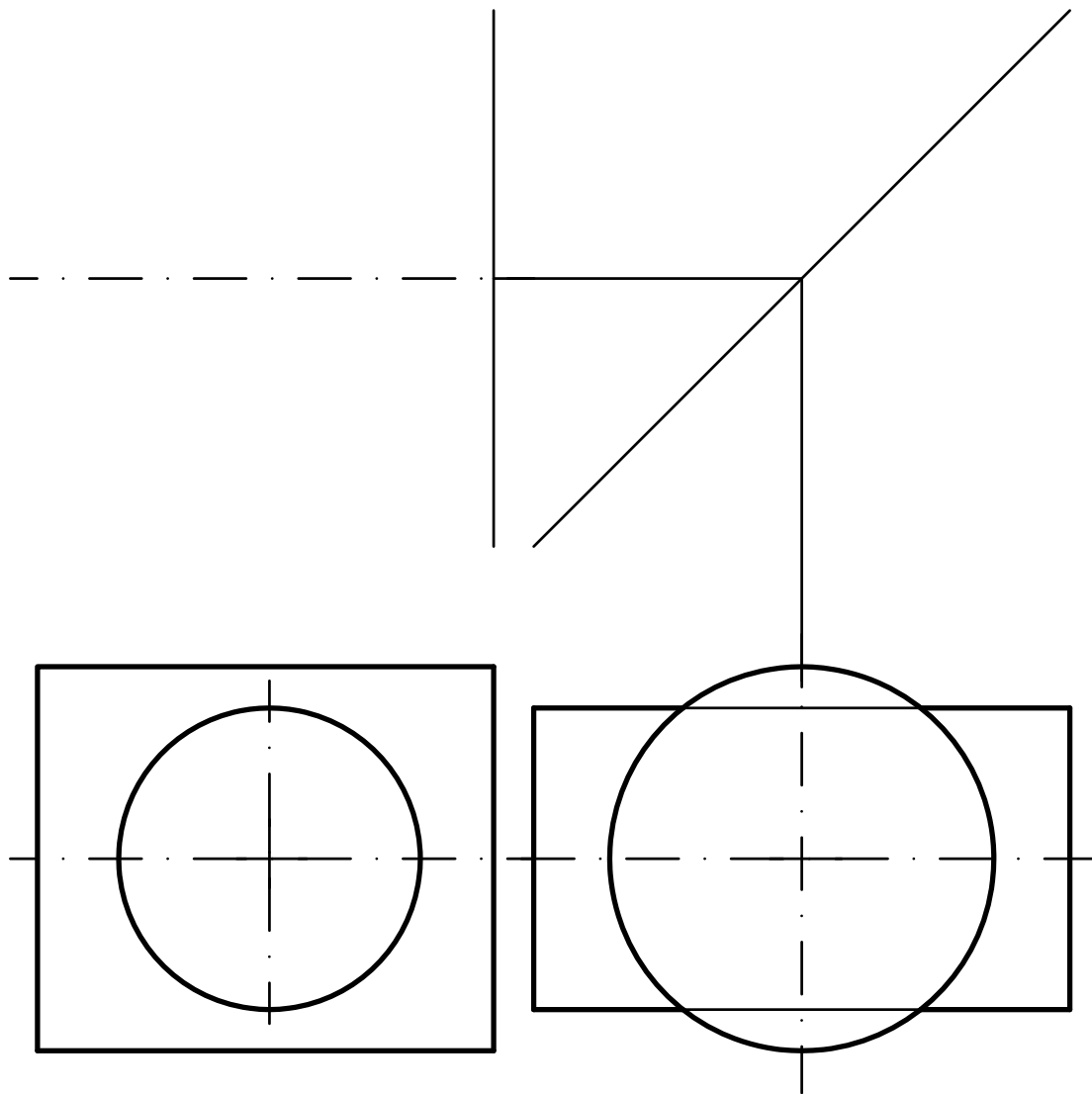


9.8. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ. ВТОРАЯ ПОЗИЦИОННАЯ ЗАДАЧА

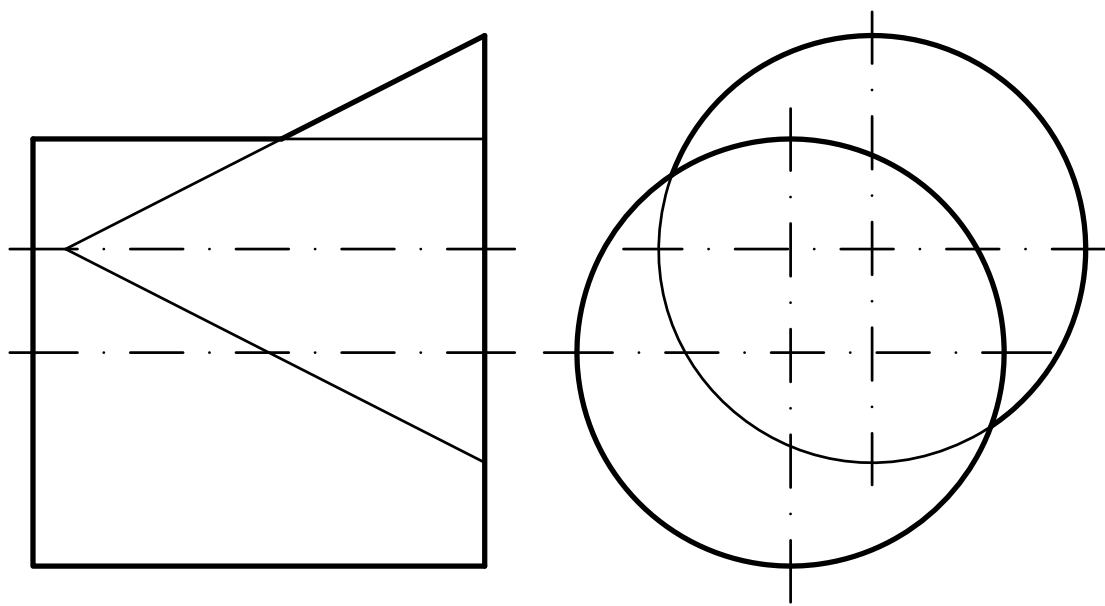
Возможны два вида пересечения двух кривых поверхностей: врезка и проникание. В общем случае (случай врезки) линия пересечения представляет собой пространственную кривую, которая может распадаться на две или более части (случай проникания). Экстремальные точки определяются с помощью общей плоскости симметрии поверхностей. Опорные и промежуточные точки определяются (в общем случае) с помощью вспомогательных поверхностей. Если одна из поверхностей является проецирующей (частный случай), то опорные и промежуточные точки определяются из условия принадлежности другой, непроекцирующей поверхности.



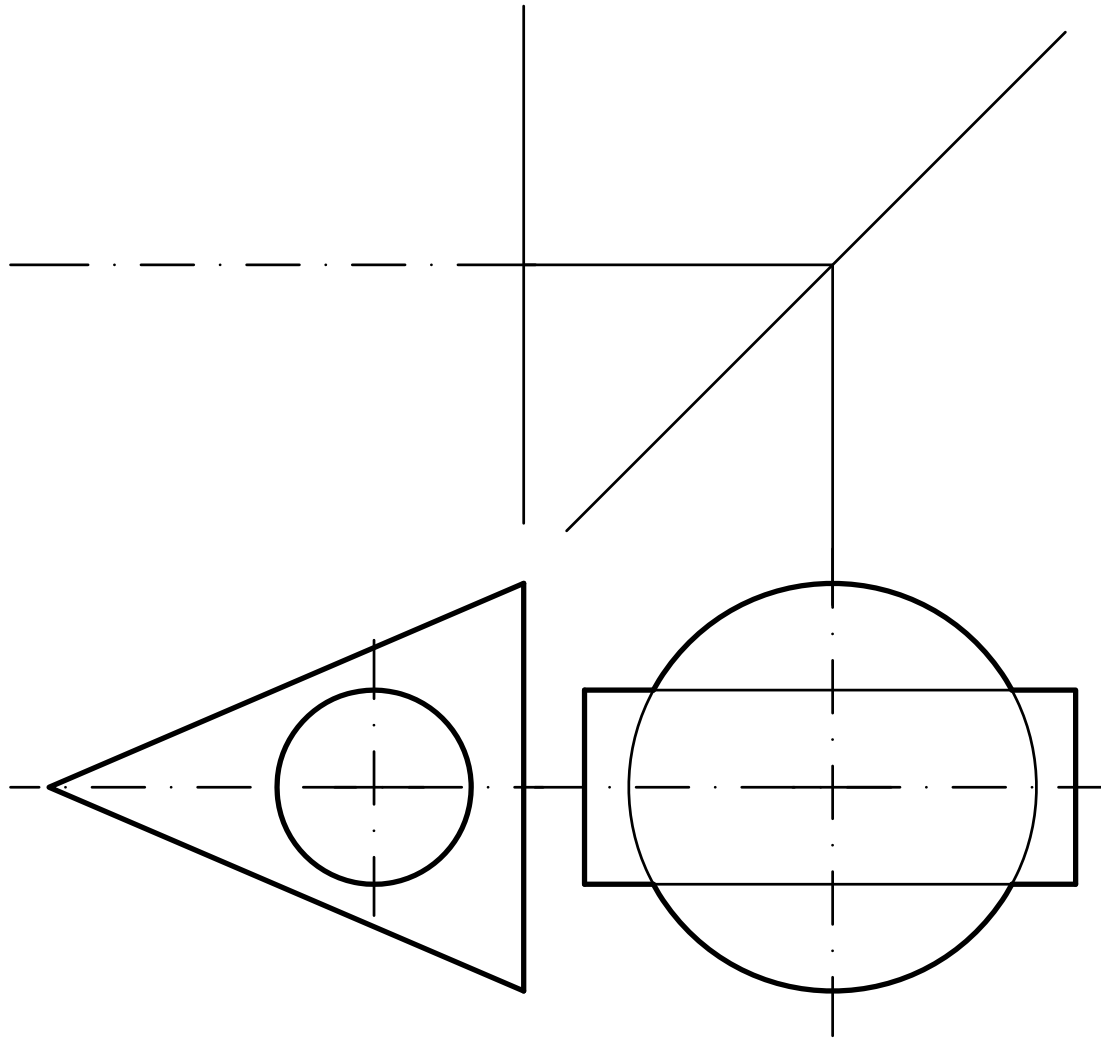
79. Построить проекции линии пересечения поверхностей двух цилиндров. Определить проекции опорных точек. Определить видимость проекций линии пересечения и видимость проекций очерков поверхностей.



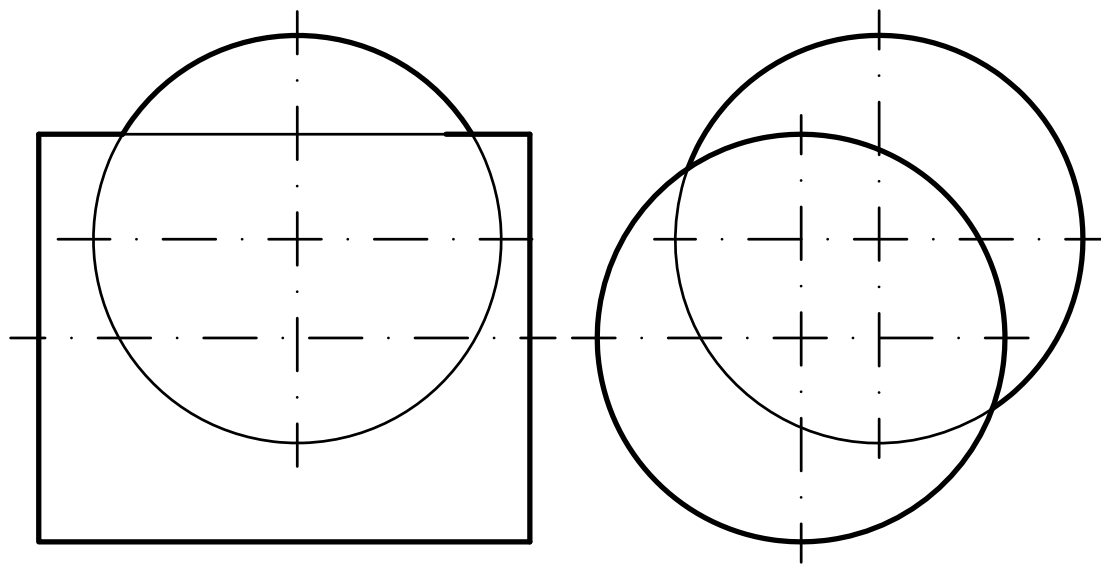
80. Построить проекции линии пересечения поверхностей цилиндра и конуса. Определить проекции опорных точек. Определить видимость проекций линии пересечения и видимость проекций очерков поверхностей.



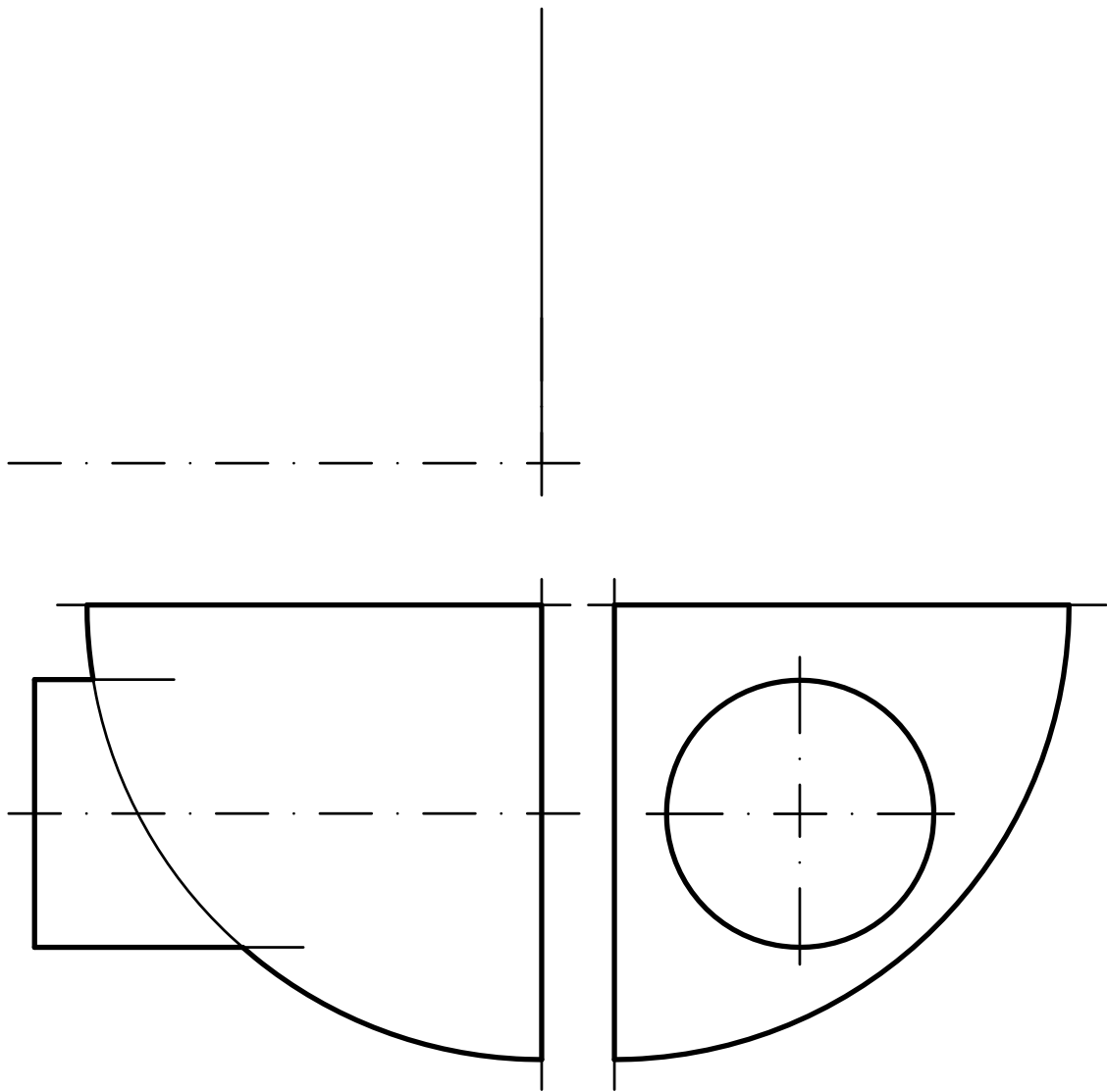
81. Построить проекции линии пересечения поверхностей цилиндра и конуса. Определить проекции опорных точек. Определить видимость проекций линии пересечения и видимость проекций очерков поверхностей.



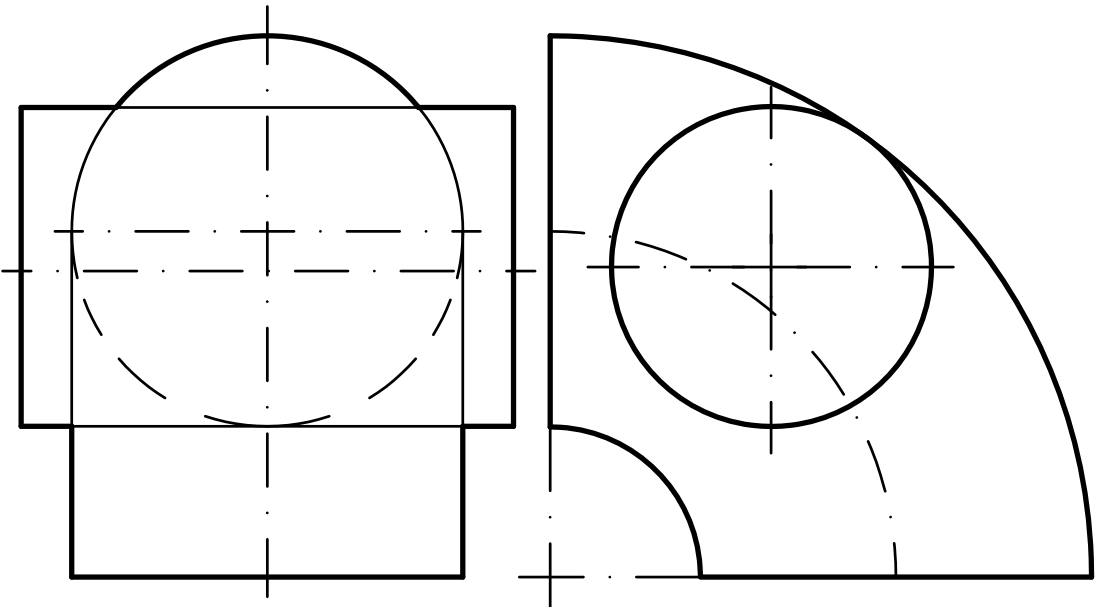
82. Построить проекции линии пересечения поверхностей цилиндра и сферы. Определить проекции опорных точек. Определить видимость проекций линии пересечения и видимость проекций очерков поверхностей.



83. Построить проекции линии пересечения поверхностей цилиндра и сферы. Определить проекции опорных точек. Определить видимость проекций линии пересечения и видимость проекций очерков поверхностей.



84. Построить проекции линии пересечения поверхностей цилиндра и тора. Определить проекции опорных точек. Определить видимость проекций линии пересечения и видимость проекций очерков поверхностей.



9.9. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ СПОСОБОМ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СЕКУЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ. ВТОРАЯ ПОЗИЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Если ни одна из двух пересекающихся кривых поверхностей не является проецирующей относительно какой-либо плоскости проекций, то для построения линии пересечения используется основной способ – способ вспомогательных поверхностей.

Пример

Построить линию пересечения двух поверхностей вращения: конуса Φ и полусферы Ψ .

Анализ

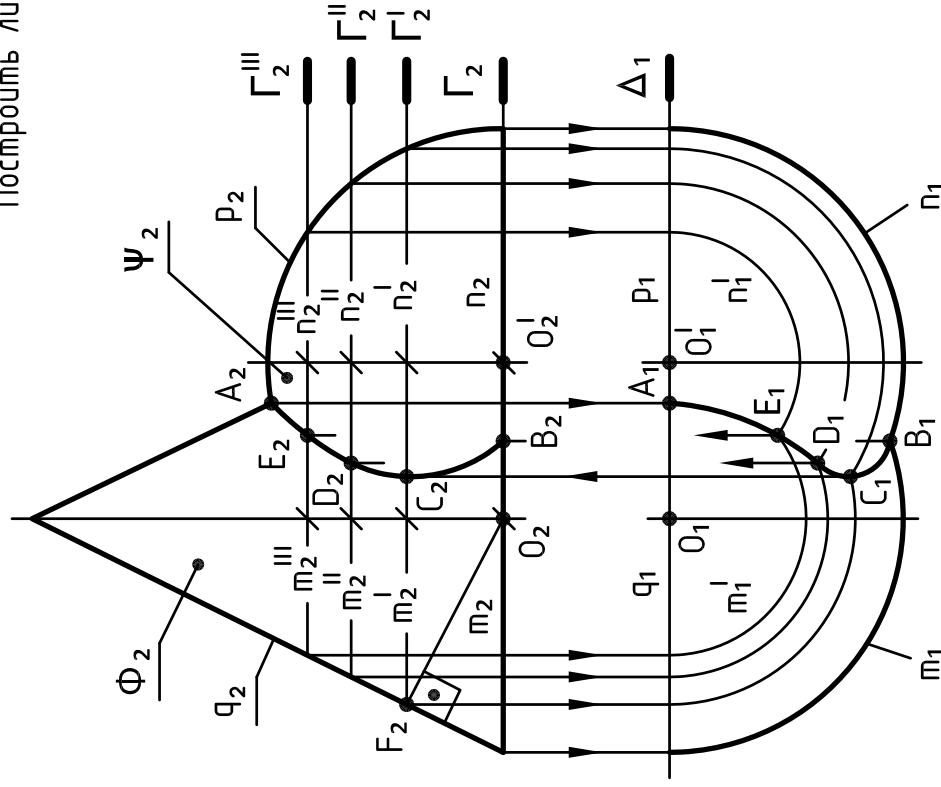
1. Случай врезки. 2. Линия пересечения пространственная кривая 4-го порядка. 3. Проецирующих поверхностей нет.

Алгоритм

1. Используем вспомогательные секущие плоскости.
2. Плоскость $\Delta \parallel \Pi_2$ пересекает поверхность по фронтальным очеркам q и p . В результате получаем очерковую на Π_2 точку A .
3. Плоскость $\Gamma \parallel \Pi_1$ пересекает поверхность по горизонтальным очеркам m и n . В результате получаем очерковые на Π_1 точки B и V .
4. Плоскость $\Gamma^I \parallel \Pi_1$ пересекает поверхность по окружностям. В результате получаем точки C и C^I .
5. Плоскости Γ^{II} и $\Gamma^{III} \parallel \Pi_1$ пересекают поверхность по окружностям. В результате получаем промежуточные точки D, D^I и E, E^I .

Решение

1. Решение задачи осуществляем по приведенному алгоритму.
2. Фронтальные проекции точек определяем по принадлежности соответствующим плоскостям $\Gamma, \Gamma^I, \Gamma^{II}, \Gamma^{III}$.
3. Найденные точки соединяем плавными кривыми.
4. Определяем видимость линии пересечения: на Π_1 – по плоскости Γ , на Π_2 – по плоскости Δ .

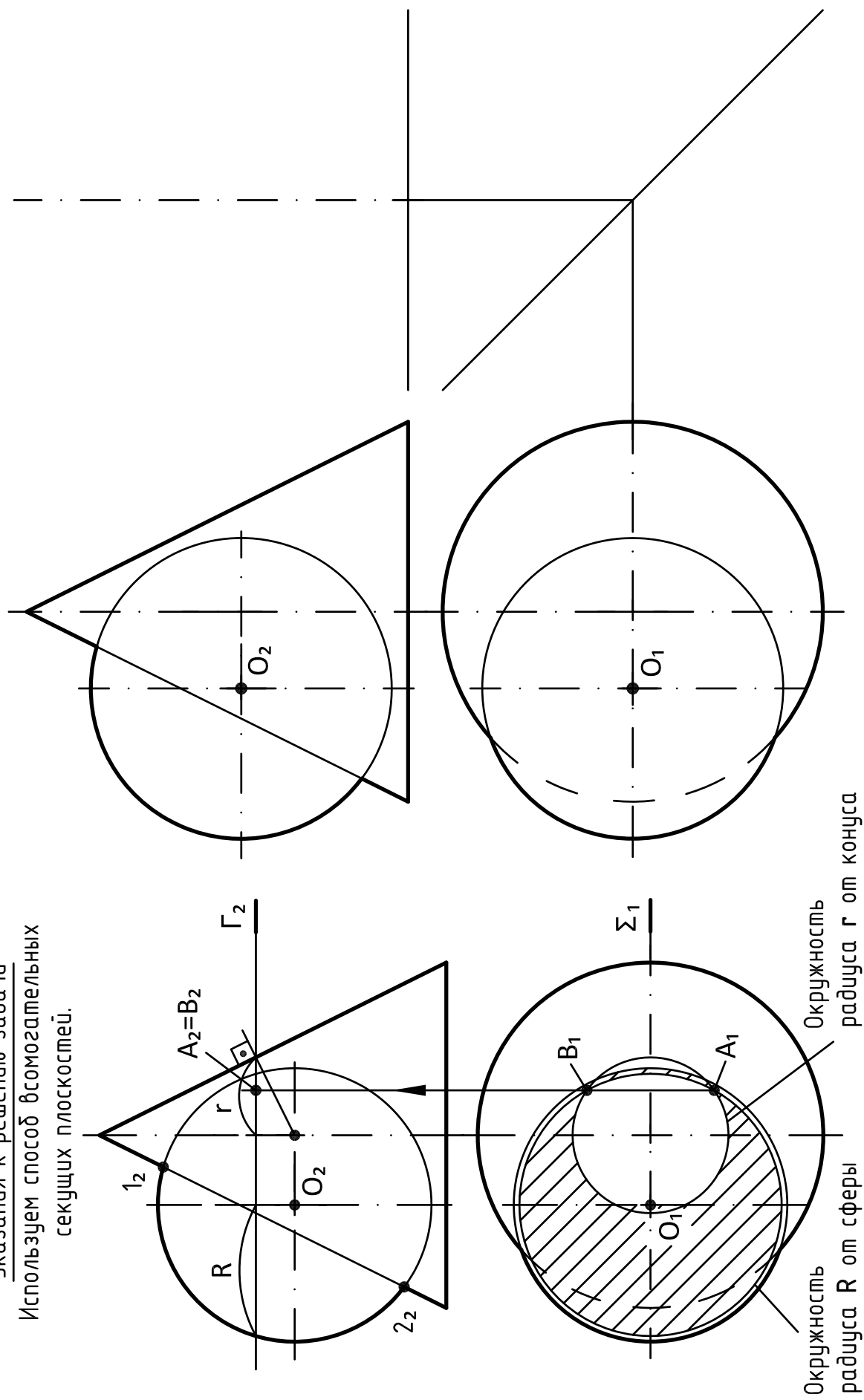


Симметричные точки не обозначены

85. Построить проекции линии пересечения поверхностей конуса и сферы. Определить проекции опорных точек. Определить видимость проекций линии пересечения и видимость проекций очертков поверхностей.

Указания к решению задачи

Используем способ вводящих плоскостей
секущих плоскостей.



Тема 10. ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Линия пересечения двух поверхностей второго порядка в общем случае представляет собой алгебраическую кривую четвертого порядка. В частных случаях она может распадаться на линии низших порядков, сумма которых равна четырем. Особый интерес представляют случаи ее распада на пару кривых второго порядка. Существует несколько теорем, определяющих условия такого распада. Рассмотрим одну из них – теорему Монжа.

Если две поверхности второго порядка описаны около третьей или вписаны в нее, то линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания.

Пример. Построить линию пересечения поверхностей вращения: конуса и цилиндра, описанных около одной и той же сферы.

На рис. 10.1 построена линия пересечения поверхностей конуса и цилиндра, описанных около одной и той же сферы. Сфера касается конической поверхности по окружности k , а поверхности цилиндра по окружности n .

Экстремальные (они же очерковые относительно Π_2) точки A, B, C, D найдены с помощью общей плоскости симметрии Γ_2 .

Согласно теореме Монжа искомая линия пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка – два эллипса AB и CD , плоскости которых проходят через прямую FE , соединяющую точки F и E пересечения окружностей касания k и n . На плоскость Π_2 эллипсы проецируются в прямые линии, а на Π_1 – в эллипсы.

Для определения видимости линий пересечения на горизонтальной проекции проведем секущую плоскость Γ'' (через ось цилиндра). Точки 3, 4 и 9, 10 служат границами раздела между видимой и невидимой частями линий пересечения. На фронтальной проекции невидимая

часть линии пересечения сливается с видимой. Промежуточные точки строим методом секущих вспомогательных плоскостей.

Полученные точки соединяем плавными линиями в определенной последовательности, учитывая при этом видимость отдельных участков линии пересечения.

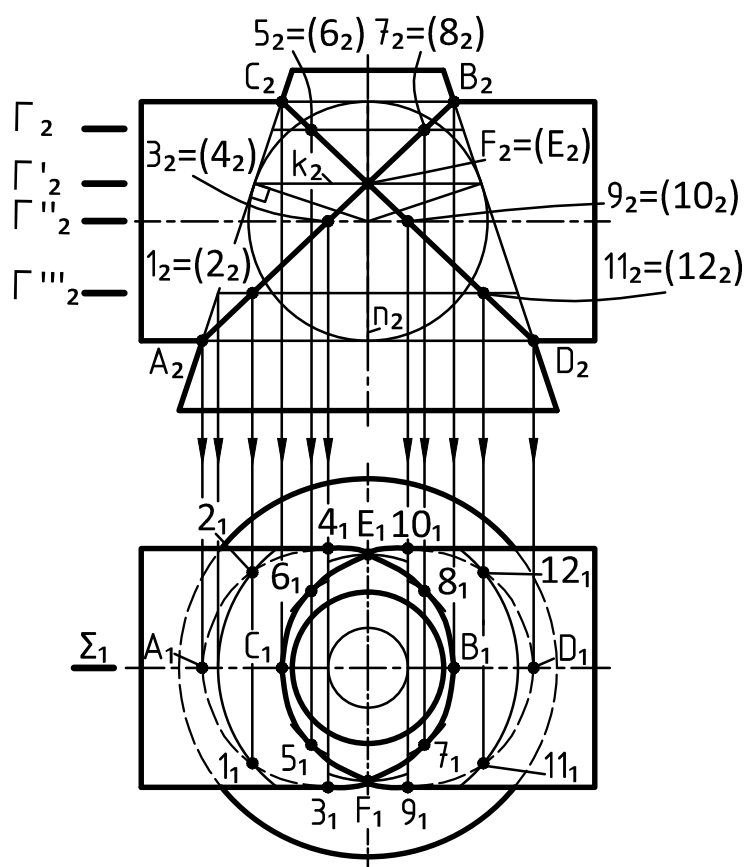
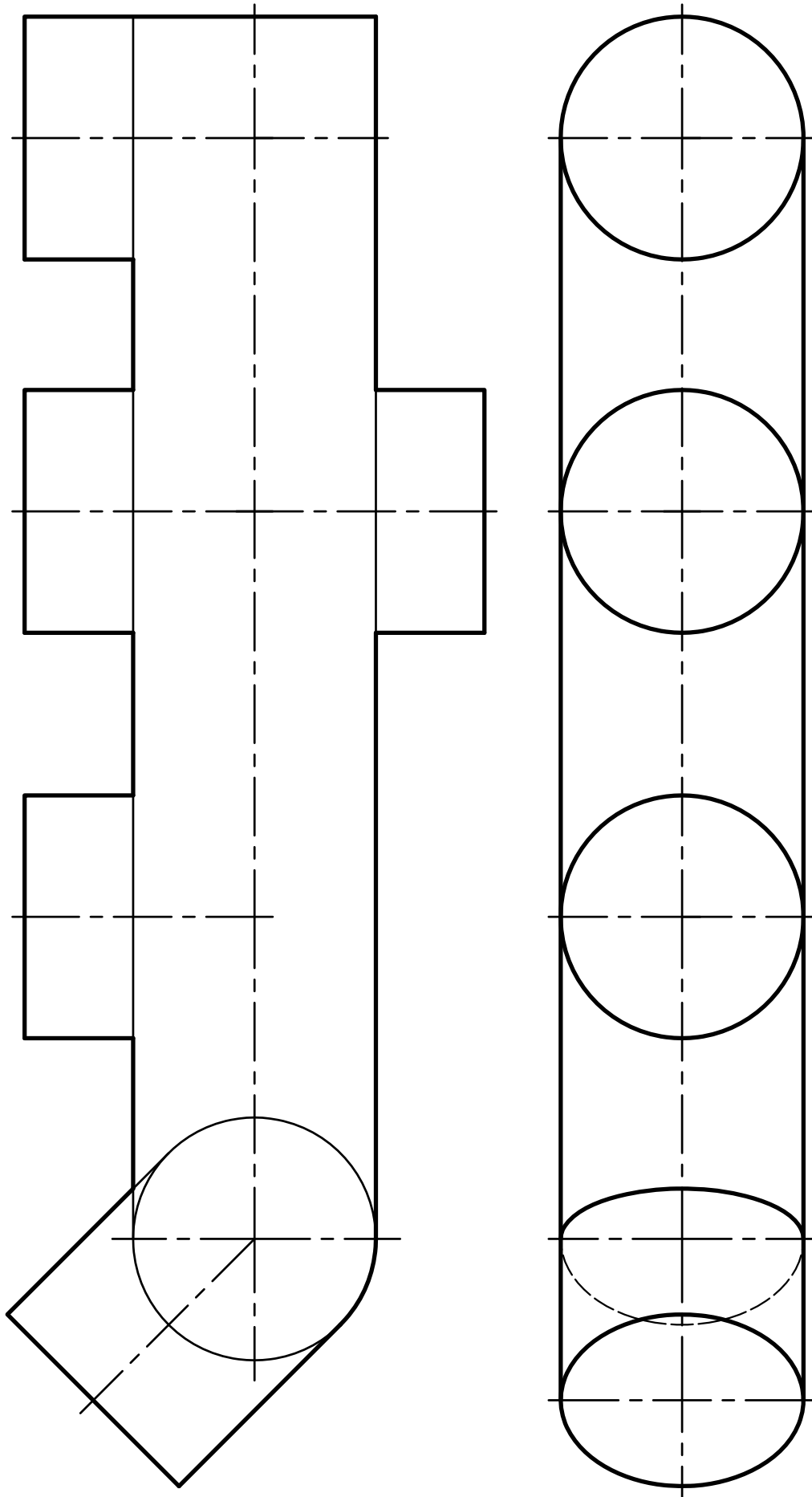
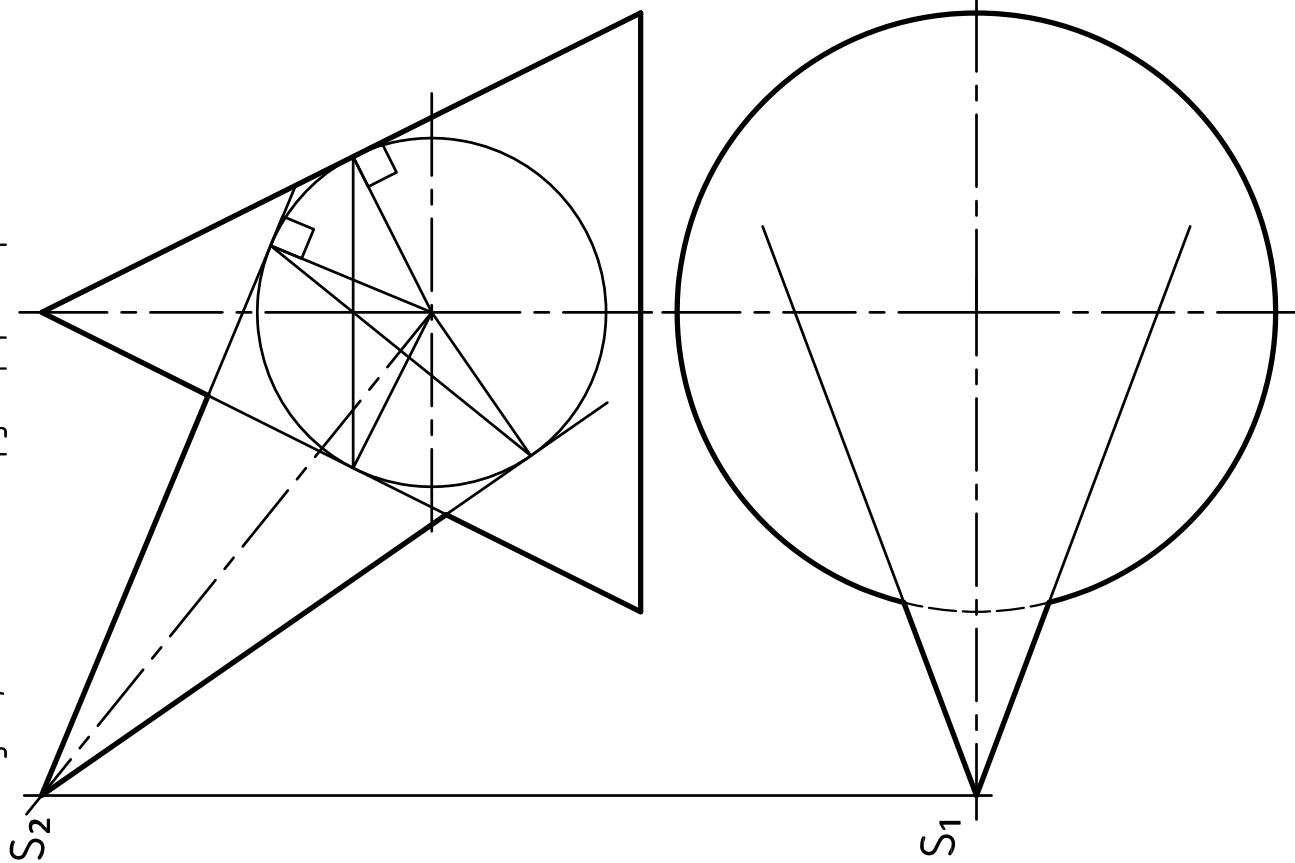


Рис. 10.1

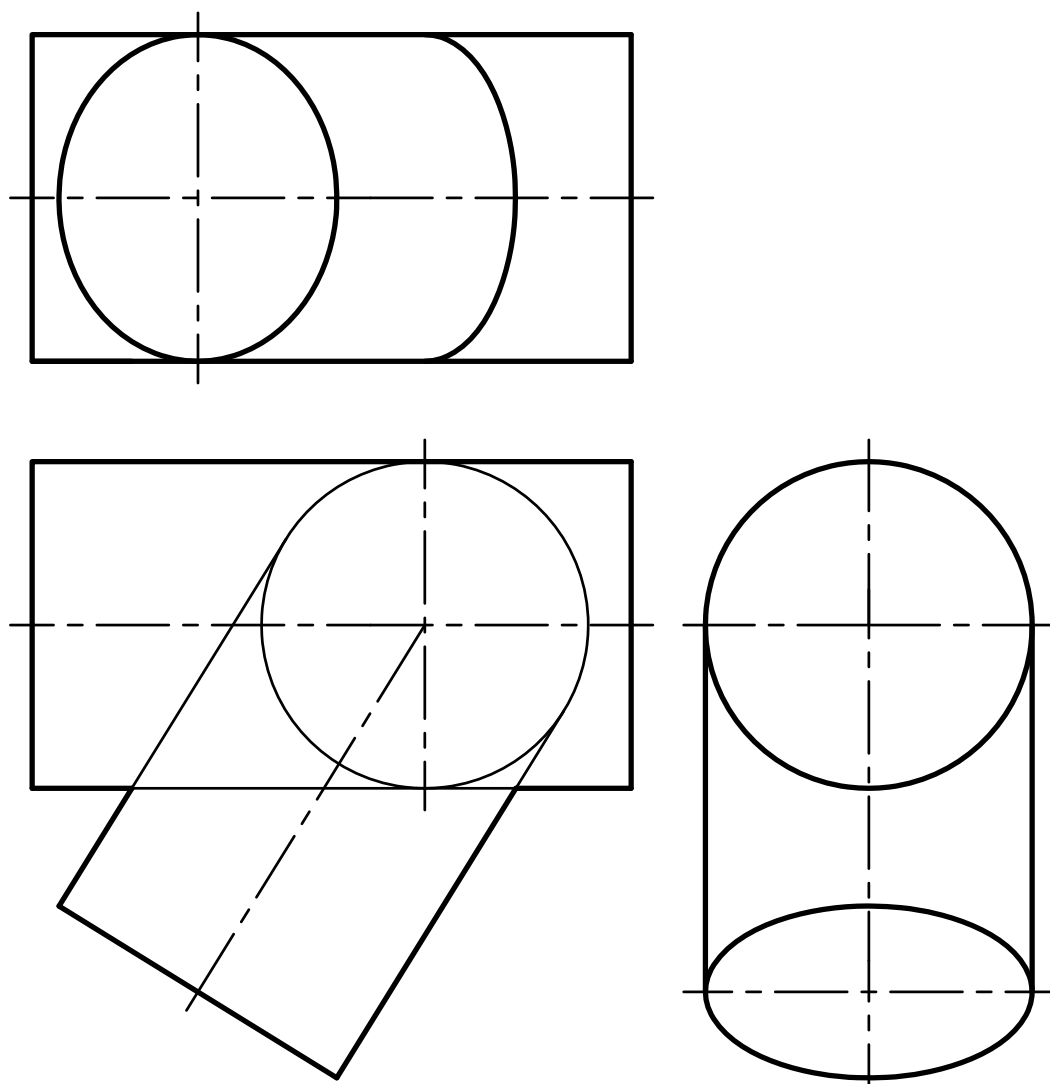
86. Построить линии пересечения заданных поверхностей. Определить видимость.



87. Построить линии пересечения поверхностей двух конусов, описанных вокруг сферы. Определить видимость.



88. Построить линии пересечения поверхностей двух цилиндров, описанных вокруг сферы. Построить профильную проекцию. Определить видимость.



Тема 11. СПОСОБ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СФЕР.

Для построения линии пересечения поверхностей вращения, имеющих круговые сечения, в ряде случаев в качестве вспомогательных поверхностей целесообразно использовать сферы. Их применение основано на свойстве соосных поверхностей вращения пересекаться по окружностям.

Соосными называются поверхности вращения, имеющие общую ось вращения. Соосные поверхности вращения всегда пересекаются по окружностям, плоскости которых перпендикулярны оси вращения. Количество окружностей равно числу точек пересечения, описывающих поверхности меридианов, расположенных в одной осевой плоскости и по одну сторону от оси вращения. Этим общим для обеих поверхностей окружностям столько, сколько существует точек пересечения очерковых линий поверхностей.

Рассмотрим две соосные поверхности вращения (конус и сфера), имеющие общую ось (рис.11.1). Точки 1,2,3,4 пересечения образующих заданных поверхностей принадлежат одновременно образующим той и другой поверхности вращения. При образовании поверхностей эти точки описывают окружности, которые на Π_2 проецируются в отрезки прямых.

Особенности пересечения соосных поверхностей вращения позволяют в качестве вспомогательных поверхностей при построении линии их пересечения использовать сферы, соосные с данными поверхностями. Вспомогательная сфера пересекает каждую из заданных поверхностей по окружности. На плоскость проекций, параллельную осям вращения поверхностей, эти окружности будут проецироваться в отрезки прямых. При пересечении этих прямых получают точки, принадлежащие искомой линии пересечения.

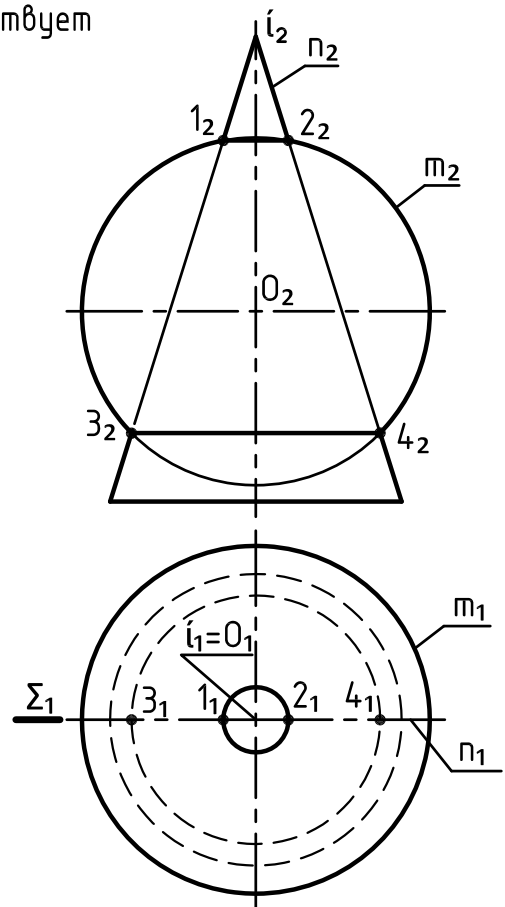


Рис. 11.1

СПОСОБ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР.

Если оси поверхностей пересекаются, то вспомогательные сферы проводят из одного центра (точка пересечения осей), а линию пересечения строят способом концентрических сфер. Для использования этого способа необходимо выполнение следующих условий:

- а) обе заданные поверхности – поверхности вращения;
- б) оси этих поверхностей пересекаются;
- в) заданные поверхности имеют общую плоскость симметрии.

При этом минимальный радиус $|R_{\min}|$ равен радиусу наибольшей из сфер, вписанных в эти поверхности, а максимальный $|R_{\max}|$ определяется расстоянием от центра сферы до наиболее удаленной точки пересечения очерковых образующих.

Пример 1. Построить линию пересечения двух поверхностей вращения: конуса Φ и сферы Ψ , имеющих общую плоскость симметрии Σ (рис. 11.2).

Оси конуса и цилиндра пересекаются, поэтому применяем способ концентрических сфер с центром в точке O .

1) Очерковые точки A и B относительно Π_2 (они же высшая и низшая) определены с помощью общей плоскости симметрии $\Sigma \parallel \Pi_2$.

2) Для выявления видимости искомой линии пересечения относительно плоскости Π_1 , нанесём плоскость симметрии сферы (Δ_2), проходящую через её экватор d . Плоскость Δ пересекает конус по окружности f , а сферу по экватору d , которые дают, пересекаясь между собой, точки смены видимости C и D .

3) $R_{\max}$ определяется расстоянием от центра O до наиболее удалённой точки B ($R_{\max} = O_2B_2$).

4) $R_{\min}$ определяется как радиус сферы, касающейся поверхности конуса (по окружности p_2) и пересекающей сферу (по окружности k_2). Плоскости окружностей p и k проецируются в отрезки прямых, при пересечении которых получают точки F и G , принадлежащие искомой линии пересечения.

5) С помощью сферы радиусом R' определяют точки линии пересечения, принадлежащие профильному меридиану сферы.

С помощью сфер с радиусами $R_{\min} < R < R_{\max}$ можно определить сколько угодно промежуточных точек линии пересечения. Горизонтальные проекции точек строят по принадлежности параллелям конуса.

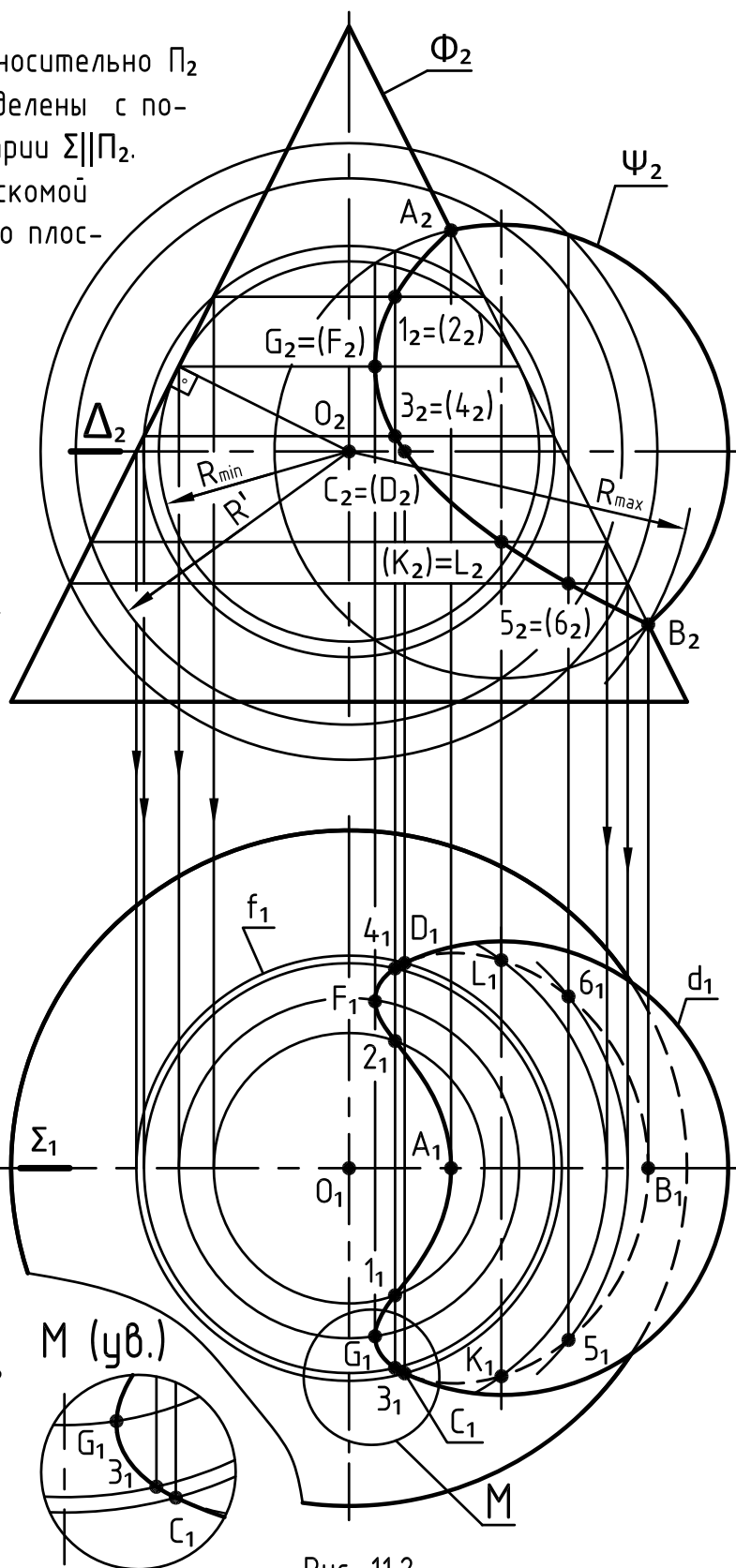


Рис. 11.2

Полученные точки соединяют плавной линией с учетом видимости.

СПОСОБ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР.

Если оси поверхностей вращения не пересекаются, но лежат в одной плоскости, то в этом случае используется способ эксцентрических сфер.

Пример 2. Построить линию пересечения конуса вращения Φ и части тора Ψ , имеющих общую фронтальную плоскость симметрии Σ (рис. 11.3).

Линией пересечения тора и конуса вращения является пространственная кривая 8-го порядка. Оси поверхностей не пересекаются, поэтому способ концентрических сфер применить нельзя. Обе поверхности имеют общую плоскость симметрии Σ , параллельную фронтальной плоскости проекций, в которой расположены ось конуса и линия центров тора.

Построение линии пересечения начнем с определения опорных точек. Это экстремальные точки A и B (удаленные на максимальное и минимальное расстояния от плоскостей проекций) и точки, расположенные на очерковых образующих поверхностей, которые определяют границы видимости проекций кривой (см. рис. 11.3). После этого определим произвольные (промежуточные) точки линии пересечения поверхностей.

Проведем через ось тора произвольную плоскость Δ , которая пересечет тор по окружности радиусом $m/2$. Из центра C восстановим перпендикуляр к плоскости окружности. Центр вспомогательной сферы будет находиться в точке O пересечения проведенного перпендикуляра n с осью конуса. Опишем из этого центра сферу такого радиуса R , чтобы она пересекала тор по окружности m . Эта сфера пересечет поверхность конуса по окружности k . На пересечении окружностей m и k получим пару точек 1 и 2 линии пересечения поверхностей.

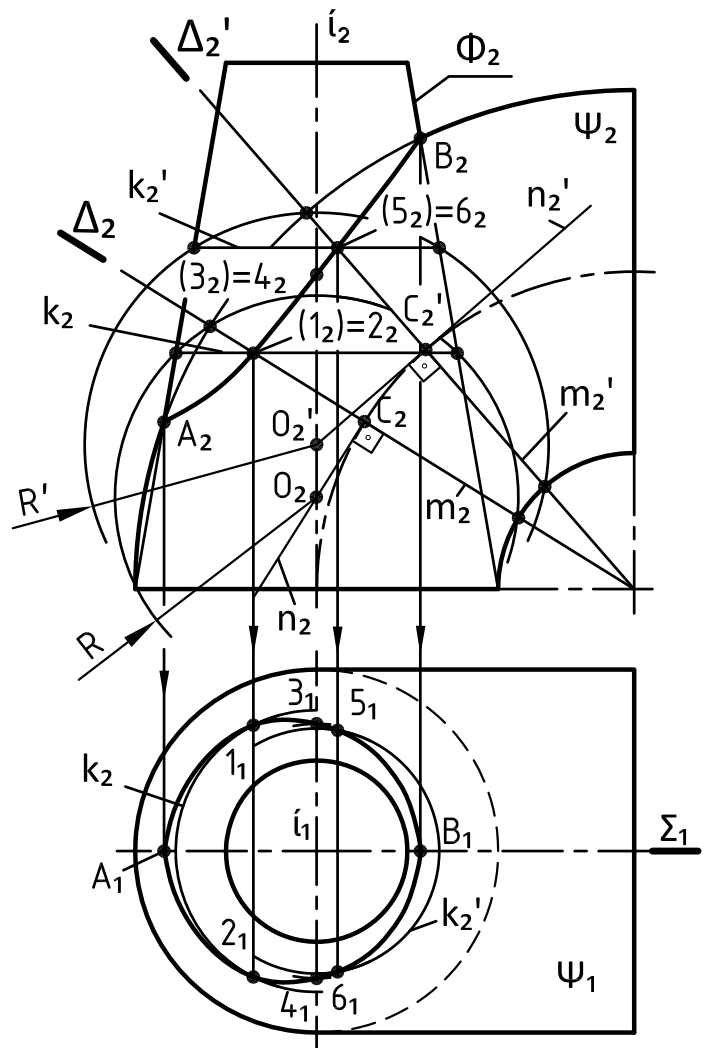


Рис. 11.3

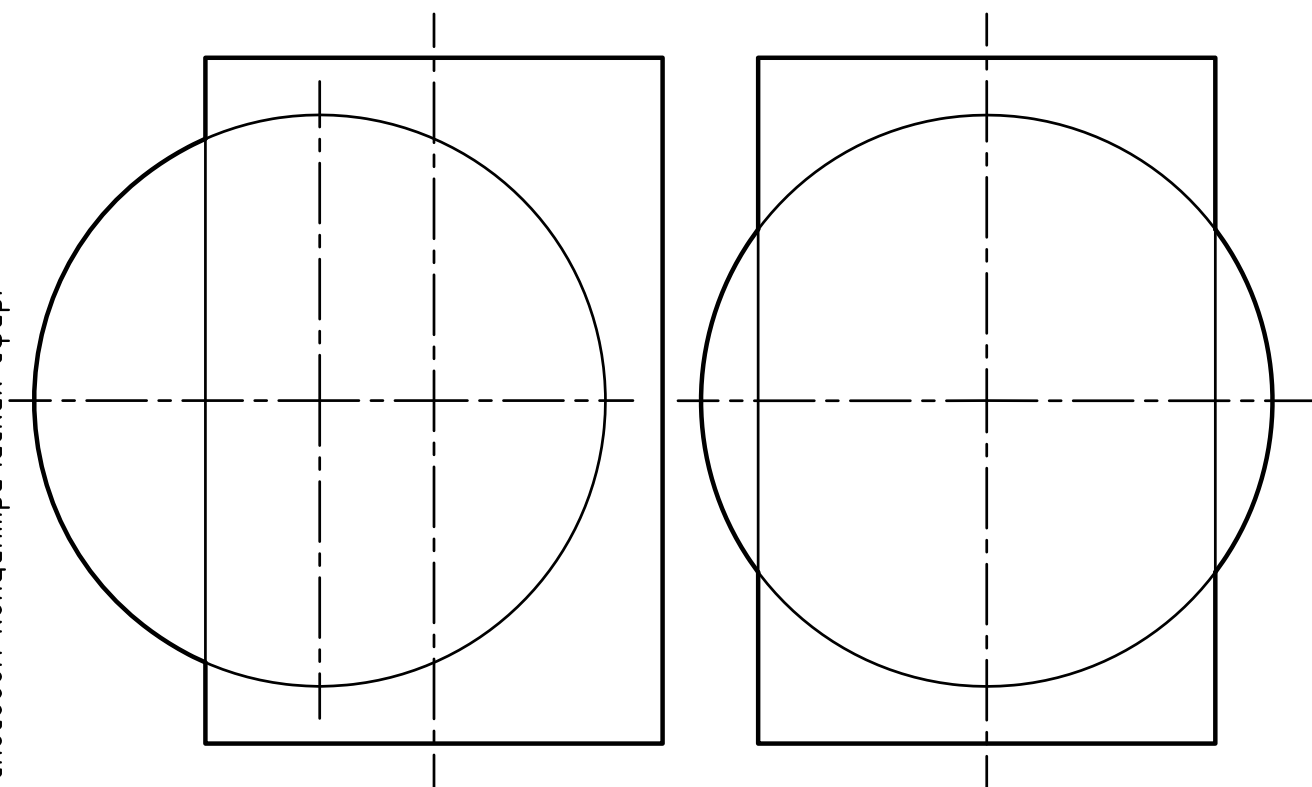
Для определения горизонтальных проекций точек линии пересечения используем параллели конуса, являющиеся графически простыми линиями (окружностями).

Для нахождения дополнительных точек нужно провести новые круговые сечения плоскостями на поверхности тора и построить необходимое количество точек.

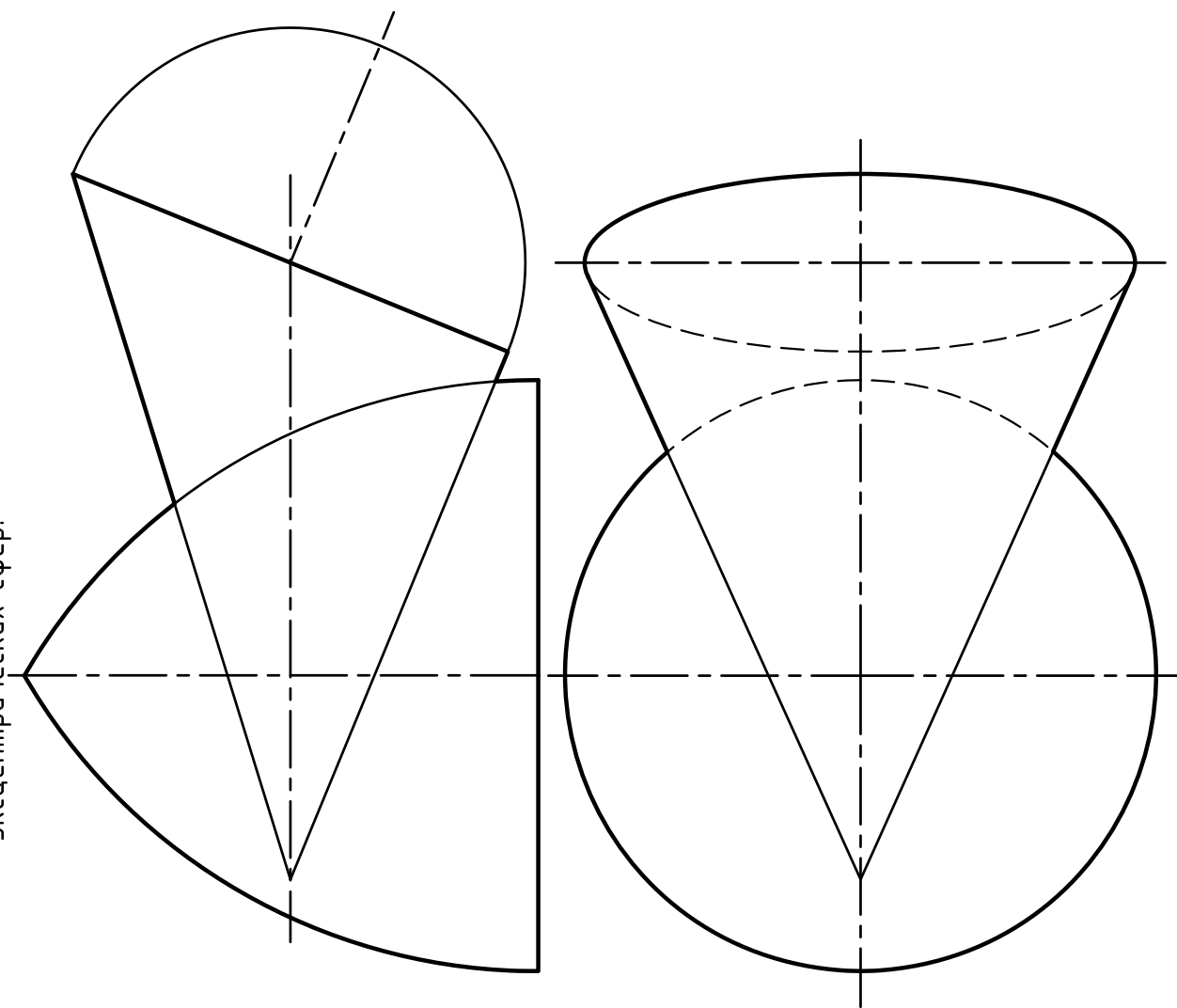
Полученные точки соединяют плавной кривой с учетом видимости.

Точки 3 и 4 выделены после построения линии пересечения.

89. Построить линию пересечения сферы и цилиндра способом концентрических сфер.



90. Построить линию пересечения поверхности вращения с поверхностью эллиптического конуса способом эксцентрических сфер.



Тема 12. ПОСТРОЕНИЕ РАЗВЕРТОК ПОВЕРХНОСТЕЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

Построение разверток является важной практической задачей, что связано с изготовлением множества изделий из листового материала в теплотехнике, теплоэнергетике, котлостроении (резервуары, трубы, переходники и т.п.).

Разверткой называется плоская фигура, в которую преобразуется поверхность предмета при ее совмещении с плоскостью. При этом подразумевается, что поверхность – это гибкая, но нерастяжимая и несжимаемая пленка и при ее развертке не происходит разрывов и образования складок. Поверхности, которые допускают такое преобразование, называются развертываемыми.

К развертываемым поверхностям относятся многогранники, некоторые линейчатые поверхности – цилиндрические, конические.

Развертки можно построить точные и приближенные.

Точные развертки можно строить для гранных поверхностей призмы и пирамиды, для прямых круговых цилиндров и прямых круговых конусов.

Развертки, которые можно построить графически, заменяя (аппроксимируя) заданные поверхности участками развертываемых призматических, пирамидальных или цилиндрических поверхностей, называются приближенными. К поверхностям, развертку которых можно построить приближенно, относятся круговые наклонные конусы, эллиптические цилиндры с круговыми сечениями, сферические, торовые, а также комбинированные поверхности, участки которых состоят из развертываемых поверхностей.

Каждой точке на поверхности соответствует единственная точка на развертке, т.е. между поверхностью и ее разверткой существует взаимно однозначное соответствие, которое обладает следующими основными свойствами:

- а) длины соответствующих линий на поверхности и на развертке равны;
- б) линии, параллельные на поверхности, сохраняют параллельность на развертке;
- в) углы между соответствующими пересекающимися линиями на поверхности и на развертке равны;
- г) площади соответствующих фигур на поверхности и на развертке, ограниченные замкнутыми линиями, равны.

12.1. РАЗВЕРТКИ МНОГОГРАННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

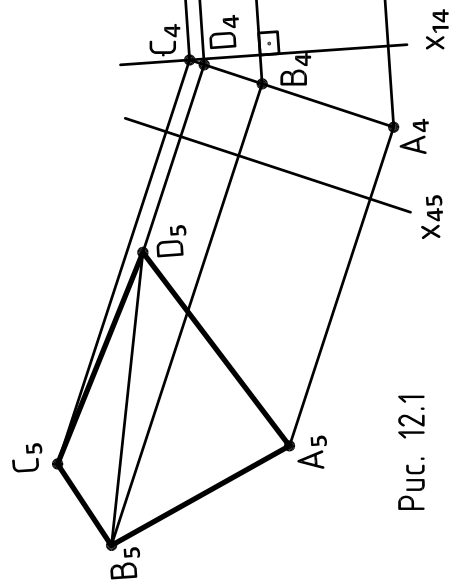
Существуют три способа построения разверток многогранных поверхностей:

- 1) способ треугольников (триангуляции);
- 2) способ нормального сечения;
- 3) способ раскатки.

Построение развертки многогранников сводится к определению натуральных величин боковых граней или ребер этих поверхностей. Натуральные величины граней (плоскостей) или ребер (прямых) могут быть определены любым из перечисленных выше способов.

Рассмотрим способ триангуляции.

При построении развертки пирамиды применяется способ треугольника. Развертка поверхности пирамиды представляется собой плоскую фигуру, состоящую из треугольников – граней пирамиды и многоугольника – основания. Поэтому построение развертки пирамиды сводится к определению натуральной величины основания и граней пирамиды. Грани пирамиды можно построить по трем



Присоединив к полученной фигуре основание ABCD, получим полную развертку пирамиды. Построение на развертке точки M, принадлежащей ребру SD, понятно из чертежа. Такой способ построения развертки поверхности называется способом триангуляции.

12.2. РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Как было сказано ранее, кривые линейчатые поверхности подразделяются на развертывающиеся и не развертывающиеся. Развертки всех развертывающихся кривых поверхностей, выполненные графически, являются приближенными. Это объясняется тем, что кривые поверхности приближенно заменяют поверхностями вписанных или описанных многогранников с гранями в виде треугольников или четырехугольников. Развертки этих многогранников и принимают за развертки линейчатых поверхностей. При этом построение развертки может быть выполнено с любой степенью приближения за счет увеличения числа граней, заменяющих многогранников.

С этой точки зрения конус можно приближенно заменить пирамидой, а цилиндр – призмой. Поэтому приемы построения разверток линейчатых кривых и плоских поверхностей аналогичны, с той лишь разницей, что вместо ребер на кривой поверхности проводят достаточное число образующих.

Развертка боковой поверхности цилиндра представляет собой прямоугольник со сторонами, равными $2\pi r$ и H , где r – радиус основания цилиндра, H – высота цилиндра.

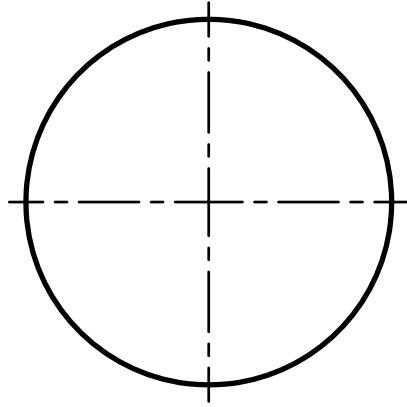
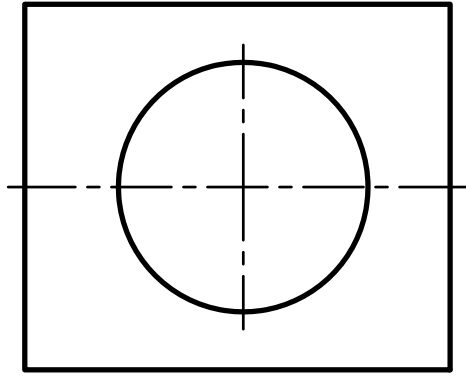
Развертка боковой поверхности конуса вращения представляет собой круговой сектор с радиусом r и центральным углом $\varphi = 360^\circ \times r / \ell$, где r – радиус основания конуса, ℓ – длина образующей.

Пример. Построить полную развертку конуса с вырезом.

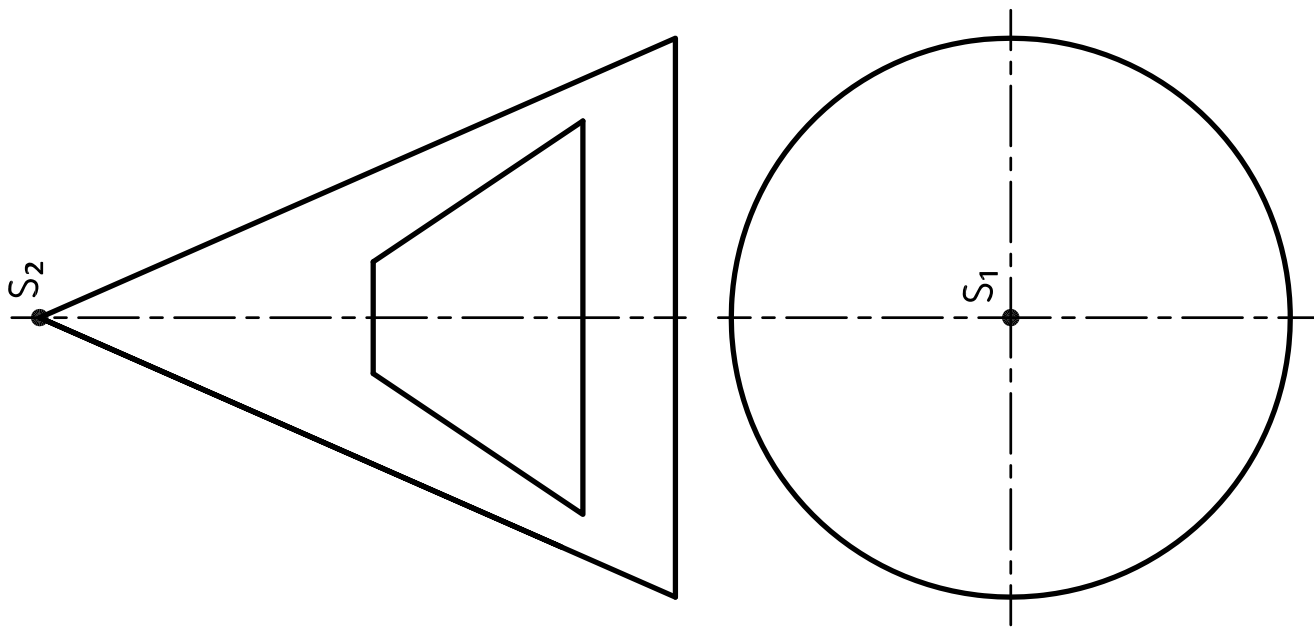
Рекомендуется следующая последовательность построения развертки конуса:

1. Впишем в конус правильную шестигранную пирамиду для построения приближенной развертки (рис. 12.3);
2. Построим круговой сектор радиусом, равным натуральной величине очерковой образующей $\ell = S_2 4_2$, с длиной дуги, равной шести хордам основания (рис. 12.4);
3. Находим натуральные величины образующих (в данном примере у прямого кругового конуса все образующие равны) и откладываем на развертке боковой поверхности (см. рис. 12.4);
5. Определяем положение опорных и промежуточных точек для построения эллипса (лежащего в плоскости Δ) и гиперболы (лежащей в плоскости Σ);
6. С помощью параллелей находим натуральную величину точек $B_0, C_0, D_0, E_0, F_0, G_0$;
7. На образующих от центра S откладываем расстояния от вершины конуса до точек сечения и соединяем плавной кривой.
8. К развертке боковой поверхности достраиваем фигуру основания конуса. Полученная плоская фигура (см. рис. 12.4) есть полная развертка конуса с вырезом.

91. Достроить профильный вид цилиндра с цилиндрическим отверстием и построить полную развертку.

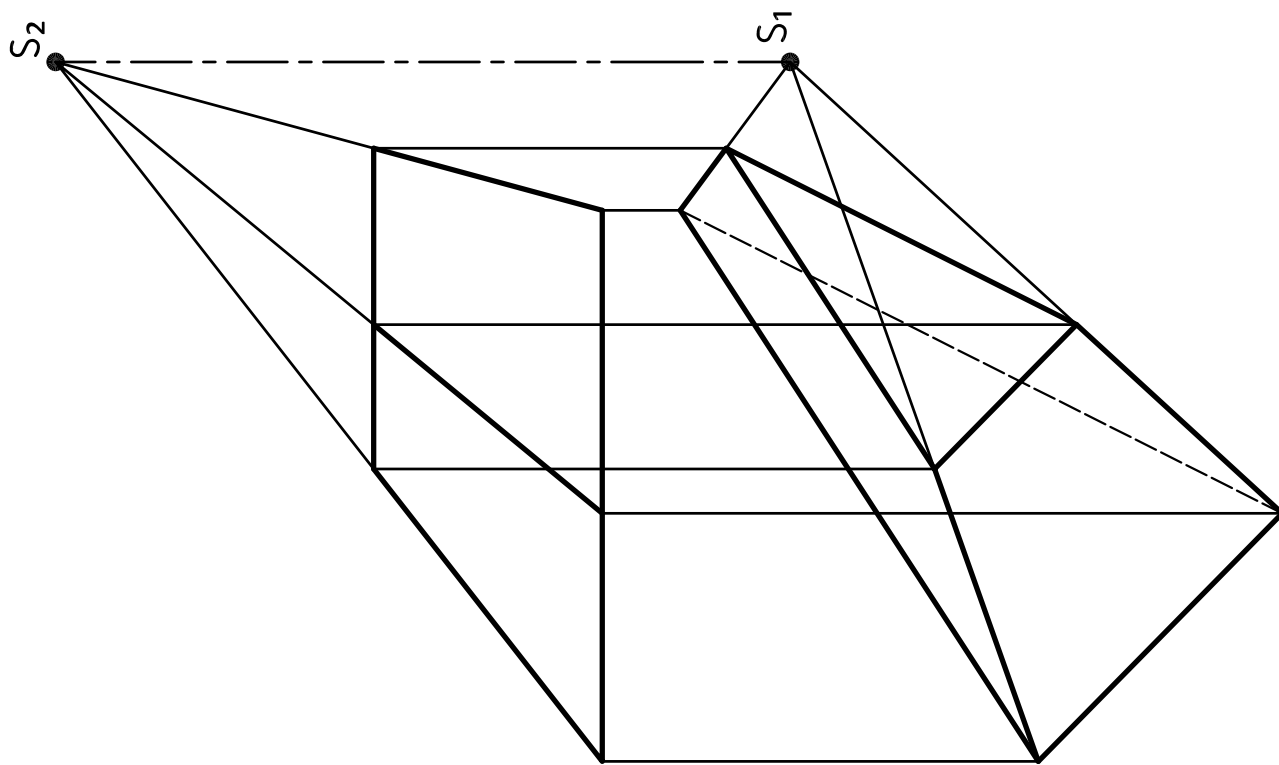


92. Построить полную развертку конуса с вырезом



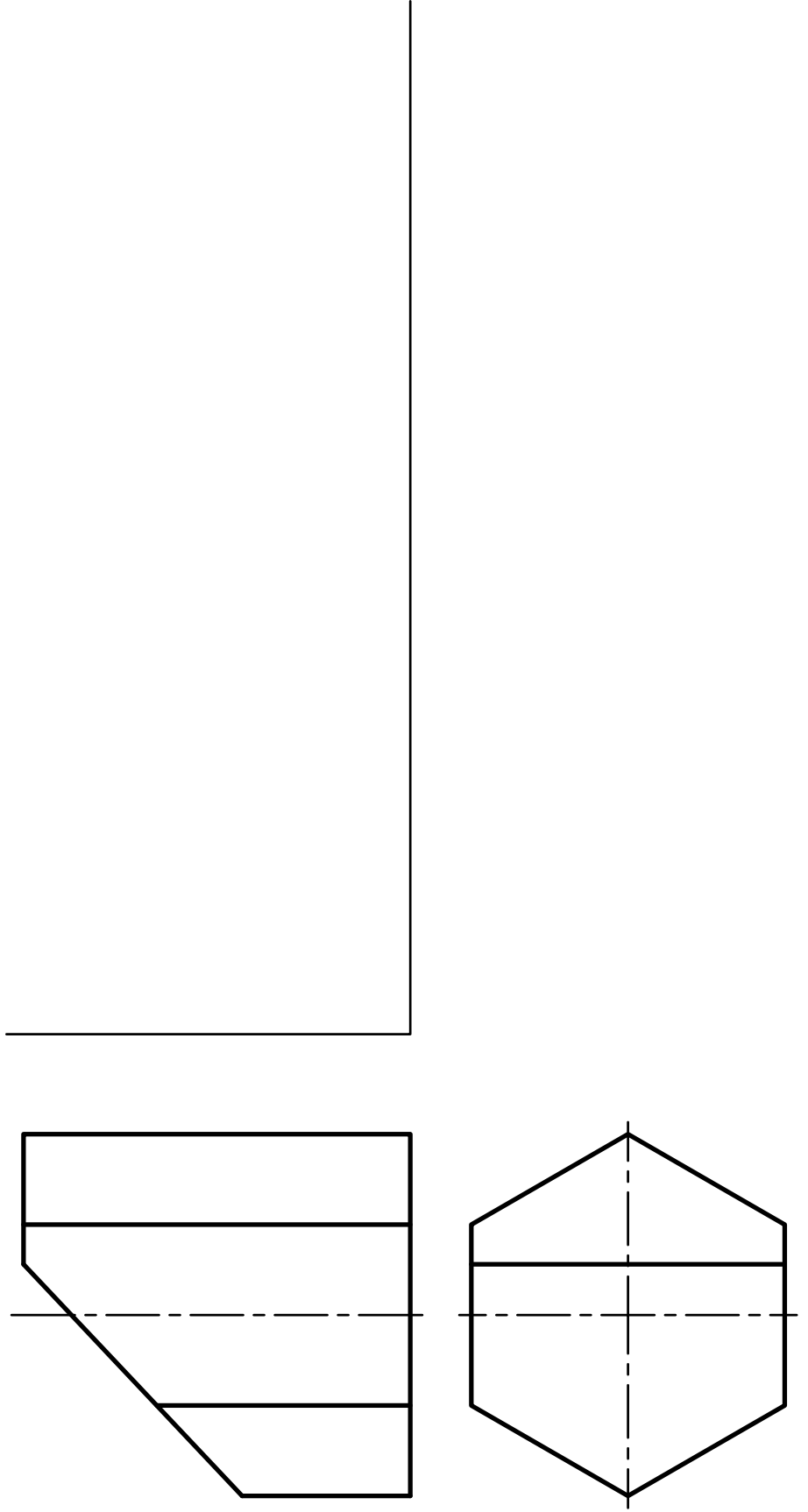
S_0 .

93. Построить полную развертку усеченной пирамиды



S_0 •

94. Построить полную развертку шестиугольной призмы с наклонным срезом.



БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сенизов, Н.П. Конспект лекций по курсу начертательной геометрии / Н.П. Сенизов, Т.В. Гусятникова, Н.В. Ларионова и др. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2006.
2. Дукмасова, В.С. Методика решения задач по начертательной геометрии / В.С. Дукмасова, В.А. Краснов, Н.П. Сенизов, Т.В. Гусятникова. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2006. – 81 с.
3. Кувшинов, Н.С. Начертательная геометрия. Компьютерный курс лекций / Н.С. Кувшинов, В.С. Дукмасова, Б.Н. Пинизин. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2003. – 136 с.
4. Локтев, О.В. Краткий курс начертательной геометрии: учебник для вузов / О.В. Локтев. – 7-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2010. – 136 с.
5. Лагерь, А.И. Основы начертательной геометрии: учебник / А.И. Лагерь, А.Н. Мота, К.С. Рушелюк. – 2-е изд. – М.: Высш. шк., 2007. – 281 с.
6. Четверухин, Н.В. Начертательная геометрия / Н.В. Четверухин, В.С. Левицкий, З.И. Прянишников и др. – М.: Высш. шк., 1963. – 420 с.
7. Буденников, А.В. Начертательная геометрия: учебник для вузов. / А.В. Буденников. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1985. – 288 с.
8. Посвянский, А.Д. Краткий курс начертательной геометрии / А.Д. Посвянский. – М.: Высш. шк., 1974. – 342 с.
9. Фролов, С.А. Начертательная геометрия: Сборник задач: учебное пособие для вузов / С.А. Фролов. – 3-е изд., испр. – М.: ИНФРА-М, 2008. – 172 с.
10. Фролов, С.А. Начертательная геометрия: учебник. / С.А. Фролов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: ИНФРА-М, 2008. – 286 с.
11. Белякова, Е.И. Начертательная геометрия: учебное пособие / Е.И. Белякова, П.В. Зеленый. – 3-е изд., испр. – Минск: Новое знание; М.: ИНФРА-М, 2012. – 265 с.
12. Павлова, А.А. Начертательная геометрия: учебник для студентов высш. учеб. заведений. / А.А. Павлова. – М.: ООО "Издательство Астрель": ООО "Издательство АСТ", 2001. – 304 с.
13. Нартова, Л.Г. Начертательная геометрия: учебник для студентов высш. учеб. заведений. / Л.Г. Нартова, В.И. Якунин. – 3-е изд., испр. – М.: Издательский центр "Академия", 2011. – 192 с.
14. Тарасов, Б.Ф. Начертательная геометрия. / Б.Ф. Тарасов, Л.А. Дудкина, С.О. Немолотов. – 2-е изд., стер. – СПб.: Издательство "Лань", 2002. – 256 с.
15. Зеленин, Е.В. Курс начертательной геометрии: учебник для студентов. / Е.В. Зеленин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1959. – 387 с.
16. Локтев, О.В. Задачник по начертательной геометрии: учебное пособие для вузов / О.В. Локтев, П.А. Числов. – М.: Высш. шк., 1977. – 103 с.
17. Арустамов, Х.А. Сборник задач по начертательной геометрии. / Х.А. Арустамов. – М.: "Машиностроение", 1969. – 376 с.
18. Чекмарев, А.А. Начертательная геометрия и черчение: учебник для вузов / А.А. Чекмарев. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во Юрайт, 2012. – 471 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
Тема 1. Комплексный чертёж точки. Координаты точки. Осный и безосный способы изображения.....	5
Тема 2. Комплексный чертёж прямой. Взаимопринадлежность точки и прямой. Прямые общего и частного положения. Относительное положение прямых.....	11
Тема 3. Определение длины отрезка прямой общего положения.....	18
Тема 4. Комплексный чертёж плоскости. Принадлежность точки и прямой плоскости. Плоскости общего и частного положения.....	20
Тема 5. Способы преобразования комплексного чертежа. Способ замены плоскостей проекций.....	28
Тема 6. Взаимно перпендикулярные прямые и плоскости	
6.1. Проекции прямого угла.....	31
6.2. Прямая, перпендикулярная к плоскости.....	31
6.3. Взаимно перпендикулярные плоскости.....	32
6.4. Взаимно перпендикулярные прямые общего положения.....	33
Тема 7. Комплексные чертежи многогранников. Принадлежность точки и линии поверхности многогранника.....	38
Тема 8. Кривые линии и поверхности. Комплексные чертежи поверхностей вращения. Принадлежность точки и линии поверхности вращения.....	44
Тема 9. Позиционные задачи	
9.1. Определение общих элементов простейших геометрических фигур из условия принадлежности. Вспомогательные позиционные задачи.....	56
9.1.1. Построение точки пересечения прямой с плоскостью.....	56
9.2. Построение точек пересечения линии и поверхности. Первая позиционная задача. Основные положения.....	59
9.2.1. Построение точки пересечения прямой с плоскостью. Первая позиционная задача.....	59
9.3. Построение линии пересечения двух поверхностей. Вторая позиционная задача. Основные положения.....	61
9.3.1. Построение линии пересечения двух плоскостей. Вторая позиционная задача.....	61
9.4. Построение линии пересечения поверхностей плоскостями частного положения. Вторая позиционная задача.....	64
9.4.1. Построение линии пересечения многогранников плоскостями частного положения.....	64
9.4.2. Построение линий пересечения кривых поверхностей плоскостями частного положения.....	66
9.4.3. Построение линий пересечения цилиндра и конуса плоскостями частного положения.....	66
9.4.4. Построение линий пересечения сферы и тора плоскостями частного положения.....	68
9.5. Построение точек пересечения прямой линии с поверхностью. Первая позиционная задача.....	71

9.6. Построение линии пересечения двух многогранников. Вторая позиционная задача.....	73
9.7. Построение линии пересечения многогранной и кривой поверхностей. Вторая позиционная задача.....	76
9.8. Построение линии пересечения двух кривых поверхностей. Вторая позиционная задача.....	80
9.9. Построение линии пересечения двух кривых поверхностей способом вспомогательных секущих плоскостей. Вторая позиционная задача.....	84
Тема 10. Особые случаи пересечения поверхностей второго порядка.....	86
Тема 11. Способ вспомогательных сфер	
11.1. Способ концентрических сфер.....	89
11.2. Способ эксцентрических сфер.....	91
Тема 12. Построение разверток поверхностей геометрических тел	
12.1. Развертки многогранных поверхностей.....	93
12.2. Развертки поверхностей вращения.....	95
Библиографический список.....	101